

「当たり前」を相対化する中高数学の教材論

—多項式の展開公式、 \sqrt{a} の長さの線分の作図、比例の定義の3つの題材を通じて—

上ヶ谷 友佑

本稿では、中学校・高等学校の数学の教科書上の「当たり前」に目を向け、その点を相対化していく教材論、すなわち、その教師にとっての「当たり前」が生徒達にとっての「当たり前」ではないかもしれない可能性を考える教材論を展開する。結果、[1] 多項式の展開については、 $(a+b)^2$ の展開公式に着目し、生徒達の目から見て、 $a^2+2ab+b^2$ と a^2+b^2+2ab のどちらの順番で書いても拡張の方向性として遜色なく見え得ること、[2] \sqrt{a} の長さの線分の作図については、長さ a の線分のみならず長さ 1 の線分が与えられることの数学的価値が、生徒達の目からは見えないこと、[3] 比例の定義については、小学校流の定義から中学校流の定義に更新する必要性が生徒達には感じづらいこと、を指摘し、3教材のいずれについても、大局的な視点（教師にとっての「数学としての当たり前」）と局所的な視点（生徒達にとっての「生活経験としての当たり前」）のズレを論じることができた。数学の教師は、日々目の前の生徒達の様子を注意深く観察しながら、教師にとっての「数学としての当たり前」と生徒達にとっての「生活経験としての当たり前」のズレの調整をしなければならない。

1. はじめに

これまで筆者は、哲学的な関心の強い附属学校教員であると自認していた。なぜなら筆者の研究は、実践的なものであれ理論的なものであれ、哲学を背景に据えたものが多いからである（例えば、Uegatani et al., 2023; Uegatani & Otani, 2023; 上ヶ谷, 2017, 2020, 2021a, 2022）。そのため、仮に筆者の拙い論文が世間の関心を集めるとすれば、当然、哲学的な議論が期待されているものだと考えていた。しかし、現実とは少し違ったようである。

その現実を知った経緯が、広島大学学術情報リポジトリのダウンロード数通知システムにある。筆者は、権利関係がクリアできる自著論文については、同リポジトリに登録していて、大学のシステムから定期的に、どの論文がどの程度ダウンロードされたかについての通知を受け取っている。そしてここ数年、通知を受け取る度に驚愕している。というのも、上ヶ谷・石橋・迫田 (2020) 「学校数学における「根元事象」と「同様に確からしい」の概念規定」が、筆者の論文のダウンロード・ランキングにおいて常にずば抜けて安定して 1 位であり続けているからである¹⁾。このことは、筆者のアイデンティティを揺るがす事態となった。

上ヶ谷・石橋・迫田 (2020) は、筆者の数年前の査読なし学会発表資料である。他にも厳しい審査を経てようやく掲載された査読付き論文もリポジトリに登録されているにもかかわらず、そうした論文達を押さえての 1 位である。石橋先生と迫田先生という強力な共著者のお力に依るところも大きいのであろうが、このお二人との共著論文は他にもある。それだけでは説明のできない何か

が、この論文にはあるようなのである。

そこで筆者の考えた 1 つの仮説が、「教材」である。教材を核にした論文は、これまでもいくつか執筆しているし（例えば、Hayata et al., 2018; Ishibashi & Uegatani, 2022; Uegatani et al., 2020; 服部 & 上ヶ谷, 2020; 石橋 & 上ヶ谷, 2019）、書籍の章や雑誌記事も書かせていただいたが（上ヶ谷, 2023a, 2023b）、学術的要素が強かったりオンラインでフリーで読めるわけではなかったりと、教材それ自体についての情報を求める方にとっては少しアクセスしにくい側面がある。そういう意味で、上ヶ谷・石橋・迫田 (2020) は、筆者の書いた教材が核となる文章の中でも、アクセスのしやすい文章なのかもしれない、と思うに至った。

そういうわけで、本稿では、中学校・高等学校の数学の教科書上の「当たり前」に目を向け、その点を相対化していく教材論、すなわち、その教師にとっての「当たり前」が生徒達にとっての「当たり前」ではないかもしれない可能性を考える教材論を展開したい。本稿の構成は以下の通りである。まず、「当たり前」を相対化することの価値を理論的観点から論じる（第 2 節）。次に、「当たり前」を相対化する教材の具体例として、多項式の展開公式（中学 3 年、高校数学 I, II, B）、 \sqrt{a} の長さの線分の作図（高校数学 A, II）、比例の定義（中学 1 年, 3 年、高校数学 I）の 3 つを取り上げ、それぞれ論じる（第 3 節）。最後に、まとめと今後の課題を述べる（第 4 節）。

2. 教材論を支える理論について

本節では「当たり前」に目を向ける価値を理論的に論

じる。まずは本稿が依拠する理論的視座として「推論主義」を取り上げ、そこから得られる教育的示唆としての教師の役割を論じる。また、ここで指摘した教師の役割を実現するための具体的な手立てとして、「なぜ疑問」の作法を論じる。

(1) 推論主義

本稿が着目する理論的視座は、「推論主義」である。推論主義とは、アメリカの哲学者 R. Brandom によって提唱された哲学で、言葉の意味は推論で果たす役割で決まると考える立場である (Brandom, 1994, 2000)。教育哲学の分野で Derry (2008, 2013a, 2013b) によって取り上げられ、以降、数学教育研究でも着目されるようになった (e.g., Bakker & Derry, 2011; Bakker & Hußmann, 2017; Nilsson, 2020; Uegatani et al., 2023; Uegatani & Otani, 2021, 2023)。推論主義における推論は、演繹や帰納といった形式的な推論ではなく、人々がよいものとみなす文同士の繋がりのことを指し、特別に「実質推論」と呼ばれている。例えば、「マッチをする」(p) と「火がつく」(q) ので、 p から q への推論はよい推論であり、実質推論である。また、 p から q への推論がよい推論であるにもかかわらず、「 p かつ r 」から q への推論がよい推論であるとは限らない場合、その推論は「非単調」であると言われる (Brandom, 2000, p. 87)。例えば、「マッチをする」(p) から「火がつく」(q) への推論はよい推論であるが、「マッチをする」(p) と「そのマッチは濡れている」(r) から「火がつく」(q) への推論はよい推論ではないため、「マッチをする」(p) から「火がつく」(q) への推論は非単調である。「マッチをする」(p) から「火がつく」(q) という推論について、人がこれを妥当であると感じるのは、「そのマッチは濡れていない」($\neg r$) が暗黙の前提にあるからである。演繹的推論は常に単調であるが、実質推論は非単調であり得、人は、推論の妥当性を評価する際、常に多数の暗黙の前提に依拠している。

筆者のこれまでの研究では、数学の授業場面でも生徒達の推論が非単調であることが示されている (Uegatani et al., 2023)。生徒達は、教科書とは異なる暗黙の前提 (先入観) を有するがゆえに (教科書の立場から見て) 誤った推論を行い得るし、そうした暗黙の前提を授業を通じて顕在化させることは、生徒達の活発な議論や深い意味理解を引き起こし得る (関連研究としては、例えば、Ishibashi & Uegatani, 2022; Van Dooren et al., 2019; 服部 & 上ヶ谷, 2020; 石橋 & 上ヶ谷, 2019)。数学教育研究でこれまで伝統的に取り組まれてきた、生徒達が様々なミスコンセプション (誤概念) を有するという現象の報告 (例えば、Confrey, 1991; Nesher, 1987) も、この推論の非単調性の視座から説明が可能である (Uegatani et al., 2023)。

(2) 教師の役割

上述した人間の推論の特性を鑑みると、数学の授業を行うにあたって、教師が教材の有する暗黙の前提を把握しておくことは重要である。それらは暗黙的であるがゆえに、教師にも生徒達には認識されていない可能性があると同時に、その暗黙性ゆえ、教師と生徒達とは同じ前提を共有できていない可能性さえある。そして、こうした暗黙の前提のうちのいくつかは、教師・生徒それぞれにとって「当たり前」のことであり、わざわざ言語化して議論する機会が乏しいものである可能性がある。特に、学校数学を一通り学び終えている教師にとっての「数学としての当たり前」と、自身の生活経験に基づいてこれから数学を学んでいく生徒にとっての「生活経験における当たり前」は、教師と生徒達の間で、あるいは、生徒達同士の間で食い違い得る暗黙の前提となり得るのである。

ただし、このとき、教室における数学が、教師や生徒達が予め所持していた何らかの経験を持ち寄って構築されるもの、と捉えるべきではない (Roth, 2016)。教室における数学は、まずは教師や生徒達の社会的関係性として観察可能な事実として現れ、そのあとに、規範・規則として発見される (Roth, 2016)。例えば、Nesher (1987) は、インタビュー調査の結果に基づいて、 $0.4 < 0.234$ と答える小学生について報告している。そして、この小学生は、小数点以下の桁数が長い方が大きい数であるのだと主張する。しかし、Roth (2016) の考え方に基づけば、小学生が「桁数が長い方が大きい数である」という規則を先に有していて、それに基づいて調査で $0.4 < 0.234$ と答えたのではなくて、調査で $0.4 < 0.234$ と答えたという観察可能な事実が先にあり、それに対して小学生が、インタビューとの社会的関係性の下で「桁数が長い方が大きい数である」という規則を後から発見 (または再発見) した、と考えるのである。Ely (2010) が報告しているように、 $0.999\ldots < 1$ とインタビューで答える大学生も、テストでは $0.999\ldots = 1$ と答えることがあり、社会的関係性の下でしか行為の規則・規範が定まらないのである。

このように考えたとき、教師は、教室で教師と生徒達との間でどのような社会的関係性を実現することが望ましいのかを考えると同時に、その社会的関係性の実現に向けて「演じる」ことが必要である (上ヶ谷, 2021b)。Ely (2010) が報告した大学生は、 $0.999\ldots < 1$ を信じているが、テストでは $0.999\ldots = 1$ と答えることを演じていた。同様に、教師は、教室での教師と生徒達との間の望ましい社会的関係性を実現することを妨げ得る自身の数学的信念については一旦脇に置き、「演じる」ことを通じて教師と生徒達との間の望ましい社会的関係性の実

現を目指さなければならない。

これを教師の重要な役割の 1 つであると捉えるならば、学校数学を一通り学び終えている教師にとっての「数学としての当たり前」を生徒達に押し付けることは、教室での教師と生徒達との間の望ましい社会的関係性を実現することを妨げる可能性があり、注意しなければならない。そしてこの点に注意を払うということは、教師は、まずは学校数学を一通り学び終えている教師にとっての「数学としての当たり前」を当たり前だとは思わないよう、つまり、それを一旦脇に置くことができるよう、その存在を自覚するところから始めなければならない。

(3) 「なぜ疑問」の作法

哲学者ファン・フラーセン (1986) は、「なぜ」という問いに対する答えは、その文脈において暗黙的に対比されているクラス (種類) が何であるかに依存すると述べた。例えば、「アダムはりんごを食べている」という文について「なぜ？」と問うことを考えよう。「なぜアダムはりんごを食べているのか？」という問いは、暗黙的に対比されているクラスが何であるのかが明示されていないため、実は多義的な問いである。この問いを、「なぜアダムが？」という意味で理解するならば、暗黙的な想定は、例えば、「なぜジェシーではなくて、アダムがりんごを食べているのか？」という問いになる。「そのりんごはジェシーが食べると聞いていたのに、見に来てみたら、なんとアダムが食べているではないか。なぜだ？」と、こういう文脈での問いになる。

「なぜアダムはりんごを食べているのか？」という問いには、「アダムは」、「りんごを」、「食べている」と 3 文節で構成されているので、この問いは、「なぜアダムが？」だけでなく、「なぜりんごを？」、「なぜ食べている？」という意味で理解することもできる。「なぜりんごを？」という意味で理解するならば、例えば、「アダムはオレンジを食べると聞いていたのに、見に来てみたら、なんとりんごを食べているではないか。なぜだ？」という文脈が想定される。「なぜ食べている？」という意味で理解するならば、例えば、「アダムはそのりんごをジェシーにあげると聞いていたのに、見に来てみたら、なんと自分で食べているではないか。なぜだ？」という文脈が想定される。

そこで本稿では、対比されているものが何かを明示しながら「なぜ疑問」を用いていくこととし、これを「『なぜ疑問』の作法」と呼ぶことにしよう。したがって、学校数学を一通り学び終えている教師にとっての「数学としての当たり前」を相対化するにあたっては、「○○は当たり前だと思われるが、なぜ△△なのではなく、○○なのか？」という形式で問うていくこととなる。

(4) 「なぜ疑問」への回答の観点

「なぜ疑問」は、前述の作法に則って問うたとしても、問いへの回答は状況により変動し得る。それは、推論主義において実質推論の非単調性が指摘されていることとも関連する。すなわち、対比されているものを明示したつもりでも明示しきれていない暗黙の前提が無数に存在し得、そうであるがゆえに、問いに対する答えは、そうした暗黙の前提を追加で明示する度に異なるものとなり得るのである。したがって、原理的には「なぜ疑問」に対して唯一絶対の回答を与えることはできない。しかし、客観性をできるだけ高めるため、回答の自由度が高くなり過ぎないような努力をすることは可能である。

そこで本稿では、「教材の系統性」を回答の観点として立てる。学校数学を一通り学び終えている教師にとっての「数学としての当たり前」に関心を持つ本稿にとっては、この観点の選択が重要である。なぜなら、学校数学を一通り学び終えている教師にとっての「数学としての当たり前」は、ある教材を学んだその瞬間にとっては「当たり前」でないかもしれないが、先の教材を学んだことによって「当たり前」になっていくような「当たり前」だからである。

本節をまとめると、次のようになる。第一に、生徒達は、教科書とは異なる暗黙の前提に基づいて推論し得るので、推論主義で議論されている実質推論の非単調性を考慮する必要がある。第二に、学校数学を一通り学び終えている教師にとっての「数学としての当たり前」を生徒達に押し付けることは、教室での教師と生徒達との間の望ましい社会的関係性を実現することを妨げる可能性があるため、教師は、この「数学としての当たり前」を自覚していく必要がある。第三に、この「数学としての当たり前」を自覚化するために、教材に対して「なぜ疑問」の作法に基づいた問いを立てていく。第四に、この「なぜ疑問」に対しては、教材の系統性の観点から回答を構成していく。以下では、この方針で具体的な教材分析を行う。

3. 教材

本節では教材の具体例として、多項式の展開、作図、比例の 3 つを論じよう。これらはいずれも、中学校と高等学校の両方で価値ある教材となり得る。

(1) 多項式の展開 (中学 3 年, 高校数学 I, II, B)

① 数学的分析

第一の教材は、多項式の展開である。中学 3 年で $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ を学習し、高校数学 I でも改めて学習し直す。この等式に潜む「当たり前」の 1 つを相対化していこう。前節で述べた「なぜ疑問」の作法に則って、次のように問うてみたい。

なぜ $(a+b)^2$ の展開公式は、 $a^2 + b^2 + 2ab$ の順番ではなく $a^2 + 2ab + b^2$ の順番で表記されるのか？

前節で議論した「教材の系統性」の観点でこの問いに1つの答えを与えるとすれば、高校数学Ⅱで学習する二項定理・パスカルの三角形を意識した順序だということである。係数が1, 2, 1の順番であるのは、二項定理において係数が ${}_2C_0, {}_2C_1, {}_2C_2$ の順番だからである。二項定理では、 ${}_nC_r$ の r に代入される数が $0, 1, \dots, n$ という順番であることが自然である。しかし、この回答だけでは、「なぜ $a^2 + b^2 + 2ab$ の順番ではなく」の部分には十分答えられていない。なぜなら、 $a^2 + b^2 + 2ab$ の順序の合理性が何ら説明されておらず、二項定理に基づく順序の合理性の比較優位性がまだ不明瞭だからである。

そこで $a^2 + b^2 + 2ab$ と同じような方式で並べる類似公式を考えてみよう。すると、思い浮かぶのは、

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

である。 $3ab + 3bc + 3ca$ の部分が輪環の順になっている点を除けば、形式が似ている。つまり、二項定理への拡張を意識するならば、 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ の書き方になるが、 $(a+b+c)^2$ の展開公式への拡張を意識するならば、 $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ の書き方になる。

では、後者の方向での拡張を押し進めてみよう。

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd$$

⋮

であるから、一般化すると、

$n \geq 2$ のとき

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2 = \sum_{k=1}^n a_k^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} a_k \left(\sum_{l=k+1}^n a_l\right)$$

が成り立つと予想される。このことは、数学的帰納法を用いて証明してもよいし、二項定理を証明するときのように、 $a_1 \sim a_n$ までの n 個の文字から重複を許して2個選ぶ場合を考えてもよいであろう。この拡張自体、数学Bや数学Ⅱの応用問題として捉えることもできる。

以上の考察をまとめると、次のようになる。 $a^2 + 2ab + b^2$ の順番は、 $(a+b)^2, (a+b)^3, (a+b)^4, \dots$ という指数を増やす拡張を意識した順番であり、 $a^2 + b^2 + 2ab$ の順番は、 $(a+b)^2, (a+b+c)^2, (a+b+c)^2, \dots$ という括弧内の文字を増やす拡張を意識した順番である。

何らかの物を「整理する」ということは、多くの場合、何らかの規則に基づいて「整理する」ということである。規則が存在すれば、物が増えたとしても、同じ規則で再

整理することで扱いやすくなる。しかし同時に、そこに規則が存在するということは、物の増え方によっては、その規則に基づく整理が便利な場合と不便な場合とがあるということでもある。どんな物の増え方であっても常に万能な整理方法はないのである。このことは、多項式を整理するための規則にも当てはまる。ここで紹介した多項式の2つの整理方法は、それぞれが威力を発揮する物の増え方(すなわち、拡張のされ方)に違いがある。つまり、多項式をどのように整理するかが、拡張の方向性を一定程度規定することになる。その方向性に逆らって異なる方向に拡張する場合は、整理の仕方を適宜改める必要がある。

② 数学的価値と数学教育的価値の導出

上述の考察から、多項式の項の順番の違いによる数学的価値と数学教育的価値を引き出そう。第一に、局所的に見れば、 $a^2 + 2ab + b^2$ という順番に、強力な優位性が認められないという点である。指数を拡張するか文字数を拡張するかは、いずれもあり得る拡張の方向性の1つであり、 $a^2 + 2ab + b^2$ という順番も、 $a^2 + b^2 + 2ab$ という順番も、どちらもそれなりに価値のある順番であるということがわかる。そして、もう1つ重要なことは、 $(a+b)^n$ の展開公式に「二項定理」という名前がわざわざ

づけられているのに対して、 $\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2$ の展開公式には

よく知られた名前がつけられていないことから、大局的には、やはり $a^2 + 2ab + b^2$ の順番に優位性があるということである。わざわざ定理の名をかざすからには、両者には使用頻度や理論上の位置付けなどの点で、数学的価値に差があるということである。

そこで、このことから、両者の順番の数学教育的価値を考えていこう。大局的には二項定理を意識した順番の方が価値があるため、教師にとってはこちらの順番が「数学としての当たり前」である。しかし、局所的には拡張の方向性が違うだけで、どちらの順番にもそれなりに価値が認められることから、中学3年生や高校1年生など、数学Ⅱで二項定理を学ぶ前の生徒達にとっては、どちらも価値のあるものに見える可能性がある。実際、例えば、中学1年生の負の数の導入場面のような、数概念の拡張に代表されるように、「拡張する」という考え方は、展開公式を習うまでの授業に幾度となく登場する。そのため、「拡張の考え方がきちんと身につけているが、二項定理の大局的価値をまだ知らない生徒達」にとっては、

二項定理へと拡張する方向も $\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2$ の展開公式へと

拡張する方向も、どちらにも等しく価値を感じることができると考えられる。これが、生徒達にとっての「生活経験における当たり前」である可能性がある。そして、この生徒達にとっての「生活経験における当たり前」は、上で述べた教師にとっての「数学としての当たり前」とズレがある。

そのため、 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ という展開公式を指導するにあたっては、次のような留意が必要になる。まず、 $a^2 + b^2 + 2ab$ と書く生徒達がいた場合は、きちんとその生徒達の書き方を肯定してやることである。先の考察により、 $(a+b)^2$ の展開公式を習う段階の生徒達の目から見て、 $a^2 + 2ab + b^2$ と $a^2 + b^2 + 2ab$ の順番のどちらがよいかは決定ができない可能性がある。もちろん、拡張することを意識して並べている生徒ばかりではないであろうけれど、 $a^2 + b^2 + 2ab$ と書いた生徒に対して、教科書に合わせて無理矢理に $a^2 + 2ab + b^2$ と書くように指導するのではなくて、 $a^2 + b^2 + 2ab$ の順番によって開かれる数学の発展が確かに存在し、その順番にも数学的価値があるということを伝えてやることは、教師の重要な役割である。 $a^2 + 2ab + b^2$ という順番の方が大局的には数学的価値があるという教師の信念を一旦脇に置き、教科書と違う順番であっても価値があることをきちんと伝えるのである。このような「正解か不正解かという価値基準ではない、価値のある学び」を生徒達にもたらしることができるのは、まさにその生徒達を指導している教師だけである。

次に、もう 1 つ重要な指導上の留意点は、そうはいっても、 $a^2 + 2ab + b^2$ の方が大局的に価値があるということを生徒達にきちんと伝えることである。生徒達目線では今の段階では理由はわからないかもしれないけれど、先々、とりあえずこの形で整理しておいた方が都合がよいことも多いと、きちんと伝える必要があるのである。大局的な数学的価値は、先の学習内容を知っていなければならないという意味で、その段階の生徒達には感じ取ることができない。長い歴史の中で採まれることで、公式の表現はこの順番で書くことに落ち着いているのであって、公式の表現は、授業中に少し検討した程度で簡単に覆してよいものではない。その意味で、教科書の順番を尊重するということがもまた重要である。授業中、もし $a^2 + b^2 + 2ab$ の順番で書いた生徒達が現れたならば、その生徒達を褒めてやることは重要だが、同時に、教科書の順番できちんと押さえ直すよう指導することもまた重要な教師の役割である。

(2) 作図 (高校数学 A, II)

① 数学的分析

第二の教材は、作図の展開である。作図自体は、中学 1 年から学習するが、使用可能な幾何学的知識が増える

に連れ、作図可能な対象が増えていくため、様々な学年で取り組むことができる。また、数学 A では、抽象的な作図の問題や作図可能性の論証も取り扱うことになり、定規とコンパスを用いて物理的に作図する以上の数学的活動と発展する。本節では、特に数学 A の作図問題の「当たり前」の 1 つを相対化していこう。前節で述べた「なぜ疑問」の作法に則って、次のように問うてみたい。

なぜ \sqrt{a} の長さの線分の作図には、長さ a の線分だけでなく、長さ 1 の線分も与えられているのか？

\sqrt{a} の長さの線分の作図は、教科書でも取り扱われる問題である。与えられた長さ a の線分と長さ 1 の線分から直径 $a+1$ の円を描き、直径を $1:a$ に内分するところで直径と直交する弦を引けば、方べきの定理より、この弦の半分の長さが \sqrt{a} となる (図 1)。したがって、ここでの問いは、なぜ長さ 1 の線分が必要なのか？ 長さ 1 の線分が与えられなかったら、どうなるのか？ である。問題の前提条件が、結論の導出にどのように寄与しているかは、数学の理論に関する重要な数学的理解の 1 つではあるが、問題を解くことばかりに注力してしまうと、しばしば忘れられがちな数学的理解でもある。

前節で議論した「教材の系統性」の観点でこの問いに 1 つの答えを与えるとすれば、乗法の定義により、1 が必要である、ということになる。この問題は、作図可能数と体の 2 次拡大の問題に通じており、1 の必要性は、この基礎をなす問題である。

与えられた線分だけから、指定された長さの線分を作図するということは、幾何学的性質を利用して、実数の数体系の一部分を作図によってシミュレーションすることになる。今回の場合は、 \sqrt{a} という平方根の計算をシミュレーションしなければならない。つまり、 \sqrt{a} は、 $x^2 = a$ を満たす実数 x であるから、2 乗という計算の意味を定めるために必要な情報が、問題に埋め込まれていないといけないうことである。では、 x^2 とはいかなる意味か？ 比の考え方を用いると、積 ab は、 a を 1 としたときに b に相当する実数であるから、 x^2 は、

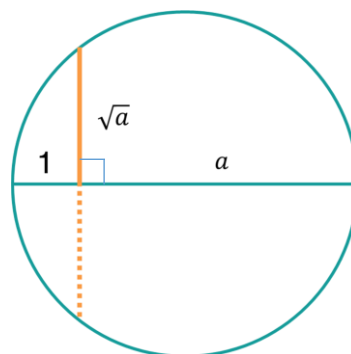


図 1: \sqrt{a} の長さの線分の作図

x を 1 としたとき、 x に相当する実数である (図 2)。

「 $x^2 = a$ を満たす実数 x 」という言い回しの中に「1」が出てこないため意識しづらいが、 \sqrt{a} の定義に 1 が必要であり、1 が何であるかの情報が必要不可欠なのである。

実際、1 の定め方によって作図すべき線分が変化してしまう。例えば、長さ a の線分が 9m の線分である場合を考えよう。このとき、1m の線分を 1 としたならば、 $a = 9$ であるから、作図すべき線分の長さは 3m である。一方、1cm の線分を 1 としたならば、 $a = 300$ であるから、作図すべき線分の長さは $\sqrt{900}\text{cm} = 30\text{cm} = 0.3\text{m}$ である。3m \neq 0.3m だから、何を 1 にするかによって、長さ a の線分から作られる長さ \sqrt{a} の線分が変化することになる。

このような現象が生じるのは、文字式の特性が関係している。「長さ 5 の線分」のような定数を用いた表現と、「長さ a の線分」のような変数を用いた表現とは、その表現の持つ情報量が異なる。「長さ 5 の線分」の場合、長さ 1 の線分の 5 倍の長さであるという意味であるから、何を単位として測定して 5 であったのかが明示されているが、「長さ a の線分」の場合、何を単位として測定して a であったのかが明示されていない。つまり、「長さ a の線分」という表現は、実質的に乗法を行うために必要な数学的な情報 (乗法の単位元) を与えていないのである。

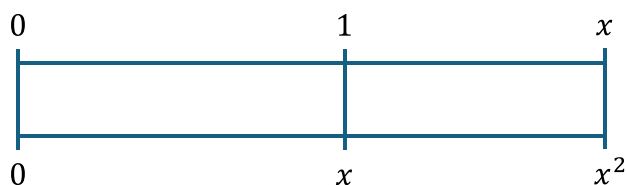


図 2: x^2 の意味

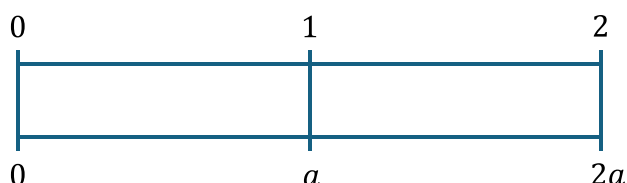


図 3: $2a$ の意味

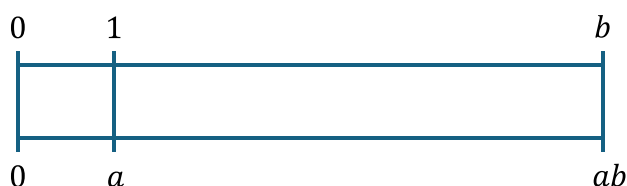


図 4: ab の意味

いのである。

同じ乗法でも、片方が定数の場合は、実質的に 1 が与えられることになり、作図することができる場合がある。例えば、長さ a の線分から長さ $2a$ の線分を作ることは容易である (図 3)。図 2 の場合を一般化すると、図 4 のようになる。長さ a の線分と長さ b の線分が与えられたとしても、1 が追加で与えられない限りにおいては、長さ ab の線分を作図することができない。

なお、このとき「教材の系統性」の観点で思い浮かぶのは、相加・相乗平均の関係の図的証明かもしれない (図 5)。直径 $a + b$ の円をかき、直径を $a : b$ に内分するところに直径と直交する弦を引く。すると、方べきの定理より、その弦の半分の長さが \sqrt{ab} となり、図 5 より、

半径 $\frac{a+b}{2}$ 以下であることがわかる。この作図において、1 は登場しない。これは、1 の影響がキャンセルされる特殊な例である。つまり、 a, b が何を単位として測定した値であったとしても、 \sqrt{ab} は同じ長さになる。

例えば、長さ a の線分が 4m、長さ b の線分が 9m だとすると、長さ ab の線分は 36m となるが、長さ \sqrt{ab} の線分は 6m となる。そして物理的には同じ長さの場合を、測定単位を cm にして考えてみよう。つまり、長さ a の線分が 400cm、長さ b の線分が 900cm だとすると、長さ ab の線分は 360000cm = 3600m となるが、長さ \sqrt{ab} の線分は結局 600cm = 6m となる。今、m と cm の場合で計算したが、長さ \sqrt{ab} の線分の物理的長さが変わらないことは、測定単位によらない。仕組みとしては、 ab は単位が 2 乗されてしまうが、 \sqrt{ab} は $\sqrt{\quad}$ をつけたことによって、その 2 乗がキャンセルされているということになる。相加・相乗平均の関係の図的証明の場合のように、単位によらず同じ結果が得られる場合は、単位となる 1 が与えられていなくても作図できる場合がある。

② 数学的価値と数学教育的価値の導出

上述の考察から、 \sqrt{a} の長さの線分作図における 1 の役割に関する数学的価値と数学教育的価値を引き出す。

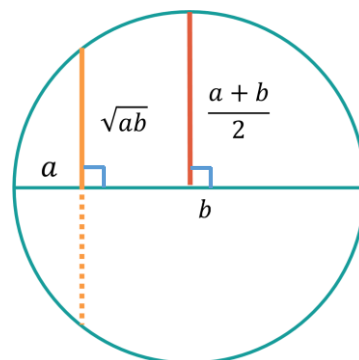


図 5: 相加・相乗平均の図的証明

う。ここでの長さ 1 の線分は、平面上で作図によってシミュレーションする乗法を定めるために必要であるという意味で、理論の根幹をなす仮定である。この 1 なくしては、所定の長さの線分を作図するという問題が成立しないかもしれない、理論を支えているという数学的価値を有する。

そこで、このことから、この 1 の数学教育的価値を考えていこう。大局的には数学の理論を構築する観点からも作図問題を成立させる観点からも 1 が必要であるため、教師にとっては 1 の存在が「数学としての当たり前」である。しかし、この段階の生徒達にとって、1 は、たまたまその問題で与えられていた情報の 1 つに過ぎず、局的には取り立てて重要な存在に見えない可能性がある。これが、生徒達にとっての「生活経験における当たり前」である可能性がある。この生徒達にとっての「生活経験における当たり前」は、上で述べた教師にとっての「数学としての当たり前」とズレがある。

そのため、 \sqrt{a} の長さの線分を作図を指導するにあたっては、次のような指導上の留意点を考えることができる。まず、進んでできる生徒達には、この 1 の役割を考えさせるとよいであろう。単に数学の問題が解けるだけでなく、どんな仮定が結論にどのような影響を与えているかを理解することは、数学の学びとして重要な学びである。例えば、[1] 長さ 3 の線分から長さ $\sqrt{3}$ の線分を作図する問題、[2] 長さ a の線分から長さ \sqrt{a} の線分を作図する問題、[3] 長さ 1 の線分と長さ a の線分から長さ \sqrt{a} の線分を作図する問題の 3 題を対比させる活動が考えられる。[1] と [3] は解けるのに、[2] が解けないという事実から、1 の役割の大きさを実感することができる。

また、進んでできる生徒達が対象でなくとも、教科書例題を一步深める学習として、単位の実在を意識させる数学的活動を組織することは可能である。例えば、[1] 長さ 1cm の線分と長さ a cm の線分から長さ \sqrt{a} cm の線分を作図する問題と、[2] 長さ 10mm の線分と長さ b mm の線分から長さ \sqrt{b} mm の線分を作図する問題(ただし、 a cm = b mm とする)を対比させる活動が考えられる。物理的には同じ状況が与えられているが、測定単位による結論の違いを実感しやすい。結果的に、教科書例題における 1 の役割の大きさを実感することに繋がるであろう。

(3) 比例 (中学 1 年, 中学 3 年, 高校数学 I)

① 数学的分析

第三の教材は、比例である。比例は、小学 5 年で初めて学んだ後、中学 1 年でも改めて学習し直す。この等式に潜む「当たり前」の 1 つを相対化していこう。「なぜ疑問」の作法に則って、次のように問うてみたい。

なぜ中学校での比例の定義は、「 x が 2 倍, 3 倍, …… , になると, それにともなって y も 2 倍, 3 倍, …… , になるとき, y は x に比例するという」ではなく、「 y が x の関数で, $y = ax$ (ただし, a は定数) で表されるとき, y は x に比例するという」なのか?

前者が小学校での定義で、後者が中学校での定義である。素朴には、小学校での定義の方がわかりやすいように思われるが、わざわざ中学校で定義を改める理由は何か?

前節で議論した「教材の系統性」の観点でこの問いに 1 つの答えを与えるとすれば、変域の問題である。この点について、半田 (2005) は次のように述べている。

負でない有理数の上での関数ならば、 n は自然数で $f(nx) = nf(x)$ という仮定から $y = ax$ となることが導ける。逆に、 $y = ax$ を仮定して $f(nx) = nf(x)$ が導ける。ところが有理数全体の上では、後者は成立するが前者は成立しない。したがって、小学校流の定義では、中学校の数の範囲では通用しなくなる。
(p. 10)

ここで、 $f(nx) = nf(x)$ は、 x が n 倍されると、 y もまた n 倍されることを意味しており、小学校流の定義のことを指している。つまり、小学校流の定義と中学校流の定義は、負の数を変域に加えると同値ではなくなるのである。

半田 (2005) は証明を与えていないので、本稿ではこれを補っておこう。まずは x の変域を負でない有理数とし、「任意の自然数 n について $f(nx) = nf(x)$ 」と「 $f(x) = ax$ 」の同値性を示そう。

[証明]

「任意の自然数 n について $f(nx) = nf(x)$ 」を仮定する。 $x = 0, \frac{1}{p}, \frac{q}{p}$ (ただし、 p, q は自然数) の場合に分けて考える。

この仮定において $x = 0$ のときを考えると、

$$f(0) = nf(0)$$

より、

$$f(0) = 0 = ax$$

である。

ここで $a = f(1)$ と置き、仮定において $x = \frac{1}{p}$ (ただし、 p は自然数)、 $n = p$ のときを考えると、

$$pf(x) = pf\left(\frac{1}{p}\right) = f\left(\frac{p}{p}\right) = f(1) = a$$

であり、

$$f(x) = f\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{a}{p} = ax$$

である。

また、仮定において $x = \frac{q}{p}$, $n = pq$ (ただし, p, q は自然数, $q \neq 1$) のときを考えると,

$$f(x) = f\left(\frac{q}{p}\right) = qf\left(\frac{1}{p}\right) = q \cdot \frac{a}{p} = ax$$

である。

以上より, x の値に関わらず $f(x) = ax$ である。

逆に, $f(x) = ax$ のときは, $f(nx) = nf(x)$ が成り立つことは明らかである。

次に, まずは x の変域を有理数としよう。このときは, 「任意の自然数 n について $f(nx) = nf(x)$ 」ならば「 $f(x) = ax$ 」に反例 $f(x) = |x|$ が存在する。

【証明】

$$f(nx) = |nx| = n|x|$$

$$nf(x) = n|x|$$

よって, $f(x) = |x|$ は, $f(x) = ax$ でないにも関わらず, 前件を満たす。

要するに, 「 x が 2 倍, 3 倍, …… , になると, それにともなって y も 2 倍, 3 倍, …… , になるとき, y は x に比例するという」という横向きに見る定義の仕方は, 原点をまたいでも変化の割合が一定であることを保証する規定になっていないのである。例えば, 図 6 のようなグラフも, $f(x) = |x|$ と同様の反例である。小学校では

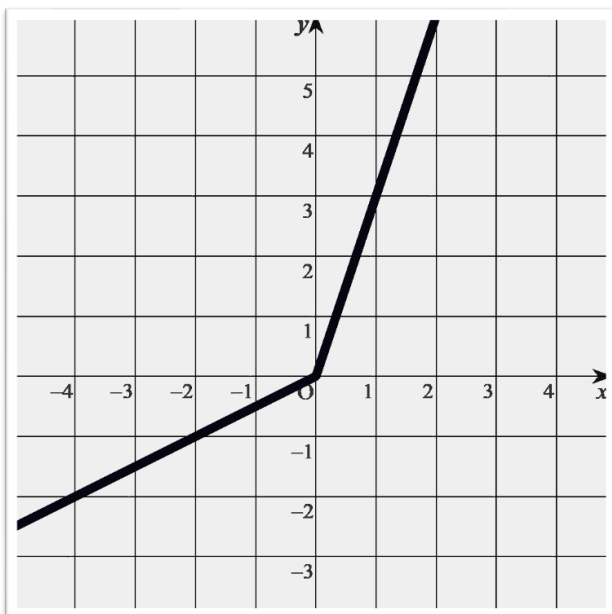


図 6: 変化の割合が一定でないにも関わらず, 小学校流の定義が当てはまる関数のグラフ

x と y が伴って変化するということを重視しながらも, 中学校ではきちんと変化の割合が一定であるということを押さえないならば, このように再定義するしかないのである。

変域という観点では, 上記のような純粋数学的な理由のみならず, 現実と数学の関係性を考える場合でも, 小学校流の定義では問題が生じる。例えば, 次のような場面を考えよう。

- [1] 1 個 200 円のりんごを x 個買うと, 代金は合計 y 円になります。
- [2] 容積 300L の空の浴槽に, 毎分 15L の割合でお湯を注ぐと, x 分後に溜まっているお湯は y L になります。

[1] をグラフにすると, 図 7 のようになる。変域が非負整数であり, グラフは視覚的には直線にならない。そのため, 「 x が 2 倍, 3 倍, …… , になると, それにともなって y も 2 倍, 3 倍, …… , になる」は満たすかもしれないが, ここから自然と期待される「 x が $\frac{1}{2}$ 倍, $\frac{1}{3}$ 倍, …

… , になると, それにともなって y も $\frac{1}{2}$ 倍, $\frac{1}{3}$ 倍, …… , になる」は議論ができない。しかし, だからといって, [1] のような関係を比例と呼ばないのは不自然である。この場合も, あくまでもその定義域において変化の割合は一定であり, $y = ax$ で表すことのできる関数なのである。

[2] をグラフにするにあたっては, 変域をどのように考えるかによって話が変わってしまう。 x の変域を 0 以

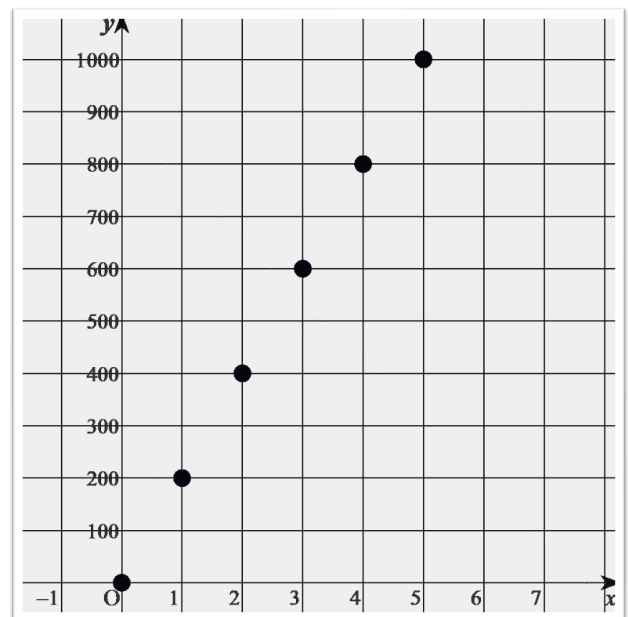


図 7: グラフが直線にはならないが比例

上で浴槽が満タンになるまでと捉えるならば、その間においては y は x に比例していると言いたくなる。しかし、 x の変域に限りがある場合においては、「 x が 2 倍、3 倍、……、になると、それにともなって y も 2 倍、3 倍、……、になる」という横向きの見方ができなくなる。なぜなら、「 x が 2 倍、3 倍、……、になる」とき、 x の変域を超えてしまうかもしれないからである。このような場合においても確かに比例関係であると言えるようにするためには、定義おきにおけるすべての x, y が関係 $y = ax$ を満たすかどうかで判断する中学校の定義が有用なのである。

なお、[2] をグラフにするにあたっては、図 8 のように、 x が 0 未満の場合や、浴槽が溢れた後も考えることもできる。この場合は、もちろん比例関係ではなくなる。これは、現実的な問題場面を数学的に解釈するにあたって、関数の定義域をどのように設定するかという問題である。

一般に、集合 X の各元 x に集合 Y の 1 つの元 y を対応させる規則を X から Y への写像という。そしてこのとき、 X を始集合、 Y を終集合という。中学校の関数の定義では意識しにくいことではあるが、本来、始集合と終集合の存在が、関数 (写像) の定義に先立って要請される。その意味で、小学校流の定義にせよ中学校流の定義にせよ、微妙な例が比例かどうかを判定するためには、より高次の数学を参照して考える必要がある。

② 数学的価値と数学教育的価値の導出

上述の考察から、比例の定義を中学校で更新することの数学的価値と数学教育的価値を引き出そう。ここでの

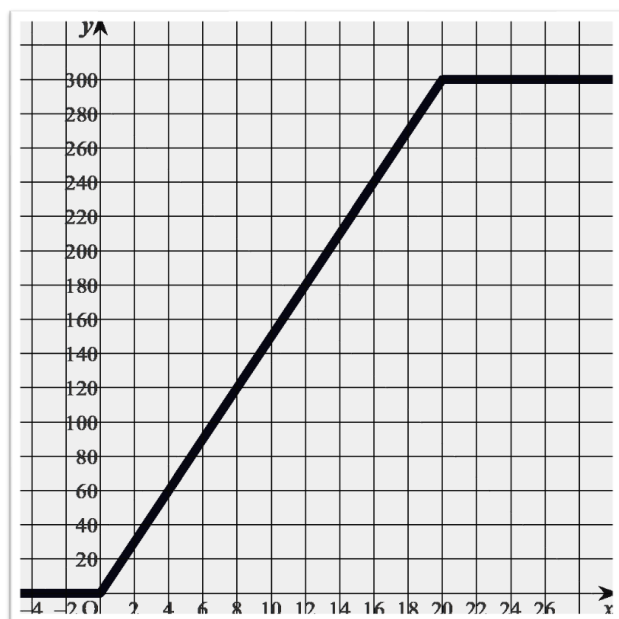


図 8: 定義域によって比例かどうかが変わる例

数学的価値は、より微妙な例を扱えるようになることである。厳密に数学的に定義することの価値は、ここにある。そして、そうであるからこそ、ユークリッドの『原論』以来、数学は理性的な思考法の模範となってきたのである (中村, 1971)。

そこで、このことから、この比例の定義に関する数学教育的価値を考えていこう。大局的には、最も厳密な定義に最も価値があるのであって、教師にとっては $y = ax$ という関係によって比例を定義することが、「数学としての当たり前」である。しかし、それは、比例に限定されない様々な関数について学んだ後だからこそ見える当たり前である。特に、 x と y の関係が、変化の割合が一定で原点を通る直線で表現できることの価値は、微積分まで学習するからこそ、より一層深く感じられるものなのであって、初めて比例を学ぶときに感じられるものではない。したがって、適切な理由 (Harel (2013) の用語に従えば「知的必要性」) を欠いたままでは、生徒達はわざわざ比例の定義を改める価値を感じることはできないと思われる。これが、生徒達にとっての「生活経験における当たり前」である可能性がある。

そのため、指導上の留意点として、中学校段階で定義を更新するにあたっては、定義を更新する価値を実感しやすくするために、適宜授業でより微妙な例を取り扱うべきであるということが提言できよう。小学校段階では、明らかに比例である関係と、明らかに比例でない関係を弁別できればそれでよいかもしれないが、中学校段階で微妙な例を取り扱わなかったとしたら、生徒達は定義を更新する価値を見いだせないどころか、本来であれば中学校段階で指導したい新しい定義を身につけることができないかもしれない。先に挙げた浴槽の例 (図 8) のような日常的な題材でも、小学校流の定義では弁別が難しい例を構築することは可能なので、積極的に授業での取り扱いを検討したいところである。ただし、中学 1 年の比例の定義が登場する瞬間にこれを扱うか、中学 3 年でいろいろな事象と関数を学ぶ際に扱うかは、生徒達の実態に応じた判断が必要である。

本稿ではもう 1 つ、高校段階における留意点も取り上げておきたい。ある概念の学習は、定義の理解とともに完了するわけではない。新しい場面でその概念に出くわす度に、その概念の新しい側面が学習されると考えれば、その概念の学習は決して完結することはない (Uegatani & Otani, 2021)。この観点に立てば、上で述べた微積分まで学習したからこそ比例の価値がより一層深く理解できるという点も、比例についての重要な学習である。この視点に立つとき、数学 III の微積分とまで言わずとも、例えば数学 I においても比例の学びを深める機会がある。

それがまさに、絶対値関数のように、原点をまたいで変化の割合が変化する関数である。絶対値関数は、部分的に比例の性質を持つからこそ、変域によって場合分けした対応がしばしば有効である。絶対値関数に場合分けでアプローチしていくということは、常識的に見れば絶対値関数の学習であると思われるかもしれないが、それだけではない。これは、比例に帰着できるように場合分けをするという、比例についての新しい学習場面でもあるのである。我々は、絶対値関数という新しい概念の学習ばかりに目を奪われずに、比例という既知の概念の深化という視点も大切にしながら、指導にあたるべきである。我々が有する教師にとっての「数学としての当たり前」は、こうした経験の積み重ねの上にある。

4. おわりに

本稿では、中学校・高等学校の数学の教科書上の「当たり前」に目を向け、その点を相対化していく教材論を展開した。推論主義の哲学を理論的視座とし、「なぜ疑問」の作法に則って、多項式の展開公式・ \sqrt{a} の長さの線分の作図・比例の定義の3教材に対してそれぞれ問いを立て、教材の系統性の観点からあり得る1つの回答を提案した。

結果、3教材のいずれについても、大局的な視点（教師にとっての「数学としての当たり前」）と局所的な視点（生徒達にとっての「生活経験としての当たり前」）のズレを論じることができた。具体的に、多項式の展開については、 $(a+b)^2$ の展開公式に着目し、生徒達の目から見て、 $a^2+2ab+b^2$ と a^2+b^2+2ab のどちらの順番で書いても拡張の方向性として遜色なく見え得ることを指摘した。 \sqrt{a} の長さの線分の作図については、長さ a の線分のみならず長さ1の線分が与えられる数学的価値が、生徒達の目からは見えない可能性を指摘した。比例の定義については、小学校流の定義から中学校流の定義に更新する必要性が生徒達には感じづらい可能性を指摘した。我々数学教師も、高次の数学を学ぶ過程で徐々に「数学としての当たり前」を獲得したのであって、一朝一夕でその段階へとたどり着いたわけではない。そのため、短期的には、生徒達にとっての「生活経験としての当たり前」に配慮した授業設計が重要である。しかし、そうはいっても、中長期的には教材の系統性を大切にしたい指導をしなければ、生徒達が我々と同じ「数学としての当たり前」にたどり着くことができなくなってしまう。数学の教師は、日々目の前の生徒達の様子を注意深く観察しながら、教師にとっての「数学としての当たり前」と生徒達にとっての「生活経験としての当たり前」のズレの調整をしなければならないのである。

今後の課題は2つある。1つは、他の教材でも同様の

「当たり前」の相対化を実施することである。もう1つは、本稿のそもそもの執筆動機に立ち返り、教材を核にした論文の価値を再考することである。本稿が読者の期待に添う紀要論文になることを願うばかりである。

注

- 1) 例外は、2023年10月の通知の際であり、僅差ではあったが、この1回だけ、筆者の学位論文のダウンロード数が1位となった。正確な理由はわからないが、2023年6月に筆者は科学基礎論学会という初参加する学会でシンポジストをさせていただく機会に恵まれ、一時的に筆者の人となりに関心が集まったからではないかと推察している。2023年1月の通知は、上ヶ谷・石橋・迫田(2020)がやはりまた1位に返り咲いた。

付記

本研究は JSPS 科研費 21K13587 の助成を受けて実施された。

謝辞

本稿の教材論は、筆者が、岡山大学 学術研究院教育学域 講師 石橋 一昂氏に、同大学の学部生向けの講義のゲスト・ティーチャーとしてお招きいただいた際の講義内容を発展させたものである。同氏のお力添えがあったからこそ、この教材論は世に出る機会を得ることができた。同氏にはこの場を借りて御礼申し上げる。

参考文献

- Bakker, A., & Derry, J. (2011). Lessons from Inferentialism for Statistics Education. *Mathematical Thinking and Learning*, 13(1-2), 5-26. <https://doi.org/10.1080/10986065.2011.538293>
- Bakker, A., & Hußmann, S. (2017). Inferentialism in mathematics education: Introduction to a special issue. *Mathematics Education Research Journal*, 29(4), 395-401. <https://doi.org/10.1007/s13394-017-0224-4>
- Brandom, R. (1994). *Making it Explicit: Reasoning, Representing, and Discursive Commitment*. Harvard University Press.
- Brandom, R. (2000). *Articulating reasons: An introduction to inferentialism*. Harvard University Press.
- Confrey, J. (1991). Learning to Listen: A Student's Understanding of Powers of Ten. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education* (pp. 111-138). Kluwer Academic Publishers.
- Derry, J. (2008). Abstract rationality in education: From

- Vygotsky to Brandom. *Studies in Philosophy and Education*, 27(1), 49–62. <https://doi.org/10.1007/s11217-007-9047-1>
- Derry, J. (2013a). Can Inferentialism Contribute to Social Epistemology? *Journal of Philosophy of Education*, 47(2), 222–235. <https://doi.org/10.1111/1467-9752.12032>
- Derry, J. (2013b). *Vygotsky: Philosophy and Education*. John Wiley & Sons.
- Ely, R. (2010). Nonstandard student conceptions about infinitesimals. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 117–146.
- 半田進. (2005). 「比例の定義の違いと指導の重点」. 教科情報誌『教室の窓 小学校算数・中学校数学』, 4, 10–11.
- Harel, G. (2013). Intellectual Need. In K. R. Leatham (Ed.), *Vital Directions for Mathematics Education Research* (pp. 119–151). Springer New York. http://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4614-6977-3_4
- 服部裕一郎・上ヶ谷友佑. (2020). 「数学的活動を真正にするためのユーモアの認知的役割—多角形の内角の和の求め方の拡張に注目して—」. 日本科学教育学会誌『科学教育研究』, 44(4), 261–270. <https://doi.org/10.14935/jssej.44.261>
- Hayata, T., Hakamata, R., & Uegatani, Y. (2018). Can Students Construct Non-Constructive Reasoning?: Identifying Fundamental Situations for Proof by Contradiction. *Proceedings of the 42th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 3, 43–50.
- 石橋一昂・上ヶ谷友佑 (2019). 「数学的モデル化の観点から見た学習者の解の吟味を支援する教材の条件：方程式の文章題を中学2年生が解決する過程の分析を通じて」. 日本科学教育学会誌『科学教育研究』, 43(4), 333–344. <https://doi.org/10.14935/jssej.43.333>
- Ishibashi, I., & Uegatani, Y. (2022). Cultural relevance of validation during mathematical modeling and word problem-solving: Reconceptualizing validation as an integration of possible fictional worlds. *The Journal of Mathematical Behavior*, 66, 100934. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100934>
- 中村幸四郎 (1971). 「『原論』の解説」. 中村幸四郎・寺阪英孝・伊東俊太郎・池田美恵 (編), 『ユークリッド原論』 (pp. 489–522). 共立出版.
- Nesher, P. (1987). Towards an instructional theory: The role of student's misconceptions. *For the Learning of Mathematics*, 7(3), 33–40.
- Nilsson, P. (2020). A Framework for Investigating Qualities of Procedural and Conceptual Knowledge in Mathematics—An Inferentialist Perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 51(5), 574–599. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc-2020-0167>
- Roth, W.-M. (2016). On the social nature of mathematical reasoning. *For the Learning of Mathematics*, 36(2), 34–39.
- 上ヶ谷友佑 (2017). 『真正な数学的活動を実現するための哲学に関する研究』 [未公刊, 学位論文, 広島大学]. <http://ir.lib.hiroshima-u.ac.jp/00043542>
- 上ヶ谷友佑 (2020). 数学の授業における多様性伝達アプローチ: 実践から理論への接続. 広島大学附属福山中・高等学校『中等教育研究紀要』, 60, 162–167. <https://doi.org/10.15027/49292>
- 上ヶ谷友佑 (2021a). 「なぜ科学教育研究をするのか?: 中学校・高等学校の数学教師の視点から」. 2021 年度第 2 回日本科学教育学会研究会 若手活性化委員会 チュートリアル発表資料, 1–18. <https://ir.lib.hiroshima-u.ac.jp/00051589>
- 上ヶ谷友佑 (2021b). 「数学科教師の職能成長 Q58, Q59, Q60」. 磯田正美・影山和也 (編), 『新・教職課程演習 第 19 巻 中等数学科教育』 (pp. 193–201). 共同出版.
- 上ヶ谷友佑 (2022). 「数学の大学入試問題と構成主義における概念的学習」. 日本科学教育学会誌『科学教育研究』, 46(3), 271–274. <https://doi.org/10.14935/jssej.46.271>
- 上ヶ谷友佑. (2023a). 「2 年 A 数と式の教材研究」. 『数学教育』編集部 (編), 『教材研究×数学 中学校 図解 & 実例でしっかりわかる超実践ガイド』 (pp. 126–131).
- 上ヶ谷友佑 (2023b). 「最新! 1 人 1 台端末活用ネタ Collection 高等学校 数学II」. 『教育科学 数学教育 2023 年 12 月号』 (pp. 88–91). 明治図書出版.
- Uegatani, Y., Ishibashi, I., & Hattori, Y. (2020). Role of probability in socio-critical modelling. *JSSE Research Report*, 35(3), 43–48. https://doi.org/10.14935/jssej.35.3_43
- 上ヶ谷友佑・石橋一昂・迫田彩 (2020). 「学校数学における「根元事象」と「同様に確からしい」の概念規定」. 全国数学教育学会 第 53 回研究発表会 発表資料.
- Uegatani, Y., & Otani, H. (2021). A new ontology of reasons for inferentialism: Redefining the notion of conceptualization and proposing an observer effect on

- assessment. *Mathematics Education Research Journal*, 33, 183–199. <https://doi.org/10.1007/s13394-019-00289-8>
- Uegatani, Y., & Otani, H. (2023). An inferentialist view of notions and concepts. *For the Learning of Mathematics*, 43(3), 2–6.
- Uegatani, Y., Otani, H., Shirakawa, S., & Ito, R. (2023). Real and illusionary difficulties in conceptual learning in mathematics: Comparison between constructivist and inferentialist perspectives. *Mathematics Education Research Journal*. <https://doi.org/10.1007/s13394-023-00478-6>
- Van Dooren, W., Lem, S., De Wortelaer, H., & Verschaffel, L. (2019). Improving realistic word problem solving by using humor. *The Journal of Mathematical Behavior*, 53, 96–104. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2018.06.008>
- ファン・フラーセン, B. C. (1986). 『科学的世界像』(丹治信春 訳). 紀伊國屋書店.