広島大学教育学部紀要　第二部　第48号　1999

「総合的な学習」と算数・数学科における学習との関係

－算数・数学科の相補的な二面性－

小　山　正　孝

(1999年9月30日受理)

Relationship between "Integrated Learning" and School Mathematics Learning:
Complemental and Dual Aspects of School Mathematics

Masataka Koyama

The purpose of this paper is to make clear the relationship between "integrated learning" and school mathematics learning. First, the aims and activities of "integrated learning" are summarized. Second, a vision of school mathematics based on the revised course of study is given. Then, as a result of the investigation from the view point of school mathematics, a theoretical model is presented in order to make clear the relationship between "integrated learning" and school mathematics learning. The key characteristics of this model are complemental and dual aspects of school mathematics, i.e. "real world and mathematical world" and "social aspect and personal aspect". Finally, three concrete examples are given in order to show the similarity and peculiarity of school mathematics learning in comparison with the "integrated learning".

0．はじめに

平成10年7月29日に、教育課程審議会から文部大臣に「教育課程の基準の改善について」の答申がなされた。それは、「ゆとり」の中で「特色ある教育」を展開し、児童生徒に自ら学び自ら考える［生きる力］をはぐくむことを、改善の基本的視点としている。[1)]そして、教育制度改革としての平成14年度からの完全学校週5日制の導入と、上記のねらいを実現するために、教育内容の大胆な厳選を求めている。

このような趣旨の「答申」を受けて、小・中・高等学校の学習指導要領の改訂の作業が急ピッチで進められて、平成10年12月14日に小・中学校の新学習指導要領が告示され、平成11年3月29日には高等学校の新学習指導要領が告示された。[1)]これらの新学習指導要領は「ゆとりと生きる力」というような言葉で特色づけられるであろう。

さて、こうした今次の教育課程審議会の答申及び新学習指導要領の1つの特色は、小・中学校においては各教科、道徳及び特別活動の3領域とは別に、高等学校においては各教科・科目と特別活動とは別に、「総合的な学習の時間」を創設し、教科等の枠を超えた横断的・総合的な学習（以下、「総合的な学習」と称する）をより円滑に実施するための時間を確保するということである。実際、総合的な学習の年間標準授業時数は、小学校においては第3学年と第4学年で各々105単位時間、第5学年と第6学年で各々110単位時間、中学校においては第1学年で70～100単位時間、第2学年で70～105単位時間、第3学年で70～130単位時間、そして高等学校においては卒業までに105～210単位時間が標準となっている。

一方、算数・数学科の年間標準授業時数（単位数）をみてみると、小学校においては第1学年で114単位時間、第2学年で155単位時間、第3学年から第6学年まで各々150単位時間、中学校においては第1学年から第3学年まで各々105単位時間、そして高等学校においては数学基礎（2単位)、数学Ⅰ（3単位)、数学Ⅱ（4単位)、数学Ⅲ（3単位)、数学A（2単位)、数学B（2単位)、数学C（2単位）のうち、数学基礎及び数学Ⅰのうちから1科目が必履修となっている。これらを現行のものと比較すると、小学校6年間で算数科は142単位時間の減、中学校3年間で数学科は70

単位時間の減、高等学校では数学科の必履修が１～２単位の減となる。このような算数・数学科の授業時間数（単位数）の縮減に加えて、算数・数学科における学習に「ゆとり」をもたせるために、その指導内容も大幅に削減（軽減、移行、削除）されている。

このような変更を受けて、現在では総合的な学習に対する関心が急速に高まり、様々な論議や取り組みがなされている。また、それとともに、総合的な学習と各教科の学習との関わりが問われている。そこで本稿では、算数・数学教育の立場から、総合的な学習と算数・数学科における学習との関係について考察することとする。

そのために以下では、まず、総合的な学習の創設の趣旨、ねらい及び学習活動等を整理することによって、総合的な学習とは何かを捉える。次に、算数・数学科における学習の在り方について考察する。そして、これらのことを踏まえて、総合的な学習との関連から算数・数学科の特徴を明らかにし、算数・数学教育の立場から総合的な学習と算数・数学科における学習との関係を捉えるための１つのモデルを提案する。最後に、算数・数学科における学習は総合的な学習と無関係ではないが、総合的な学習に完全に取り込まれるものでもないということを、３つの具体例をあげることによって、より明確にする。

１．総合的な学習とは何か

総合的な学習と算数・数学科における学習との関係について考察するためにはまず、総合的な学習とは何かをある程度明確に把握しておく必要がある。教育課程審議会の「答申」には、総合的な学習の時間を創設する趣旨とそのねらいや学習活動等について述べられている。その要点を整理すると、以下のようになる。

［創設の趣旨］

1　各学校が地域や学校の実態等に応じて創意工夫を生かして特色ある教育活動を展開できるようにする。

2　自ら学び自ら考える力などの［生きる力］は全人的な力であることを踏まえ、社会の変化に主体的に対応できる資質や能力を育成するために教科等の枠を超えた横断的・総合的な学習をより円滑に実施する。

［ねらい］

1　各学校の創意工夫を生かした横断的・総合的な学習、

2　児童生徒の興味・関心等に基づく学習などを通じて、

①自ら課題を見つけ、自ら学び、自ら考え、主体的に判断し、よりよく問題を解決する資質や能力を育てる。

②情報の集め方、調べ方、まとめ方、報告や発表・討論の仕方などの学び方やものの考え方を身に付ける。

③問題の解決や探求活動に主体的、創造的に取り組む態度を育成する。

④自己の生き方についての自覚を深める。

［学習活動等］

1　例えば、次のような課題などについて、適宜学習課題や活動を設定して展開するようにする。

①国際理解、情報、環境、福祉・健康などの横断的・総合的課題

②児童生徒の興味・関心に基づく課題

③地域や学校の特色に応じた課題

2　体験的な学習、問題解決的な学習を展開する。

3　展開するに当たっては、次の点を考慮する。

①時間が弾力的に設定できるようにする。

②多様な学習形態や指導体制を工夫する。

③校内にとどまらず地域の豊かな教材や学習環境を積極的に活用する。

4　試験の成績によって数値的に評価することはせず、児童生徒のよい点、学習に対する意欲や態度、進歩の状況などを踏まえて適切に評価する。

以上のような諸点を総括して、梶田[2)]は、総合的な学習のポイントを次のように述べている。

《「総合的な学習」の基本ポイントは、〈３つの大切〉〈４つの工夫〉〈２つの力〉となる。〈３つの大切〉とは、「課題」「体験」「自ら」を必須の要素として持っていなくてはならない、ということである。〈４つの工夫〉とは、「時間（柔軟な設定）」「人（指導者）」「場」「形態」の面で工夫しなくてはならない、ということである。〈２つの力〉とは、単なる思い出やその場限りの満足感が残るだけでなく、「自己学習力（課題に自分の力で取り組み解決していく力）」と「創造的主体的な生き方の基礎」といった重要な育ちが実現しなくてはならない、ということである。》（p.7）

これらの基本ポイントは、総合的な学習を展開する際に設定するいろいろな学習課題や活動に共通するものであり、必須の要素や工夫すべき側面及び実現すべき力を端的にまとめたものである、と言えよう。総合的な学習についてはこの他にも種々の捉え方があるが、本稿ではこの梶田の捉え方をもとに、以下の考察を進める。

2．算数・数学科における学習の在り方

上述のような総合的な学習と算数・数学科における学習との関係について考える際には、算数・数学科でどのような内容が削減（軽減、移行、削除）されるかという点だけでなく、現行の教育課程実施上の現状と課題についてどのような認識がなされているかについても注目する必要があろう。なぜなら、この現状や課題の認識は、なぜ、何のために算数・数学科の内容を削減するのかという根本的な問題に関わることであり、新教育課程における算数・数学科の在り方を方向づけるのに決定的な役割を果たしていると考えられるからである。

2．1　現状と課題の認識

平成10年７月29日の教育課程審議会の「答申」では、現行の教育課程実施上の現状や課題について次のような認識が示されている。

［現状］

文部省やIEAの調査結果などを総合的にみると、現行の教育課程の下における我が国の子どもたちの学習状況はおおむね良好であると言える。

［課題］

①過度の受験競争の影響もあり多くの知識を詰め込む授業になっている。

②時間的にゆとりをもって学習できずに教育内容を十分に理解できない子どもたちが少なくない。

③学習が受け身で覚えることは得意だが、自ら調べ判断し、自分なりの考えをもちそれを表現する力が十分育っていない。

④一つの正答を求めることはできても多角的なものの見方や考え方が十分ではない。

⑤算数・数学や理科の学習について国際比較すると、得点は高いものの、積極的に学習しようとする意欲等が諸外国に比べて高くはない。

2．2　算数・数学科における学習の目標

このような現状と課題の認識は、もちろん算数・数学科だけに関わるものではないが、これからの算数・数学科における学習の在り方を方向づけることになる。「子どもたちの学習状況はおおむね良好である」との現状認識がされていることから判断して、現行のいわゆる「新しい学力観」に立った算数・数学科の目標はこれからも保持されるであろう。そして、特に［課題］④の認識のもとに、算数・数学科でも多角的な見方や考え方のような創造性に関する目標が明示的に盛り込まれるであろう、と予想された。

実際には、平成10年12月14日に告示された小・中学校の新学習指導要領と平成11年３月29日に告示された高等学校の新学習指導要領においては、算数・数学科の新しい目標がそれぞれ次のように述べられている。

［小学校算数科の目標］

《数量や図形についての算数的活動を通して、基礎的な知識と技能を身に付け、日常の事象について見通しをもち筋道を立てて考える能力を育てるとともに、活動の楽しさや数理的な処理のよさに気付き、進んで生活に生かそうとする態度を育てる。》

［中学校数学科の目標］

《数量、図形などに関する基礎的な概念や原理・法則の理解を深め、数学的な表現や処理の仕方を習得し、事象を数理的に考察する能力を高めるとともに、数学的活動の楽しさ、数理的な見方や考え方のよさを知り、それらを進んで活用する態度を育てる。》

［高等学校数学科の目標］

《数学における基本的な概念や原理・法則の理解を深め、事象を数学的に考察し処理する能力を高め、数学的活動を通して創造性の基礎を培うとともに、数学的な見方や考え方のよさを認識し、それらを積極的に活用する態度を育てる。》

これらの算数・数学科の新しい目標を現行のそれと比較してみると、まず第一に、現行の「新しい学力観」に立った算数・数学科の目標に、「算数的活動を通して」、「活動の楽しさ」、「数学的活動の楽しさ」という文言が新たに加えられていることがわかる。このことは、算数・数学科の新しい目標が、現行のそれを基調としつつ「算数的（数学的）活動とその楽しさ」を重視しようとするものである、と捉えられる。第二に、小・中学校の算数・数学科の目標には創造性ということが明記されていないが、高等学校のそれには「創造性の基礎を培う」ことが明記されているということである。この点については多少の不満が残る。なぜなら、創造性の基礎を培うことは小・中学校の算数・数学科においても目標とすべきであるし、その実現可能性はあると考えるからである。[3)]小・中学校の算数・数学科の目標の中には「創造性の基礎を培う」ことが明記されてはいないが、多角的な見方や考え方の育成のような創造性に関することもねらっていると捉えたい。

いずれにしても、上記の［課題］①から⑤のような認識のもとに、完全学校週５日制の実施に伴う授業時数の縮減分以上に算数・数学科の内容を削減することで、時間的なゆとりを生み出し、そのゆとりを上述のねらいをもった総合的な学習の時間を創設したり、算数・数学科を改善したりするために生かそうとしてい

ることは間違いあるまい。と言うのは、後者の算数・数学科の改善に時間的なゆとりを生かすことについては、算数・数学科の内容の十分な理解、主体的・創造的な学習、さらには学ぶことの楽しさや充実感の感得のために生かそうという基本方針が「答申」の中で示されているからである。

このようなグローバルな視座から今後の算数・数学科における学習の在り方について考えなければならない。なぜなら、もしもそのような視座に立たずに《特に、小学校での教育が以後の学習の基礎となることから、基礎的・基本的な知識と技能については繰り返し学習し確実に身に付けられるようにする》という改善の具体的事項に関する記述が読まれるならば、時間的なゆとりを計算ドリルにあてよう、というような望ましくない捉え方をされる危険性が全くないとは言えないからである。

おそらく、これほどまでに極端な捉え方はされないであろう。しかしながら、算数・数学科の内容が大幅に削減されれば、教えるべき内容が少なくなるから算数・数学科の指導は「楽に」なる、と考えられたとしたら、それもまた大変な問題である。何のための削減か、また、何のためのゆとりか。このことを真剣に考えなければ、算数・数学科の前途は危うい。

平成14年度から全面実施される予定の小・中学校の新学習指導要領及び平成15年度から学年進行で実施される予定の高等学校の新学習指導要領に基づく算数・数学教育には、その後の我が国の学校教育における算数・数学教育の生き残りがかかっていると言っても過言ではない。算数・数学教育が生き残るためには、我々算数・数学教育に携わる者が、現実を直視し、これからの21世紀に生きる児童生徒とって何が重要かを真剣に考え、意思決定し、実践しなければならない。今、まさに、我々算数・数学教育に携わる者の問題解決能力が問われているのである。

3．総合的な学習と算数・数学科における学習との関係

3．1　算数・数学科の相補的な二面性

そこで、以下では総合的な学習との関連から算数・数学科の特徴を明らかにしてみたい。

まず、総合的な学習のねらいに注目してみよう。そのねらいは、すでに整理して述べたように、よりよく問題を解決する資質や能力、学び方やものの考え方、主体的・創造的に取り組む態度の育成及び自己の生き方についての自覚を深めることである。これらのねらいは算数・数学科の目標と密につながるものであるから、総合的な学習と算数・数学科とはねらい（目標）において密接に関係していると言える。

次に、総合的な学習の学習活動、特にそこでの学習課題に注目してみよう。総合的な学習での学習課題は、各学校の創意工夫を生かした横断的・総合的な課題（国際理解、情報、環境、福祉・健康などの社会的要請による課題と地域や学校の特色に応じた課題）と児童生徒の興味・関心に基づく課題との2つに便宜上分けられる。これらは両方とも「現実の世界」に関わるものであるが、特に、前者は「社会」との関わりを重視しているのに対して、後者は「個人」との関わりを重視していると捉えられる。いずれにしても、このような学習課題を設定して展開するところに、ある意味では算数・数学科における学習とは異なった、総合的な学習の特徴があると言える。つまり、総合的な学習での学習課題は、はじめに教科ありきという発想で設定されるものではないからである。

しかし、算数・数学科も「現実の世界 ⊲—⊳ 社会」の課題や「現実の世界 ⊲—⊳ 個人」の課題と全く無縁ではない。確かに、算数・数学科は、内容の系統性や抽象性・一般性にその特徴がある。しかしながら、算数・数学科は「現実の世界」と「数学の世界」との間に位置し、「現実の世界」の問題を理想化・単純化して「数学の世界」の数学的な知識・技能、表現や考え方等を活用して解決したり、逆に、「数学の世界」の数学的な知識・技能、表現や考え方を「現実の世界」の事物、操作や現象等を通して理解したりする。このように、算数・数学科は「現実の世界」と「数学の世界」の両方の世界と関連しており、総合的な学習との関係においても、算数・数学科がこの相補的な二面性を有している、ということを認識することは重要である。

さらに、算数・数学科における学習活動では、個々の児童生徒の思考活動における数学的概念、演算、関係等の構成としての「個人」的側面と、学級等の社会の成員である児童生徒間あるいは教師とのコミュニケーション活動における数学的言語や表現の活用としての「社会」的側面の両方が重要である。算数・数学教育の研究では、近年、構成主義的アプローチと社会・文化主義的アプローチの両者の相互補完性が注目されてきている。多少短絡すぎるかもしれないが、上述の前者の「個人」的側面は構成主義的アプローチに、後者の「社会」的側面は社会・文化主義的アプローチにそれぞれ対応づけることができるので、算数・数学科には「個人」と「社会」という相補的な二面性があると言ってもよいであろう。

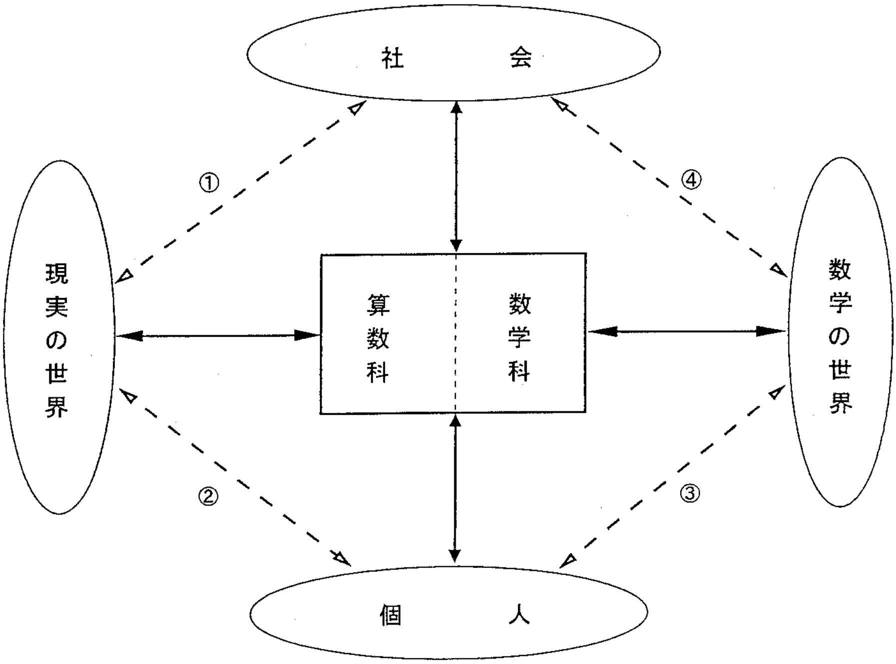

図１　「総合的な学習」と算数・数学科における学習との関係

3．2　総合的な学習と算数・数学科における学習との関係を捉えるための１つのモデル

これまで述べてきたことを整理して、算数・数学教育の立場から、総合的な学習と算数・数学科における学習との関係を図に表すと図１のようになる。[4)]

この図１では、算数・数学科を中心に据え、「現実の世界」と「数学の世界」、「社会」と「個人」を、それぞれ横軸と縦軸に配置している。そして、算数・数学科における学習と総合的な学習との関係は、①の横断的・総合的な課題による総合的な学習、②の児童生徒の興味・関心に基づく課題による総合的な学習に示されている。さらに、総合的な学習と比較したときの算数・数学科における学習の特徴は③と④の部分にあり、③は構成主義的アプローチ、④は社会・文化主義的アプローチにそれぞれ対応するものとして表現されている。

もちろん総合的な学習と算数・数学科との関係をより精緻に捉えるためには、理科、社会科、国語科等の他教科との関連も考慮しなければならない。しかし、そうすると複雑になりすぎるので、図１とその説明を、算数・数学教育の立場から、総合的な学習と算数・数学科における学習との関係を捉えるための１つのモデルとして提案したい。このモデルの鍵概念は、縦軸と横軸を成す、算数・数学科の特徴である**相補的な二面性**である。これによって、算数・数学科における学習は総合的な学習と無関係ではないが、総合的な学習に完全に取り込まれるものでもない、ということを明らかにすることができると考える。

4．算数・数学科における学習の３つの具体例

最後に、そのことを、算数・数学科における学習の３つの具体例をあげることによって、より明確にしてみたい。

4．1　コピー用紙とコピー機の数学的秘密を探る

近年のいわゆる「情報化社会」において、我々の身の回りには多くの情報が飛び交っている。それゆえ、ややもするとそれら多くの情報に惑わされがちであるが、他方では、必要な情報を入手することも比較的容易である。昔なら一字一字手で書き写していた資料を、現在ではコピー機という「魔法の機械」を使って、長い時間をかけなくてもいとも簡単にコピーすることができるようになった。

このように必要な資料のコピーを手軽に入手できることはきわめてありがたいことであるが、コピー機をはじめとする種々の機械の普及に伴って、「著作権」に関する問題が１つの大きな社会問題にもなっている。

社会科教育ではこの「著作権」に関する問題を取り

上げて授業を行うことができるであろうが、算数・数学教育ではこの問題には直接触れずに、コピー用紙やコピー機を題材にして、拡大・縮小についての授業を行うことができる。なぜならば、現実の世界の事象を理想化・単純化して数学の世界に持ち込むことが、算数・数学科の１つの重要な特徴だからである。

そこで、ここでは、コピー用紙とコピー機の数学的秘密を探ってみよう。

(1)　コピー用紙の種類とその数学的特徴

我々が日常よく使うコピー用紙は長方形をしていて、それには大きく分けてＡ列とＢ列の２種類がある。表１は、日本工業規格（JIS 規格）による紙の仕上げ寸法を表している。[5] この表１をみて、どんなことに気づくか。

表１　JIS 規格による紙の仕上げ寸法（単位mm）

Ａ　列	番	Ｂ　列
841 × 1189	0	1030 × 1456
594 × 841	1	728 × 1030
420 × 594	2	515 × 728
297 × 420	3	364 × 515
210 × 297	4	257 × 364
148 × 210	5	182 × 257
105 × 148	6	128 × 182

実際に、Ｂ４用紙とＢ５用紙の大きさや形を比べてみよう。まず、大きさについては、Ｂ４用紙はＢ５用紙よりも大きく、Ｂ４用紙１枚の大きさはＢ５用紙２枚分の大きさだということが分かる（重ねて並べる活動)。次に、形はどちらも同じ形で相似な長方形だということが分かる（重ねて折る活動)。他の用紙についてはどうだろうか。

Ａ列とＢ列の用紙に共通して言えることは、各列の種々の用紙は、番号が１つ大きくなるにつれて面積が半分の相似な長方形になる、ということである。このような数学的特徴をもったコピー用紙の横と縦の長さの比は、簡単な比例式の計算によって求められる。

(2)　コピー機の拡大・縮小機能

コピーをとるとき、文字が小さくて読みづらいから拡大したり、紙を節約するために縮小したりすることがある。最近では、コピー機もかなり進歩し、倍率をいちいち計算しなくても、自動拡大・縮小ボタンを押すだけでよいようになっている。表２には、あるコピー機の７つの定型の拡大・縮小機能をまとめてみた。ただし、表中の倍率は相似比であり、近似値にすぎない。

この表２をみて、このコピー機の定型の拡大・縮小機能を分かりやすく図に表すとしたら、どのように表されるであろうか。

表２　コピー機の定型の拡大・縮小機能ボタン

ボタン	拡大・縮小の種類	倍率(%)
①	A4 → A3　　B5 → B4	141
②	A4 → B4	122
③	B4 → A3　　B5 → A4	115
④	等　倍	100
⑤	A3 → B4　　A4 → B5	87
⑥	B4 → A4	82
⑦	A3 → A4　　B4 → B5	71

まず、この表から分かることを列挙してみよう。

- ボタン①〜③は拡大、④は等倍、⑤〜⑦は縮小の際に用いる。
- ボタン①と⑦、②と⑥、③と⑤は、それぞれ逆の操作で、これらの操作を２回続けて行うと④（等倍）を行うのと同じことになる。
- ボタン①と⑦は同列の用紙の連続番のサイズ間の拡大と縮小、②と⑥は異列の用紙の同番のサイズ間の拡大と縮小、③と⑤は異列の用紙の連続番のサイズ間の拡大と縮小である。

これらのことを図に表すと、たとえば図２のようになる。

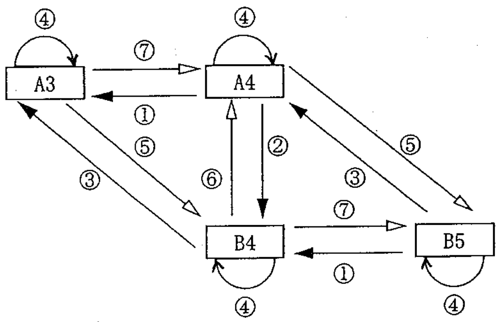

図２　コピー機の拡大・縮小機能の図表現

４．２　国際標準書籍番号（ISBN）の数学的秘密を探る

読みたい本を書店で注文するときには、多くの場合、著者名、書名、出版社名、出版年等を書いて注文する。しかし、これらをすべて書くのは大変面倒である。実は、市販の書籍には書籍の固有番号である国際標準書籍番号（International Standard Book Number、略称 ISBN）というものが付いていて、これさえ正確に書けば、日本に限らず世界中の書籍が注文できるようになっている。ここでは、この ISBN の数学的秘密を探ってみよう。

(1)　国際標準書籍番号（ISBN）に盛り込まれている情報

1968年以後に出版された書籍には、普通、10個の数

字（ただし、10番目はxの場合もある）からなるISBNと呼ばれる（コード）番号が付いている。あまり目立たないが、本をよく見ると必ず書いてある。以下に、ISBNの実例を2つあげてみよう。

例1）平林一栄著、『算数指導が楽しくなる小学校教師の数学体験』、黎明書房、1994年
ISBN　4-654-01558-2

例2）Lyn D. English, Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors, and Images, Lawrence Erlbaum Associates, 1997
ISBN　0-8058-1978-9

このISBNには、以下のように、いろいろな情報が盛り込まれている。左から1番目の数字には、その書籍が印刷された国の言語に関する情報が盛り込まれている。たとえば、上の例では、例1の1番目の数字4は日本語圏を表し、例2の0はオーストラリア、カナダ、ニュージーランド、南アフリカ、英国、アメリカ合衆国等の英語圏を表している。また、2番目以降の数字は、出版社やその書籍の照合コードを表している。たとえば、上の例では、例1の654は黎明書房、例2の8058は Lawrence Erlbaum Associates という出版社を表している。それに続く例1の01558と例2の1978は、それぞれの出版社が出版している当該の書籍の番号を表している。そして、最後の10番目の数字（文字xのときもある）は、上のような意味をもたないチェックコードと呼ばれるもので、他の9つの数字によって一意に決まる。ISBN中の4つのハイフン（－）は、そのような意味をもつ番号のまとまりを明確に区切るために用いられるものである。

(2)　国際標準書籍番号（ISBN）の数学的性質

このように種々の情報が盛り込まれているISBNには、数学的にみて興味深い性質がある。むしろ、ISBNは本来そのような数学的な性質をもつように設計されたものである、と言った方がよいかもしれない。その性質とは「自動照合性」と呼ばれるもので、ISBNをコンピュータに入力する際のある種の入力ミスを自動照合によってチェックするという働きをするのである。

こうしたことが可能なのは、次のような数学的規則によってISBNが設計されているからである。[6)]

ISBNは、a_1、a_2、a_3、a_4、a_5、a_6、a_7、a_8、a_9、a_{10}の10個の数字（0から9までの数字、ただしa_{10}だけは0から9までの数字か文字x）からできている。

このとき、各々の数字は、次のような数学的関係を満たすように選ばれる。

$$a_1+2a_2+3a_3+4a_4+5a_5+6a_6+7a_7+8a_8+9a_9+10a_{10}\equiv 0 \pmod{11}$$

ここには、我が国の高等学校までの算数・数学科では学習しない「$\equiv 0 \pmod{11}$」という記号がでてくる。しかし、それはさほど難しくはない。2で割り切れる（余りが0の）自然数を「偶数」、割り切れない（余りが1の）自然数を「奇数」と呼ぶが、ある数を2で割ったときの余りだけに着目して偶数は「$\equiv 0 \pmod 2$」、奇数は「$\equiv 1 \pmod 2$」のように表すことができる。このように、「$\equiv 0 \pmod{11}$」は記号「≡」の左辺の数（和）が11で割り切れる（余りが0）、ということを意味する。

数学では、できるだけ簡潔に書き表すために、このような記号をよく使う。ISBNの場合には、このような記号の意味が分かり、簡単なかけ算、たし算、わり算ができれば、いろいろな書籍に付けられたISBNが上のような数学的関係を満たすことを確かめることは容易である。

このような数学的規則によってISBNはできているので、左から10番目の最後の数字a_{10}は、他の9つの数字が正しく入力されているかどうかをチェックする働きをするようになっている。実際、上の一般的な関係式を変形すると、次のようになる。

$$a_1+2a_2+3a_3+4a_4+5a_5+6a_6+7a_7+8a_8+9a_9\equiv a_{10} \pmod{11}$$

ある数を11で割るとき、余りは0、1、2、3、4、5、6、7、8、9、10のいずれかであり、a_{10}はその余りを表す。ただし、余りが10のときは、2桁の数字になるので、10とはせずに文字xを使う約束になっている。

このようにISBNは数学的にも大変興味深いもので、次のような問題について考えてみることは、ISBNの数学的性質の理解をより深めることにつながるであろう。

☆　ISBNの「ふさわしい例」と「ふさわしくない例」を挙げよ。

☆　ISBNで数字の間違いがただ1箇所だけものは、それを必ず見破ることができるか。

☆　ISBNで数字の間違いが2箇所以上あるものは、それを必ず見破ることができるか。

4．3　蜜蜂の巣の数学的秘密を探る

蜜蜂が花の蜜を集めて、持ち帰って、巣に貯える姿をよく目にする。ここでは、この蜜蜂の巣を数学的にみてみよう。[7)]

(1) **蜜蜂の巣の形への着目**

蜜蜂の巣をその形に着目して見ると、図形的に実に整然とした美しい形をしている。巣室を立体的に見れば、直角柱の形をしていることが分かる。また、巣室の底面にのみ注目して見れば、(ほぼ) 正六角形をしていることも分かるであろう。このような観察によって、自然界に美しい幾何学的図形が存在することに感動する。

(2) **蜜蜂の巣の効率性**

こうした感動は大切であるが、なぜ蜜蜂の巣室の底面が正六角形なのか、という疑問をもち、それについて数学的に考えることもまた重要である。この疑問は、次のように言い換えることができる。「蜜蜂の巣は、蜜を貯えるのに最も優れた (効率的な) 形をしているか。」

このとき問題になるのは、何をもって「優れている(効率的である)」と言うか、ということである。数学的には、蜜蜂が巣室の壁をつくるときに、できるだけ少ない材料を使ってできるだけ広い巣室をつくることができれば多くの蜜を貯えることができ、その意味で、その巣は蜜を貯えるのに優れている (効率的である) と言ってよいであろう。

このような効率性の捉え方に立って数学的に問題を解決していく際には、個々の巣室の底面の形にのみ着目し、周長が一定の正多角形で面積が最大かつ平面を敷き詰めるものは何か、を数学的に明らかにすることがポイントとなる。周長が一定の正多角形で面積を大きくすることだけを考えれば、円に近づければよい。しかし、正多角形によっては平面を敷き詰めることが必ずしもできない、すなわちもう一方の条件を満たさない場合がある。平面を敷き詰めることのできる正多角形は、正三角形、正方形、正六角形である。[8] したがって、上の2つの条件を同時に満たす形は正六角形である。

このように蜜蜂の巣を数学的に見て、調べてみると、蜜蜂が数学的に最も優れた (効率的な) 巣をつくっているという事実に、改めて驚かされ感動するであろう。

5. おわりに

本稿では、今次の教育課程審議会の答申や新学習指導要領で現行の各教科や特別活動等とは別に創設された、「総合的な学習の時間」における教科等の枠を超えた横断的・総合的な学習を「総合的な学習」と呼ぶことにし、この総合的な学習と算数・数学科における学習との関係について考察した。その結果、算数・数学教育の立場から、算数・数学科の特徴を踏まえて、総合的な学習と算数・数学科における学習との関係を捉えるための1つのモデル (図1及びその説明) を提案した。このモデルの鍵概念は、「現実の世界」と「数学の世界」、「社会」と「個人」という算数・数学科の相補的な二面性である。これによって、算数・数学科における学習は総合的な学習と無関係ではないが、総合的な学習に完全に取り込まれるものでもない、ということを明らかにすることができると考える。そして、総合的な学習と算数・数学科における学習とのこのような関係をより明確にするために、コピー用紙とコピー機、国際標準書籍番号 (ISBN)、蜜蜂の巣について、合計3つの具体例をあげた。

しかしながら、算数・数学科における各領域の内容を総合する学習も含めて、本稿で指摘した算数・数学科の二面性を児童生徒の学習においてより具体化することが今後の課題として残されている。こうした課題に取り組むことによって、児童生徒にとって総合的な学習と算数・数学科における学習とが共に意義あるものになるようにしたい。

注及び引用・参考文献

1) 教育課程審議会答申及び新学習指導要領は、文部省のホームページ (http://www.monbu.go.jp/) から引用した。

2) 梶田叡一「『総合的な学習』とは何か」、広島大学附属福山中・高等学校『総合的な学習の実践と考察－総合的な学習実践事例集－』、1999、pp. 6 - 7 .

3) 小山正孝「創造性を培う数学的問題のタイプに関する研究」、全国数学教育学会誌『数学教育学研究』第4巻、1998、pp.45-51.

4) 小山正孝「算数科の相補的な二面性」、広島大学附属小学校学校教育研究会『学校教育』№976、1998、pp.18-23.

5) 西山　豊「拡大・縮小」、『数学セミナー』1989年2月号、日本評論社、pp.48-53.

6) Wood, E.F., Self-Checking Codes: An Application of Modular Arithmetic, *Mathematics Teacher,* April 1987, pp.312-316.

7) Interactive Mathematics Program, *Integrated High School Mathematics Year 2,* Key Curriculum Press, 1998.

8) コクセター著／銀林　浩訳『幾何学入門〔第二版〕』、明治図書、1965、p.65.