

# 算数科の内容を一般化した理解度や数学信念が 大学生の公式観に及ぼす影響

池田 悠真<sup>1</sup>・平見真希人<sup>1</sup>・藤木 大介  
(2023 年 2 月 2 日 受理)

## The influence of math beliefs and essential arithmetic comprehension on formula beliefs

Yuma IKEDA, Makito HIRAMI and Daisuke FUJIKI

**Abstract:** Formula belief, defined as “a way of perceiving a formula that includes feelings based on the experience of using the formula,” is a factor examined as affecting learning and performance of mathematics. However, there is room for improvement in the scales assessing formula beliefs. In study 1, the scale is shown to have four factors, adding “usefulness of formulas” to the conventional three factors of “significance of derivation,” “emphasis on memorization,” and “confusion about formulas.” As in previous findings, formula belief is influenced by learning beliefs and it influences learning strategies, which affect performance of mathematics. In study 2, the influence of university students’ essential arithmetic comprehension on their formula beliefs is investigated. Students who performed better on the essential arithmetic comprehension test had less confusion about formulas. In addition, the relationship between value perception of mathematics and formula beliefs is investigated. It is found that the factors of mathematics value perception influenced formula beliefs in various ways.

**Key words:** formula beliefs, study beliefs, math beliefs, arithmetic comprehension, grade of math

**キーワード:** 公式観, 学習観, 数学信念, 算数科の理解度, 数学科の成績

### 1. 問題と目的

学校では学習指導要領をもとに発達段階や進路に合わせた教科教育を行っている。特に算数・数学科は小学校から高等学校にかけてどの段階でも多くの授業時数を占めており、学習内容が多い。さらに、中学校や高等学校、大学の入学試験で課されることも多く、算数・数学科の得手不得手は進路選択にも大きな影響があると考えられる。

数学科の学習成績に影響を及ぼす要因については様々な研究で検討されている。その 1 つに公式観に焦点を当てたものがある。公式観を寺西(2008)は「数学の公式や定理をどのように捉えているか」、廣瀬ほか(2012)は「数学における公式や定理に関する信念」と定義した。その上で、これらの研究は数学科に限定した学習観と公式観、数学科の学習方略、成績の関連について検討した。寺西(2008)は高校生を対象に、尺度間の相関関係から数学科に対する学習観よりも公式観のほうが学習方略や成績に大きく関係することを示した。また、廣瀬ほか(2012)は学習観の「意味理解志向」が公式観の「導き方の意義」、さらに「導き方の意義」が学習方略の「要点理解方略」、そして「要点理解方略」が「数学テスト得点」へと影響しており、

<sup>1</sup> 広島大学大学院人間社会科学部研究科

学習観が公式観や学習方略を媒介して成績に影響していることを示した。

このように、公式観は数学の学習成立に重要な位置を占める。そのため、公式観をより詳細に捉えることは、数学科の授業改善や、学習者の学習過程の改善につながると考えられる。しかしながら、寺西(2008)及び廣瀬ほか(2012)で検討された公式観の因子構造には課題がある。両研究ともその因子構造を「公式の導き方」「暗記偏重」「公式への困惑」の3因子で説明できるとした。3因子の項目を比較すると、「公式の導き方」は「公式・定理は自分で証明の道筋をたどれることに意味がある」等の項目、「暗記偏重」は「公式・定理を覚えることが勉強だ」等の項目であり、これらの2因子は公式と数学科の学習とに関わる信念的なものと考えられる。それに対し「公式への困惑」は「問題を解くときに、公式・定理をどう使えばいいのか分からない」等の項目であり、この因子は学習時の公式の利用経験から得られるものであり、信念である他2因子と質が異なる。また、「公式への困惑」は公式の利用に対する負の経験であり、その対となる「公式は利用すると問題が解きやすい」等の正の経験を反映した因子がなく、現状では公式観を完全に説明できていないと考えられる。そこで本研究では公式観を「数学を学習する上での公式の意義に対する信念、及び数学の学習過程で形成された公式に対する感情」と定義し直し、公式観を「導き方の意義」「暗記偏重」因子からなる「信念公式観」と新たな因子の「公式の有用性」と「公式への困惑」因子からなる「経験公式観」の2つに分けて捉える。そのため、研究1では公式観尺度の再構成を行い、廣瀬ほか(2012)に準じて、学習観や学習方略、数学の成績との関係について検討する。

また、寺西(2008)や廣瀬ほか(2012)は、数学科の学習行動である学習方略や成績に影響するものとして学習観や公式観があると考えられることを示したが、学習観と公式観の特徴から考えると、公式観は数学科の学習観の一部であると考えられる。学習観は『学習とはどのようにして起こるのか、どうしたら学習は効果的に進むのか』という学習成立に関する『信念』(植木 2002)と定義されており、学習成立に関する領域普遍的な信念である。その中でも特に数学科に限定した学習観は数学科の学習を効果的に進めるための学習成立に関わる信念であり、数学科に限定した学習に対する信念や繰り返し問題を解く等の学習行動に関わるものである。一方、公式観は公式や定理をどのように捉えているのかに関する信念である。公式は数学科の特徴であると共に学習において欠かせない。公式をどのように身につけるのか、あるいは公式をどのように使用するのかといった公式観は数学科の学習の取り組みに影響を与える。そのため、より限定された狭い範囲における領域固有の学習観といえる。数学は様々な事象を抽象的に捉え、数理的に処理を行うものであり、定理や公式はそれを一般化したものである。その捉え方である公式観は数学の特徴である抽象性をどのように捉えられているかを反映する中心的な信念であると考えられる。そのため、公式観は数学科の学習において重要だと考えられる。しかしながら、公式観を規定する要因についてはこれまで検討されていない。公式観が数学の学習成立に重要な位置を占めていることを考えると、数学科の授業改善や、学習者の学習過程の改善のために、公式観がどのようにして形成されるかを検討する必要がある。

公式観の形成に影響を及ぼすものとしては、その前提となる経験や知識と、学習観の前提となるより一般的な信念の2つが考えられる。まず公式観の形成に影響を与える経験や知識として、算数科の内容の深い理解があげられる。公式は中学校の数学科から扱いが増えることから公式観はこの時期に形成されると考えられるため、前提の知識や経験として算数科の内容の理解度が影響すると考えられる。算数科の内容を深く理解するためには機械的に知識を獲得するだけでなく、その内容の意味を考える必要がある。特に算数科は具体的な問題を通して抽象性を学んでいるため、学習者が学習内容を一般化、抽象化を行うことが深い理解にあたりと考えられる。そのため、算数科の理解が問題の答えを導くための手続きを暗記しているだけに留まっている場合、深い理解である抽象的理解に達さない可能性があり、数学科の特徴である抽象性の理解の程度に影響することが考えられる。そこで研究2では、研究1で再構成した公式観尺度を用い、算数科の知識や技能を機械的に獲得するだけでなく、学習者自身が一般化を行い、抽象的に理解している程度を算数科の本質理解度として、算数科の本質理解度と公式観との関連について検討することとする。また、公式観も学習観の一部であるとするれば、その前提となる一般的な信念として数学の価値認識である数学信念からの影響もあると考えられる。そこで研究2では、研究1で再構成した公式観尺度を用い、数学信念と公式観の関連についても検討する。

## 2. 研究1

公式観尺度の再構成及び学習観と公式観、学習方略、数学科の成績それぞれの関連を検討する。

## 2.1. 方法

**参加者** 初等教育教員養成課程の大学生 96 名であった。

**材料** 学習観尺度は寺西(2008), 廣瀬ほか(2012)と同様に数学科に限定したものをを用いることにし, より単純な因子構造で, かつ因子毎の項目数が多く, 信頼性が高くなると考えられる廣瀬ほか(2012)のものを採用した。

公式観尺度は寺西(2008)を参考に尺度の再構成を行った。その際, 信頼性を高めるため, すべての因子に項目を追加した。また, 公式は定理の 1 つであることから「定理や公式」を「公式」にする等一部の項目については表現を改めた。さらに本研究で新たに「公式の有用性」の因子を構成すると考えられる項目を追加した。

学習方略尺度も数学科に限定したものをを用いることにした。因子数が少なく, 簡単な構造で表し, それぞれの因子の  $\alpha$  係数が高い市原・新井(2005)の学習方略尺度を採用した。

**手続き** Covid-19 感染対策でオンラインで行われている講義の一部を使い, オンラインで実施した。回答は任意であることや授業の成績には影響しないことなどの注意事項を示し, 同意する場合のみ回答ができるようにフォームを作成した。参加者は学習観, 公式観, 学習方略の順で各尺度に 7 件法で回答した後, 数学科の成績にも回答した。数学科の成績は大学入学時の大学入試センター試験の数学 I・A と数学 II・B の得点とした。なお, 正確な得点を覚えていない可能性を考え, それぞれ 10 点単位で選択肢を提示した。回答は任意とし, 「回答したくない」や「覚えていない」の選択肢も提示した。最後に学習指導要領が異なる可能性も考え, 任意で生年月日も回答を求めたが, 異なる学習指導要領に基づいた教育を受けた参加者はいなかった。フォームはそれぞれ 1 ページずつとし, 回答が終わると次のページに進めるようにした。

なお, 本研究は広島大学大学院人間社会科学研究科教育学系プログラム倫理審査合同委員会の承認(承認番号: 2021058)を受けて実施した。

## 2.2. 結果と考察

回答を任意としていた数学科の成績も含め, すべてに回答している有効回答者数は 84 名であった。また, 有効回答者のうち生年月日を回答した 76 名中 68 名が 2000 年度生まれ, 残り 8 名は 1999 年度生まれで多くの人が同じ受験年度だったと考えられる。調査で得られたデータは IBM SPSS Statistics 26 及び IBM SPSS Amos 28 Graphics を用いて分析した。

**各尺度の因子分析** まず, 廣瀬ほか(2012)の因子構造に基づき学習観尺度について確認的因子分析を行った(表 1)。 $\alpha$  係数はまずまずの値が得られたが。適合度指標は GFI が.841, AGFI が.756, RMSEA が.118 と十分と言えなかった。

次に, 公式観尺度について探索的因子分析(最尤法, プロマックス回転)を行った。先行研究及び想定した因子構造, 固有値の減衰状況から 4 因子と仮定した。負荷量が.300 より小さい項目や複数の因子にまたがって負荷量が.300 以上となる項目を除外しつつ分析を繰り返した所, 最終的に表 2 のような単純構造を得た。第 1 因子の負荷量が高い項目を見ると, 公式は問題を解くためのツールであることや

利用することで問題が解きやすい等の公式の有用性を感じている特徴があるため, 「公式の有用性」と命名した。第 2 因子の負荷量が高い項目を見ると, 公式を覚えることを重視し, 機械的学習を行っている特徴があるため, 先行研究と同様「暗記偏重」と命名した。第 3 因子の負荷量が高い項目を見ると, 公式への戸惑いを感じている特徴があるため, 先行研究と同様「公式への困惑」と命名した。第 4 因子の負荷量が高い項目を見ると, 公式の導き方を重視している特徴があるため, 先行研究と同様「導き方の意義」と命名した。 $\alpha$  係数はまずまずの値

表 1 学習観に関する確認的因子分析

項目	標準化推定値
<b>意味理解志向 (<math>\alpha = .759</math>)</b>	
数学の問題を解いていて間違えた時には, 自分がなぜ間違えたのかを考えることが効果的だ	.780 ***
数学を勉強するときは, 自分がどこまで理解しているかどうか確認しながら学習することが必要だ	.741 ***
数学の勉強中に解答を見るとときには, なぜそうなるのかを考える必要がある	.632 ***
数学の成績を上げるためにどう勉強すればよいのかを考えることは効果的だ	.615 ***
人それぞれ, 自分に合った数学の勉強方法を工夫したほうが効果的だ	.584 ***
数学を勉強するときは, 出来るまで繰り返し問題に挑戦する必要がある	.404 ***
<b>学習量志向 (<math>\alpha = .743</math>)</b>	
数学ができる・できないは勉強した量に比例する	.789 ***
数学の勉強は, とにかく根性を持って頑張り続けることが大切だ	.723 ***
1 日何時間と決めてコツコツと数学を勉強していれば, いつかできるように繰り返し問題を解き, 解法を覚えることは大切だ	.607 ***
1 度解法を見て分からないときは, 何度も書いて解法を覚えることが大切だ	.467 ***
1 度解法を見て分からないときは, 何度も書いて解法を覚えることが大切だ	.444 ***

注) \*\* $p < .01$ , \*\*\* $p < .001$

が得られた。

最後に、市原・新井(2005)の因子構造に基づき学習方略尺度について確認的因子分析を行った(表 3)。 $\alpha$  係数はまずまずの値が得られたが、適合度指標は GFI が.752, AGFI が.648, RMSEA が.154 と十分と言えなかった。なお、学習観と公式観、学習方略それぞれの因子と成績(数学 I・A と数学 II・B の得点を合算)の相関係数は表 4 のようになった。

**学習観と公式観、学習方略、数学科の成績の観測変数による構造方程式モデリング** 学習観と公式観、学習方略それぞれの因子と数学科の成績の関連の検討及び先行研究との比較のため、構造方程式モデリングを用いた(図 1)。モデル化するにあたり、学習観を起点として、公式観、学習方略、成績の順に影響があると仮定した。なお、有効回答者数を考えると、構造方程式モデリングを用いるには十分ではないと考えられるが、先行研究と同様の概念間の関係になることを確かめるために実施することにした。

ただし、学習観から学習方略へのパスに関しては、先行研究ではないパスであったが、公式観からのパスと同様、信念レベルからのパスであると考え、認めることとした。また、「意味理解方略」から「数学成績」へのパスは有意でないもののこれを残すことで「暗記・反復方略」からのパスは有意傾向であった。基本的に有意なパスのみを採用することとしたが、先行

表 2 公式観に関する探索的因子分析

項目	F1	F2	F3	F4
<b>公式の有用性(<math>\alpha = .824</math>)</b>				
公式を使わずに問題を解くのは難しい	.785	.062	.124	-.147
公式の導き方を理解することで、その公式の理解が深まる	.750	-.150	-.101	.160
公式は問題を解くためのツールである	.674	.094	-.073	.153
公式なしで数学をすることは考えられない	.632	.134	.125	-.102
公式を利用すると問題が解きやすい	.545	-.044	.045	.239
公式を使うことで簡単に計算ができる	.451	.027	-.050	.169
<b>暗記偏重(<math>\alpha = .830</math>)</b>				
公式を覚えていれば、問題内容を理解できなくても答えにたどり着くことができる	-.189	.780	-.040	.201
公式の記号と文字の羅列を覚えれば問題が解ける	-.136	.768	.148	.110
テストや模試、入試などは公式を覚えれば、点が取れる	.184	.675	-.015	.059
公式を完全に覚えれば、数値を公式に当てはめるだけで問題が解ける	.265	.666	-.229	-.200
数学は公式を覚えることが勉強だ	.049	.574	.107	-.099
数学は公式を覚え、数値を当てはめるパズルのようなものである	.049	.469	.202	-.095
<b>公式への困惑(<math>\alpha = .816</math>)</b>				
公式の記号と文字の羅列を見たくない	-.186	-.082	.872	.028
公式の導き方を説明されても、その説明についていけない	.254	.032	.634	-.117
公式は具体的なイメージがわからない	-.103	.172	.611	.116
問題集などの解答・解説を読んでも、なぜその公式を使うのかが理解できない	.016	.165	.606	.056
問題を解くときに、公式をどう使えばいいのかわからない	.186	-.136	.606	-.137
<b>導き方の意義(<math>\alpha = .743</math>)</b>				
公式は暗記するものではなく、導き方を理解するものである	-.027	.093	.046	.777
公式の導き方を理解しなければ、応用や発展問題を解くことが難しいことがある	.297	-.221	.191	.596
時間があるときは、授業で扱った公式の導き方を自分で理解しようとする	-.089	.028	-.040	.581
公式は自分で証明の道筋をたどれることに意味がある	.163	.050	-.149	.482
様々な考えや解法などを簡潔に表したものが公式である	.214	.100	.022	.418
公式の導き方を理解すれば、公式は覚えていなくても解ける問題がある	.206	-.034	-.126	.396
因子間相関				
	F1	.280	.217	.257
	F2		.427	-.032
	F3			-.330
<b>除外項目</b>				
問題を解くときに、どの公式を使うのか考えることが難しい				
公式がなぜあるのか見当もつかない				
公式を覚えるためには口に出したり、繰り返して書けば良い				
公式を覚えるためには、公式に代入すれば解ける問題をたくさん解けばよい				
テストの直前は公式の暗記ができているかの確認を行う				
公式の成り立ちを理解することでその公式が覚えやすくなる				
教科書には公式だけでなく導き方も一緒に載せたほうが良い				
公式を利用した解法は簡潔でわかりやすい				
問題を簡単に解くために公式は作られたと思う				

研究は学習方略から成績に有意なパスがあり、この方がモデルとしても妥当性が高いと考えられるため、これに限っては有意でないパスも残すこととした。

公式観への影響を見ると、「導き方の意義」には学習観の「意味理解志向」から有意な正の影響が、「学習量志向」から有意な負の影響があり、これらで 24.0%が説明できることが示された。「公式の有用性」は「意味理解志向」から有意な正の影響があり、これにより 22.9%が説明されることが示された。「暗記偏重」と「公式への困惑」は「学習量志向」から有意な正の影響があり、それぞれ 10.6%と 5.3%が説明されることがわかった。

次に学習方略への影響を見ると、学習方略の「意味理解方略」には学習観の「意味理解志向」と公式観の「導き方の意義」から有意な正の影響があり、これらにより 38.6%が説明されること

が示された。また、学習方略の「暗記・反復方略」には学習観の「意味理解志向」「学習量志向」と公式観の「公式の有用性」「公式への困惑」から有意な正の影響があり、これらにより 52.1%が説明されることが示された。学習観の「意味理解志向」は学習方略の2因子の両方に正の影響を与えており、意味理解を重視する学習者は、意味理解だけでなく暗記や反復演習を重視する傾向が示された。学習方略の「暗記・反復方略」に着目すると、本研究で経験公式観と定義した「公式の有用性」と「公式への困惑」両因子から影響している。このことから、公式の利用経験を積むことで数学科の学習において「暗記・反復方略」を用いることが示唆された。

最後に数学成績への影響を見ると、「暗記・反復方略」から負の影響が有意傾向であった。有意でなかった「意味理解方略」と合わせて、これらにより 4.2%が説明されることが示された。

以上、研究1では、公式観尺度の再構成を行ったが、この新たな公式観尺度を用いても、先行研究と同様、学習観からの影響や学習方略への影響があることを示すことができた。また、オーズベルが提唱した「意味と体系を持つ学習材料をその意味を把握することによって学習すること」(斎賀 1978)である意味学習だと考えられる「意味理解志向」「導き方の意義」「意味理解方略」の順に影響があった。さらに意味学習と対比される学習すべき内容を機械的に反復することで記憶保持を図る暗記学習(清水 2021a b)と考えられる「学習量志向」「公式への困惑」「暗記・反復方略」の順に影響があった。暗

表3 学習方略に関する確認的因子分析

項目	標準化推定値
<b>意味理解方略(<math>\alpha = .789</math>)</b>	
公式や法則はただその形を覚えるだけでなく、どうしてそのような形になるのかを考える	.603 ***
ある方法で問題を解いた後で、他の方法でも問題が解けるかどうかを考える	.713 ***
どうすれば効率よく問題が解けるかを考える	.816 ***
難しいと思える公式や法則でも、簡単に覚える方法はないかと考える	.485 ***
公式や法則は自分で導き出せるようにする	.658 ***
<b>暗記・反復方略(<math>\alpha = .822</math>)</b>	
今は授業で習っていないくても、以前に学習した単元の復習もする	.527 ***
間違えた問題に集中的に取り組む	.862 ***
わからない問題は何回もくり返し練習する	.801 ***
特に苦手なところをくり返し勉強する	.746 ***
問題集を自分で買って解いてみる	.311 **
何度も同じ問題を解く	.669 ***
学校で配られた問題集をくり返し解く	.713 ***
公式は問題に取り組み、使いながら覚える	.335 **

注) \*\* $p < .01$ , \*\*\* $p < .001$

表4 尺度間の相関

	2)	3)	4)	5)	6)	7)	8)	9)
1) 意味理解志向	.318 **	.468 ***	.475 ***	-.013	-.101	.484 ***	.585 ***	-.025
2) 学習量志向		-.063	.133	.329 *	.208 *	.119	.493 ***	-.199 †
3) 導き方の意義			.393 ***	.027	-.224 *	.600 ***	.330 *	.075
4) 公式の有用性				.316 *	.224 *	.251 *	.448 ***	-.051
5) 暗記偏重					.418 ***	.125	.230 *	-.147
6) 公式への困惑						-.173 †	.165	-.441 ***
7) 意味理解方略							.637 ***	.054
8) 暗記・反復方略								-.121
9) 数学成績								

注) † $p < .10$ , \* $p < .05$ , \*\* $p < .01$ , \*\*\* $p < .001$



記学習は機械的学習の1つとして考えられ、公式観は有意義学習と機械的学習を反映していると考えられる。また、有意傾向であるが、「暗記・反復方略」は「成績」に負の影響を与えていることからこの方略を用いる勉強だけでは成績が向上しないという示唆が得られた。

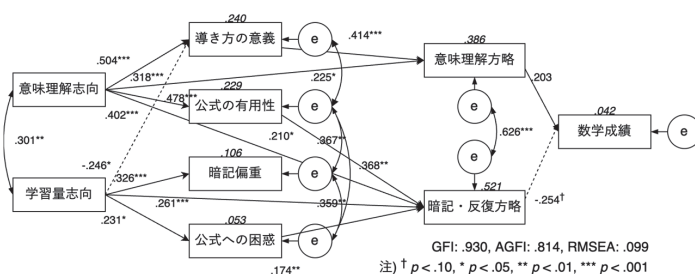


図1 学習観と公式観、学習方略、成績の観測変数による構造方程式モデリング(数値は標準化係数または決定係数を、実線は正の影響を、破線は負の影響を表す)

### 3. 研究2

算数科の本質理解度や数学信念と公式観との関連から公式観の規定要因を検討する。

#### 3.1. 方法

**参加者** 大学生、大学院生 100 名であった。

**材料** 公式観尺度は研究1で再構成したものを用いた。

算数科の本質理解度テストは定期試験や入学試験等のような解答が一意に決まる計算が中心の一般的な問題ではなく、算数科の学習内容の本質に気付いているかを確認できる問題を作成した(付録)。問題の構成においては、文部科学省(2017)をもとに学習指導要領で示されている算数科の学習内容である4領域に従い、合計点が15点になるように配点を決定した。配点は算数科の本質理解度に影響すると考えられる度合いに応じて領域ごとに決定した。Aの領域である「数と式」は特に数学の基礎になると考えられ、重要であるが、機械的に使う傾向があると考えられるため、問題数を最も多くし配点も最も高い7点とした。Bの領域である「図形」は図形を抽象的に捉え、数理的に処理する数学の特徴を反映しており、重要である一方で機械的に図形の条件や性質を覚えている可能性があるため、「数と式」の次に問題数が多く配点も高い、4点とした。また、「数と式」や「図形」をもとに数理的処理を行うと考えられるCの領域である「測定」と「変化と関係」やDの領域である「データの活用」は配点が同じ2点になるように構成した。なお、大問5の等周長問題は工藤・白井(1991)の内容を参考にして作成した。

数学信念尺度は大塚(2016)に基づいたが項目数が少ない「有用性」「固定性」「困難性」因子に項目をそれぞれ追加し、7件法で回答を求めた。

**手続き** 1から5名程度の小グループで調査を行った。調査開始前に調査の参加は任意であること、調査の途中でも同意を取り下げることが可能であることなどを伝えた。その後、数学信念と公式観の尺度の質問紙を配布し、参加者に各自のペースでの回答を求めた。全員の回答を確認後、算数科の本質理解度テストの質問紙を配布し、解答を求めた。テスト開始前にカンニング行為をしないこと、20分の制限時間があることを伝えた。テスト終了の5分前、1分前には残り時間をアナウンスした。最後に、学習指導要領が異なる可能性も考え、任意で生年月日も回答を求めたが、異なる学習指導要領に基づいた教育を受けた参加者はいなかった。

#### 3.2. 結果と考察

調査で得られたデータはIBM SPSS Statistics 26及びIBM SPSS Amos 28 Graphicsを用いて分析した。

公式観尺度について確認的因子分析を行った(表5)。適合度指標はGFIが.732、AGFIが.670、RMSEAが.094であり、データとモデルの適合度は十分と言えなかった。

**算数科の本質理解度テストと公式観** 算数科の本質理解度テストの採点に際し、著者の内、初等教育教員養成課程に在籍し、中学校と高等学校の数学科の教員免許を取得するための教職課程を履修している1名と理学部数学科の学生1名の2名で採点を行うことにした。この2名で得られた解答を得点化するために要旨の抽出を行い、解答内容がその要旨それぞれに該当するかの判定及び採点基準や得点の設定を行い、これをもとに採点を行った。要旨の抽出は予想される解答や参加者の記述内容をもとに行い、抽出された要旨は全問合わせて146個であった。要旨に該当するかの判定は記述内容をもとに具体例や図示等の記述方法を問わず、参加者の記述内容の趣旨をもとに行った。例えば、第1問の分数についての説明では「2/3

のように数を分母と分子に分けて書きあらわしたものは分数の表し方について言及しているため「表現方法」が、第3問の0で割れない理由についての説明では「8枚のピザを0人で割っても誰も食べれないので意味ない」は0で分けることが不可能なことに言及しているため「0で分けることが不可能」が該当すると判定した。1問に対して1つの要旨と限定せず、複数の要旨に言及している場合は、複数の要旨に該当すると判定した。参加者それぞれの解答がそれぞれの要旨に該当するかの判定をした結果、参加者1人当たりの採点者2名の判定の不一致数は146個中平均9.46個で全体の一致率は93.5%であった。不一致の場合は協議を行い、該当するかの判定を決定した。これらの要旨それぞれを得点化する採点基準については、算数科の本質理解度は学習内容を学習者が個人でどのくらい一般化できているかに依存すると考えられるため、一般化すれば見出せる性質を見出しているか否かを基準とした。この採点基準をもとに要旨の該当判定を行った2名で相談し、すべての要旨の内容について、性質に言及しているもの、性質と特徴のどちらとも取れるもの、特徴のみに言及しているものの3種類に分け、問題構成時に設定した配点をもとにそれぞれ満点、満点の半分、得点なしとした。得点については設定した各要旨の得点をもとに問題ごとに配点を最大得点として解答内容が該当する要旨の合計得点を求めた。その得点の合計を各参加者の算数科の本質理解度の評価とした。

算数科の本質理解度と公式観の関連を検討するために、算数科の本質理解度が公式観に影響を及ぼすと仮定して、構造方程式モデリングを行った(図2)。算数科の本質理解度から公式観への影響を見ると、「公式への困惑」に有意な弱い負の影響を与えており、4.8%が説明されることが示された。このことから、算数科の本質理解度が高いと公式への困惑が低下すると考えられるが、他に影響する要因もあると考えられる。

算数科の本質理解度と公式観の関連を検討するために、算数科の本質理解度が公式観に影響を及ぼすと仮定して、構造方程式モデリングを行った(図2)。算数科の本質理解度から公式観への影響を見ると、「公式への困惑」に有意な弱い負の影響を与えており、4.8%が説明されることが示された。このことから、算数科の本質理解度が高いと公式への困惑が低下すると考えられるが、他に影響する要因もあると考えられる。

**数学信念と公式観** 数学信念尺度について因子分析(主因子法、プロマックス回転)を行った。犬塚(2016)の数学信念尺度をもとに尺度を構成したため、因子数を4に指定し、負荷量が.400より小さい項目及び複数の因子にまたがって負荷量が.400以上となる項目を削除しつつ、分析を繰り返したところ最終的に表6ようになった。第1因子の負荷量が高い項目を見ると、数学への諦めを感じていることがうかがえる項目が特徴であり、犬塚(2016)と同様に「困難性」と命名した。第2因子の負荷量が高い項目を見ると、数学の解答過程や思考過程に価値を見出している項目が特徴であり、犬塚(2016)と同様に「思考プロセス」と命名した。第3因子の負荷量が高い項目を見ると、数学に対して持っているイメージとうかがえる項目が特徴であり、犬塚(2016)と同様に「固定性」と命名した。第4因子の負荷量が高い項目を見ると、数学が有用なものであると考える

表5 公式観の確認的因子分析

項目	標準化推定値
<b>導き方の意義(<math>\alpha = .658</math>)</b>	
公式は暗記するものではなく、導き方を理解するものである	.579 ***
公式の導き方を理解しなければ、応用や発展問題を解くことが難しいことがある	.525 ***
時間があるときは、授業で扱った公式の導き方を自分で理解しようとする	.538 ***
公式は自分で証明の道筋をたどれることに意味がある	.480 ***
様々な考えや解法などを簡潔に表したものが公式である	.330 **
公式の導き方を理解すれば、公式は覚えていなくても解ける問題がある	.568 ***
<b>公式の有用性(<math>\alpha = .683</math>)</b>	
公式を使わずに問題を解くのは難しい	.791 ***
公式の導き方を理解することで、その公式の理解が深まる	.136
公式は問題を解くためのツールである	.375 ***
公式なしで数学をすることは考えられない	.824 ***
公式を利用すると問題が解きやすい	.561 ***
公式を使うことで簡単に計算ができる	.234 *
<b>暗記偏重(<math>\alpha = .730</math>)</b>	
公式を覚えていれば、問題内容を理解できなくても答えにたどり着くことができる	.437 ***
公式の記号と文字の羅列を覚えれば問題が解ける	.502 **
テストや模試、入試などは公式を覚えれば、点が取れる	.512 **
公式を完全に覚えれば、数値を公式に当てはめるだけで問題が解ける	.570 ***
数学は公式を覚えることが勉強だ	.568 ***
数学は公式を覚え、数値を当てはめるパズルのようなものである	.671 ***
<b>公式への困惑(<math>\alpha = .841</math>)</b>	
公式の記号と文字の羅列を見たくない	.732 ***
公式の導き方を説明されても、その説明についていけない	.710 ***
公式は具体的なイメージがわからない	.538 ***
問題集などの解答・解説を読んでいても、なぜその公式を使うのかが理解できない	.770 ***
問題を解くときに、公式をどう使えばいいのかわからない	.838 ***

注) \*  $p < .05$ , \*\*  $p < .01$ , \*\*\*  $p < .001$

可否かの項目が特徴であり、犬塚(2016)と同様に「有用性」と命名した。 $\alpha$ 係数は「有用性」因子以外の因子についてはまずまずの値が得られた。

数学信念と公式観の関連を検討するため、数学信念は公式観に影響を及ぼすという仮定で構造方程式モデリングを行った(図 3)。公式観に影響している数学信念を見ると、公式観の「導き方の意義」は数学信念の「思考プロセス」から正の影響を、「困難性」から負の影響を受けており、これらにより 24.9%が説明されている。公式観の「公式の有用性」は数学信念の「思考プロセス」「固定性」「困難性」から正の影響を受けており、これらにより 19.6%が説明されている。公式観の「暗記偏重」は数学信念の「固定性」「困難性」から正の影響を受けており、これらにより 26.7%が説明されている。最後に公式観の「公式への困惑」は数学信念の「困難性」から正の影響を受けており、32.1%で説明されている。これらの結果から、数学信念と公式観には関連があることが示された。

まず、数学に価値を見出していると考えられる数学信念の「思考プロセス」は公式観の「導き方の意義」に有意な正の影響があり、その一方で数学に価値を見出せていないと考えられる数学信念の「固定性」「困難性」は機械的学習を反映していると考えられる公式観の「暗記偏重」に弱い正の影響があることから、数学に価値を見出している人は有意味学習を、見だせていない人は機械的学習をしていることが示唆された。また、有意味学習を促すと考えられる「思考プロセス」と機械的学習を促すと考えられる「固定性」「困難性」が公式観の「公式の

有用性」に影響しており、有意味学習と機械的学習の二面性を反映している因子と考えられる。

これから、算数科の本質理解度は公式への困惑を軽減し、数学信念は公式観に影響があると言える。特に数学信念は公式観への影響が多く、公式観の規定要因の 1 つだと考えられる。また、数学の価値を見出している人は有意味学習をしている可能性が示唆された。このことから、数学科の授業で教科書通りに数学科を学習し、演習することも必要だが、数学の価値を見出すことができるような活動も必要だろう。

表 6 数学信念の探索的因子分析

項目	F1	F2	F3	F4
<b>困難性 (<math>\alpha = .814</math>)</b>				
数学は努力よりも生まれ持った才能が大きく影響する	<b>.735</b>	.052	-.112	-.200
数学ができるかどうかはセンスで決まる	<b>.715</b>	.049	-.069	-.186
数学は難しい	<b>.681</b>	.313	.018	-.123
数学は頭が良くないとできない	<b>.657</b>	-.070	.020	-.026
勉強すればだれでも数学ができる	<b>-.617</b>	.250	.116	-.112
数学は解答を導くまでの過程がわかりにくい	<b>.546</b>	-.145	.096	.202
数学は複雑だ	<b>.458</b>	-.051	.269	.256
<b>思考プロセス (<math>\alpha = .713</math>)</b>				
数学では、筋道だてた考え方が大切だ	-.033	<b>.632</b>	.152	.084
数学では、矛盾なく答えを組み立てることが大切だ	.036	<b>.626</b>	.063	-.015
数学で大切なのは論理性だ	.017	<b>.576</b>	.059	-.191
数学を使うことで、個々のものごとの共通性を捉えて、一般化することができる	.022	<b>.506</b>	-.115	.155
数学では、答えを導き出すためのプロセスが重要だ	-.089	<b>.505</b>	.121	-.035
数学では色々な観点から解決方法を考えることが大切だ	-.083	<b>.484</b>	-.127	.250
数学を使うと、実際にあり得ない抽象的な世界について考えることができる	-.023	<b>.438</b>	-.114	-.059
<b>固定性 (<math>\alpha = .706</math>)</b>				
公式を覚えれば誰でも数学はできる	-.219	-.031	<b>.731</b>	-.133
解き方を暗記すれば数学ができるようになる	-.049	.062	<b>.713</b>	-.130
数学では、決められた手順を覚えることが大切だ	.124	.142	<b>.581</b>	.043
「数学」と言えば「計算」だ	.122	-.050	<b>.541</b>	.213
<b>有用性 (<math>\alpha = .649</math>)</b>				
数学は、具体的なものを測ったり計算したりするためのものだ	.073	.082	.308	<b>.620</b>
生活の中で数学が必要になることはほとんどない	.075	.014	.144	<b>-.599</b>
数学ができなくても生きていける	.099	.118	-.109	<b>-.473</b>
数学は役に立つ	-.128	.164	-.345	<b>.459</b>
数学が必要な仕事がたくさんある	.099	.045	-.250	<b>.412</b>
<b>除外項目</b>				
数学的な能力や考え方は生きていく上で役に立つ				
仕事をする上で、数学的な考え方は必要だ				
数学を学ぶことで、自分が高められる				
数学以外の教科を勉強するために数学は必要だと思う				
数学では、答えが合っているかどうかが一番大切だ				
数学では、答えが一つに決まる				
数学では何が正しいかがはっきりしている				
数学に暗記は必要ない				



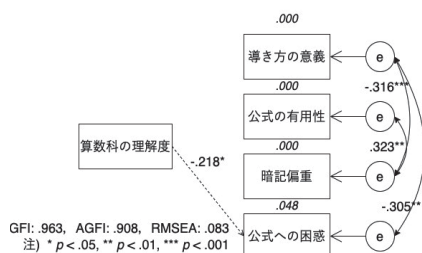


図2 算数科の本質理解度と公式観の観測変数に

よる構造方程式モデリング

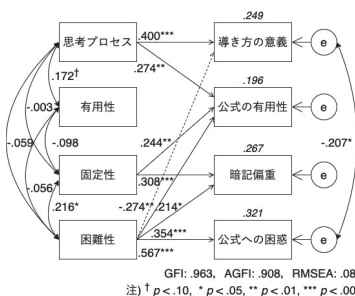


図3 数学信念と公式観の観測変数による構造方程式モデリング

#### 4. 総合考察と今後の課題

研究1では、公式観尺度の再構成を行い、学習観や学習方略、数学の成績との関係を検討した。その結果、想定した因子構造が示され、また、数学全般に対する学習観や、数学の学習で重要な役割を果たす公式観が学習方略へと影響していることが示された(図1)。公式を導く過程を重視する公式観を持つ人は意味理解を重視する方略を行う傾向があり、本研究で経験公式観とした公式を有用に感じたり、公式に困惑したりする公式観を持つ人は暗記や反復演習を重視する方略を行う傾向があった。特に後者の傾向から公式の利用経験が暗記や反復演習を促進すると考えられる。また、本研究で新たに追加した公式を有用に感じる公式観を持つ者は暗記や反復演習を重視する方略を行う傾向があり、公式を使うことで問題が解きやすくなることや問題を解くためのツール等と感じているからこそ着実な習得を目指すと考えられる。

さらに暗記や反復演習を重視する学習方略を用いることは成績に負の影響を与える示唆が得られた(図1)。公式に困惑する公式観はその学習方略を媒介として成績に影響があるとともに成績とも負の相関(表4)があり、公式に困惑することは数学科の学習において負の影響があることの示唆が得られた。一方で算数科の本質理解度は公式への困惑を軽減することが示され(図2)、算数科の本質理解度を高めることで公式への困惑が軽減され、その結果、成績を改善できると考えられる。

また、研究2の数学信念と公式観の構造方程式モデリングから公式観は数学信念の影響を受けており、数学に対する価値認識は公式観の規定要因として考えられるだろう。特に数学の思考過程に意義を見出している人は公式を導く過程を重視したり、有用に感じたりすることの傾向があった。一方で数学を難しいと感じたり、諦めていたりする人は公式を暗記することを重視することや公式に対して困惑すること、公式を導く過程を重視しない傾向があった。

本研究は公式観尺度の再構成及び規定要因についての検討を行った。公式観は数学科の教師等であれば経験から認識している可能性は高い。一方で学習観や学習方略などの学習に関わる構成概念との関連は経験から見出すことは難しいと考えられ、それを示せたことに意義があったと考えられる。また、教師が感覚的に持っていると考えられる知見を論理的に精査し、測定できるようにしたとともにそれを示したことで教師の経験知を裏付けるエビデンスにもなった。さらに算数科の本質理解度が公式への困惑を軽減することや公式への困惑は暗記や反復演習を行う学習方略を通じて数学科の成績に影響する示唆が得られた。これらは算数科の本質理解度を促進する指導や公式に困惑しない指導等新たな指導を考える一助になり、数学科を苦手と感じる生徒を減らすことに繋がると考えられる。

**今後の課題** 本研究では公式観と諸概念の関連及び規定要因の推定を行ったが、望ましい公式観を示すことや公式観の組み換えを行う方法の検討は行っていない。生徒の数学科のパフォーマンスをよりよくするために望ましい公式観を特定すべきである。それにより望ましい公式観を形成する方法や、既に形成された公式観を望ましいものに組み替える方法を考える事が可能になるだろう。また本研究では大学生を対象としたが、参加者全員が高等学校までの数学科を修めていたことになる。中学校や高等学校の生徒を対象とすることで公式観の形成過程を検討することが出来るだろう。

#### 付記

本研究は第1著者が広島大学教育学部に提出した卒業論文に基づく。執筆に当たり助言等をくださった同大学院人間社会科学部知能構成論研究室の皆さん、調査に参加してくださった学生の皆様に感謝の意を表す。なお、本研究の一部は

日本教育心理学会第 64 回総会で発表済みである。

## 引用文献

廣瀬 友介・中本 敬子・蛭田 政弘 (2012) 数学学習における学習観と学習方略の関係——大学生を対象とした分析——

文教大学教育学部紀要, 46, 45-56.

市原 学・新井 邦二郎 (2005) 中学生用数学・国語の学習方略尺度の作成 筑波大学心理学研究, 29, 99-107.

犬塚 美輪 (2016) 大学初年次生の数学信念の構造——関連要因の探索的検討—— 教育心理学研究, 64, 13-25.

工藤 与志文・白井 秀明 (1991) 小学生の面積学習に及ぼす誤ルールの影響 教育心理学研究, 39, 21-30.

文部科学省 (2017) 小学校学習指導要領解説算数編.

斎賀 久敬 (1978) 意味学習 大山正・藤永保・吉田正昭(編) 心理学小辞典 有斐閣 p.270.

清水 寛之 (2021a) 暗記学習 子安増生, 丹野義彦, 箱田裕司(監修) 有斐閣現代心理学事典 有斐閣 p. 18.

清水 寛之 (2021b) 意味言語学習 子安増生, 丹野義彦, 箱田裕司(監修) 有斐閣現代心理学事典 有斐閣 p. 761.

寺西 友理 (2008) 高校生は数学の学習において公式・定理をどのように捉えているか——学習観・学習方略・成績との関連—— 早稲田大学大学院教育学研究科紀要, 16, 1-13.

植木 理恵 (2002) 高校生の学習観の構造 教育心理学研究, 50, 301-310.

## 付録 算数科の本質理解度問題と解答例

1. 分数と小数について説明し、共通点や相違点についても説明してください。

分数: 1 を分母の数で等分し、それを単位量とした 小数: 分数の分母が 10 の累乗の時の数/整数以外も表せる数

もの/割り算を表したもの

相違点: 分数で表現できても小数では表現できない数がある/小数

共通点: 整数以外も表せる数

は規則に従って等分するが、分数はその都度任意な数で等分できる

2. 分数で割る際に分母と分子をひっくり返して掛け算にして計算する理由を説明してください。

除算は被除数と除数の逆数の積で定義されるから

3. 0 で割ることができない理由を説明してください。

0 には逆数が存在しないから

4. 以下の図の a)~g)の中から平行四辺形をすべて選び、記号に丸をつけてください。



5. 4 本のマッチ棒を用いて正方形と任意の平行四辺形を作った時、この二つの図形の面積の関係について答え、そのように考えた理由も説明してください。

平行四辺形の方が小さい/高さが異なるから

6. 長さを表す単位系の一つにメートル法があり、身の回りに cm(センチメートル)や km(キロメートル)等があります。これらの c(センチ)や k(キロ)の関係を説明してください。

c(センチ) は1/100倍を、k(キロ) は1000倍を表す/1km = 100000cm の関係である

7. 百分率について説明してください。

全体を100とした時の何個分かを表す/割合を表すもの

8. ある集団の特徴を把握するために平均値を見ることの危険性について説明してください。

極端に外れている値があると集団の特徴を表していると言えない/分布が偏っていてもその偏りを平均値では捉えられない