

算数文章題場面における演算関係の統合的スキーマ —二重三角図とその授業実践—

平嶋 宗[†], 林田雄樹^{††}

[†]広島大学大学院先進理工系科学研究科 〒739-8527 広島県東広島市鏡山 1-4-1

^{††}呉市立阿賀小学校 〒737-0004 広島県呉市阿賀南 2 丁目 1-1

E-mail: [†]tsukasa@lel.hiroshima-u.ac.jp

あらまし 本稿では、算数文章題に対する統合的スキーマである二重三角図の授業利用について報告する。比例場面を扱う二重三角図は、二つの存在量に対して対となる二つの関係量、包含除、等分除、値が小さくなる掛け算、値が大きくなる割り算、を互いに関連・制約する必然のものとして可視化できる。この二重三角図を用いた授業を 5 年生の 3 月の授業で実施したところ（1 クラス 23 名、2 時限）、（1）児童の 89% が対となる関係量を含んだ二重三角図を問題文に対して正しく書けた、（2）児童の 79% が二重三角図によって可視化される 6 つの演算関係に対応する 6 つの式を立式できた、（3）関係量保存性課題のスコアが事前事後で有意に向上し、効果量は大であった、といった結果が得られた。

キーワード 算数文章題、二重三角スキーマ、比例場面、対となる関係量、小学 5 年生

An Integrated Schema of Operational Relationships between Quantities in Arithmetic Word Problems

—Classroom Practice of Double Triangle Diagram—

Tsukasa HIRASHIMA[†], Yuki Hayashida^{††}

[†]Graduate School of Advanced Science and Engineering, Hiroshima University 1-4-1 Kagamiyama, Higashi-Hiroshima, Hiroshima, 739-8527 Japan

^{††}Aga Elementary School Aga-Minami, Kure, Hiroshima, 737-0004 Japan

E-mail: [†]tsukasa@lel.hiroshima-u.ac.jp

Abstract This paper reports on the use of double triangle diagrams in the classroom, which have been proposed as an integrated schema for arithmetic word problems. The double triangle diagram, which deals with proportional situations, can visualize two paired relational quantities, inclusive division, equal division, multiplication to reduce the value, and division to increase the value, as necessarily related and constrained to each other. When we conducted a class using this double triangle diagram in a 5th grade class in March (23 students, 2 lessons), (1) 89% of the students were able to correctly draw a double-triangle diagram including the paired relational quantities to the problem text, (2) 79% of the students were able to write 6 expressions including in the problem, and (3) significant improvement was observed in the pre- and post-tests using the problems of conservation of relational quantities, and the effect size was large.

Keywords Mathematic/Arithmetic Word Problem, Integrated Schema, Multiplication/Division, Proportional Relation

1. まえがき

算数文章題を学習する目的は、非数学的な記述を数学的記述に変換する方法を習得することである。この変換過程はしばしば「問題理解」あるいは「場面理解」と呼ばれる。文章題に対する場面理解は、数学を場面の分析に用いる場合に常に必要となる段階であり、それ自体は数学であるとはいいがたい。なぜなら、数学は数学的記述に変換した後にしか用いることができないからである。したがって、文章題は工学を始めとし

て数学を応用することが必要となる分野全般の基礎となる学習対象であるといえる。また、数学を学べば自然とできるようになるものではなく、文章題として学ぶ必要があるものといえる。

このような観点からすると、算数文章題において答えを出すことは手段であって目的ではない。答えを出すためには場面理解が必要であり、また、答えを正しく出せていれば、場面理解ができていたことが推定できることから使われている手段である。つまり、場面

理解ができていれば、答えを出せるという命題を真としたうえで、答えを出せているから場面理解ができて、という推定を行っていることになる。これは真となるとは限らない仮説推論であり、「答えを出せるが理解できていない」、という状態が生じる理由となる。

数学を活用する基盤として文章題を捉えれば、「場面理解」を中心とした指導を行うべきである。しかしながら、「解けたかどうか」は観測しやすいが、「理解したかどうか」の観測は困難である。また、「解く」こと自体が難しい学習者も存在しており、「解くための指導」が重視されているのが現実といえる。たとえば、「割合の第2用法は正解率が高いが、第1用法は難しく、第3用法はさらに難しい」といった分析がみられるが、これは解き方の議論である。これら三つの用法は、同一場面で成立するものであり、場面理解としては同じである。したがって、用法別の議論では、場面理解ができていないのか、数学的関係の利用ができていないのかが分離できない。三用法ごとに異なる場面理解があるとすると、個々の解き方に依存した場面理解となり、「数学的に分析のための場面理解」とは言えず、幅広い分野の基礎となる学習対象であるとするための要件を欠くものになってしまう可能性がある。

これまでに、道具的理解との対比における関係的理解の重要性、状況モデルの役割の指摘、あるいはスキーマベースの指導、などは「場面理解」が文章題学習の本質であることを踏まえた検討は行われており、様々な成果も報告されている。しかしながら、国内外を問わず、いまだに十分な成果を上げているといえないというのが大方の認識であろう。著者らも、まだ改善の余地は十分にあると考えている。

本研究は、筆者らがこれまでに知的学習支援システムの設計・開発の基盤として作成してきた算数文章題のモデルである三量命題モデル[1]を、学習者・教授者・システムが意味的にも操作的にも共有することができる外在的なモデル[2]に拡張する試みであり、このモデルを学習者がスキーマとして習得対象とすることを目標とする[3,4]。三量命題モデルは、算数文章題を意味的に処理できるように構造的に記述したものであり、単位文章題（1回の四則演算で表現できる問題）を二つの存在量と一つの関係量で表現する。この三つの量の組み合わせとして四則の単位文章題を作成する作問学習支援システム：モンサクン[1]や、単位文章題を構成する三つの量の間を三角形で表したうえで、その三角形を連結することで複数の演算で表現できる文章題を構造的に表す三角ブロック[1]が設計・開発され、実践利用もされている。これらは「文章題」と呼んでいるものの、文章題が設定している場面を量と量間の関係として組み立てるものとなっている。これらの先

行研究の実践利用を通して、三量命題モデルに基づく「量」および「量間の関係」の部品化とその部品操作体験の共有化、つまり、「先生と生徒が同じ部品を用いて同じ操作を行いながら算数文章題について話し合うこと」、が学習において非常に有用であるとの知見を得ている。またこの過程では、「量間の関係づけ」が活動の中心となり、「計算して答えの数字を出す」活動はほとんど現れないことが分かっている。これは、「解く」のではなく「解る」、つまり場面理解を学習の中心にすることに成功している事例と判断している。この三量命題モデルをベースに、先生と生徒、および計算機が操作体験を共有できる可視化表現として新たに提案しているのが二重三角図である。従来の三量命題モデルは、システム上で実現する学習活動を設計するために用いられたシステムのためのモデルであったが、二重三角図は、先生と生徒と計算機の三者が思考と処理を外在化・共有化するためのモデルとなっている。この二重三角図を用いた実践を小学校で実施したので、その結果を報告する。なお、二重三角図は従来の算数文章題の捉え方と異なる部分があるが、これについては[4]において論じており、参照されたい。

以下第2章では、三量命題モデルと二重三角図に関して概説する。第3章では、小学5年生に対して二重三角図を用いた実践授業を行った結果について報告する。

2. 三量命題モデルと二重三角図

2.1. 三量命題モデル

単位文章題は三つの量で構成される。量とは意味を持った数のことであり、単位を持つ。量の意味を表すのが量命題となる。以下本稿では単に「量」と呼ぶ。この三つの量を、二つの存在量と一つの関係量で構成されるものとしてモデル化したのが三量命題モデルである。存在量とは、単体で成立しうる量のことであり、演算とは独立である。これに対して関係量とは他の量間の関係において成立している量であり、関係としての演算を特定するものとなる。たとえば、「リンゴが6個、ミカンが3個、リンゴとミカンが合わせて9個」といった場面においては、(1)リンゴの数が6個、(1)ミカンの数が3個、(3)リンゴとミカンの合わせた数が9個、の三つの量で構成されており、(1)(2)が存在量であり、(3)は、リンゴの量とミカンの量との関係において成立している量であることから関係量となる。また、「皿1枚あたりリンゴの数が3個、皿の枚数が2枚、リンゴの数が6個」という場面であれば、(4)皿1枚あたりリンゴの数が3個、(5)皿の枚数が2枚、(6)リンゴの数が6個、に三つの量で構成されており、(4)が皿とリンゴの二つの量の間で成立する関係量となり、

(5)(6)が存在量となる。(1)と(6)は同一の存在量であるが、(1)は合併における部分量の一つであり、(6)は比較量としての役割を果たしており、存在量が場面ごとに異なった役割を果たすことを示している。

三量命題モデルに基づけば、単位文章題は三つの量の組み合わせとして定義できるので、この三つの量の組み合わせとして算数文章題もしくは場面を構成する活動を設計したのが単文組立型作問学習支援システムモンサクンである。このモンサクンによって四則の文章題を対象とした作問学習が実践可能であり、学習効果もあることが確認できている。また、複数の演算で表すことができる複合的な文章題は、単位文章題の連結として捉えることができるので、単位文章題を三つの量を結んだ三角形として表現したうえで、この三角形の連結として複合文章題の量間の関係を表現したものが三角ブロックモデルとなる。この三角ブロックモデルに基づいて複合文章題の量間の関係を組み立てる学習支援システムが開発され、これも実践利用できていることが確認できている。これら学習支援システムの実践の中で教員が児童と量を部品として学習者と共有しながら操作・議論する姿が見られた。この共有性・操作性を活かすために三量命題モデルをさらに発展させたのが二重三角図となる。なお、乗除については比例関係のみを扱っており、長さから面積を求めるような次元の異なる量を導く場合は扱っていない。授業における共有活動事例の映像は、下記の URL で参照できる（モンサクン：<https://youtu.be/h2ASpotD8yk>、三角ブロック：<https://youtu.be/nZxRmGISzso>）。

2.2. 二重三角図

三量命題モデルを可視化するとともに、加減及び乗除の場面に存在する対となる二つの関係量を明示化したものが二重三角図となる。二つの存在量に対して対となる二つの関係量を可視的に記述するために、二つの三角形として描かれる。加減算において二つの存在量の和をとることができれば、差をとることもできるはずであり、和と差のそれぞれの関係に対して関係量が存在する。また、存在量 X と存在量 Y の間に $X=aY$ の比例式が成り立つ場合、“ a ” が関係量となるが、自明のこととして $Y=(1/a)X$ も成り立つ。この式を量として解釈した場合、 $(1/a)$ は“ a ”とは異なる量の存在を示している。したがって、乗除においても逆数関係になる二つの対となる関係量が存在することになる。

2.1 で上げた事例の二重三角図を図 1、図 2 にそれぞれ示した。それぞれ、同一場面において 1 と 2 差の関係、1 乗 2 除関係がそれぞれ二つ存在することを可視化している。図 2 の乗除の場合であれば、一つの三角形で三用法が同時に成立していることを可視化している。また、二つの三角形によって、関係量が対とし

て存在することが示されている。さらに、乗除の場合では同一場面において、包含除、等分除、結果が小さくなる掛け算、結果が大きくなる割り算が同時に存在することが可視化されており、さらに掛け算と割り算の変換が数の逆数化を伴う意味的・必然的なものとして表現されている。なお、加減算の増える・減るは同時に存在しえない二つの存在量と、その差としての関係量で表現できるか、これについては別途報告する。

二重三角図の具体的な記法としては、二つの存在量を底辺の両頂点に配置し、底辺対頂点に关系量を配置する。また、(左の存在量) < (右の存在量) とし、上に配置する関係量の基準量（分母とする量）を左の存在量とする。このように規定することで、同一場面对して同一の二重三角図を記述できる。このため、1 皿あたりのリンゴ、のように 1 より大きい関係量が一般的な場合は上三角形が標準となり、割合のように 1 より小さい関係量が一般的な場合は、下三角形が標準となる。割合を扱う場合の二重三角図を図 3 に示した。

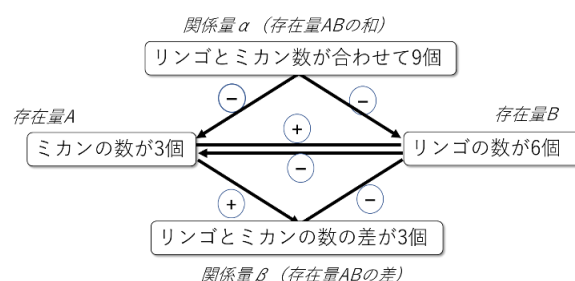


図 1 和差に関する二重三角図事例

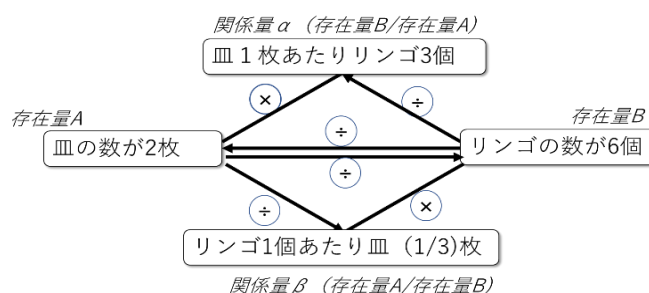


図 2 乗除に関する二重三角図事例

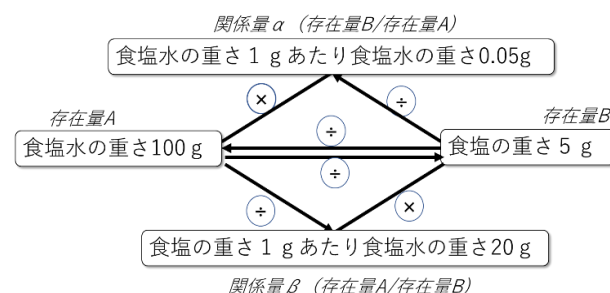


図 3 割合に関する二重三角図事例

図3では、「5%食塩水」を「食塩水の重さ1gあたり食塩の重さ0.05g」と表現し、「割合」を「二つの量の関係」として表現していることになる。「割合」を正しく利用するためには、5%が「食塩水の重さ1gあたり食塩の重さ」であり、「食塩の重さ1gあたり食塩水の重さ」でないこと分かっている必要があり、したがって暗黙的にはこの情報を保持し利用しているといつてよい。量間の演算関係を見つめるための場面理解、という観点から考えた場合、この表記を用いることに問題はないと判断している。ただし、このような量間の関係として表記と割合表記の相互変換は別途学ぶ必要が生じるといえる。

2.3. 関係量と内包量

算数の文章題が扱う量の分類としては、まず離散量と連続量に分け、連続量をさらに外延量と内包量に分ける考え方が国内では標準となっている。しかしながら、この分類は個々の量の性質を踏まえているものの、量間の関係を見出すという場面理解の立場からは必ずしも妥当とは言えないと筆者らは考えている。たとえば、皿の枚数は離散量であり、「リンゴ1個あたり(1/3)枚」は認めにくい量となるが、場面理解においてこの量の存在を否定することはできない。また、技術的にも、割り算を掛け算に変換する際に、数学的なテクニックとしてでなく、意味的な妥当性を説明するうえで不可欠となる。また、「温度」はその量とし手の性質上、内包量に分類されるが、関係量としての役割を果たさない量となっている。これらのことから、本研究では「関係量」という考え方をを用いる。

3. 乗除二重三角図の授業実践

3.1. 授業目的

(1) 二重三角図を描けるか、(2) 二重三角図に基づいて立式ができるか、(3) 文章題に対する理解を向上させることができるか、を検証すること目的として2時限の授業を実施した。(1)(2)に関しては、授業実施後に、言語的な場面設定に対する二重三角図作成及び立式課題を与えて、その結果を評価した。(3)に関しては、授業の前後において関係量保存性課題を課し、その得点変化に基づいて評価した。

国内外において単位文章題の図的表現・スキーマは様々に提案されているが、二重三角図と同様なものは見当たらない。教員および大学生を対象として予備実験を通して、作成可能性と文章題理解への有用性を示す結果も得ているが、児童に関しては未知である。担当教員との協議の結果、授業として成り立つとの判断の元、今回の実施に至っている。なお、担当教員は所属小学校の教員会において趣旨説明を行ったうえで、本実践実施の了解を得ている。

3.2. 実施手順

組み立てのための児童は5年生1クラス(23名)である。授業者は当該クラスの担任であり、本稿の共著者である。授業およびテストは以下の手順で実施した。

- ・3月4日：事前テスト(関係量保存性課題)。算数授業内にこの課題用に時間をとって10分間で実施
- ・3月12日：第1回授業。単三角形図。45分
- ・3月18日：第2回授業。二重三角図。45分
- ・3月21日：事後テスト(関係量保存性課題と二重三角図作成・立式課題)。算数授業内に時間をとって15分間で実施

なお分析では、欠席等でデータに欠落がある4名を除いた19名分を用いた。

3.3. 授業内で用いた例題

図4~図8は第1回目の授業で提示された例題や提出物である。例題はロイロノートを用いて用意され、ネットワークで児童個人用のタブレットに提供された。児童は個人用タブレットで三角図の作成・提出を行った。活動は、教授者による例示(ロイロノートを電子黒板で提示)、児童による個別活動、児童同士の話し合い、および児童から提出された三角図の電子黒板での

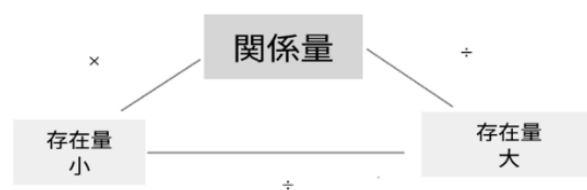


図4 児童に提示した単三角図

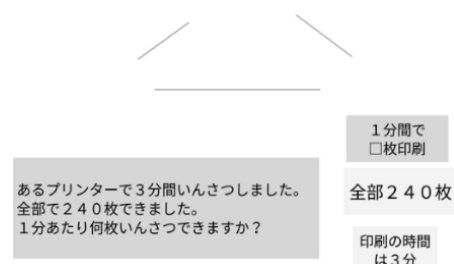


図5 三角図組立課題

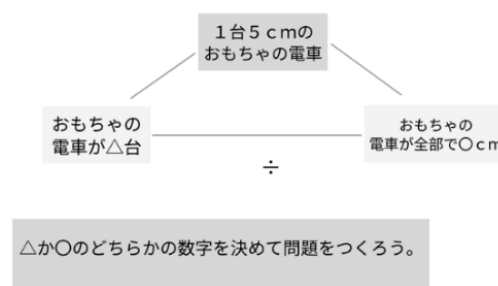


図6 作問課題(1)

表示・話し合い、の組み合わせに行われた。

図4は単三角形を説明するために用いられた。図5は問題文に合わせて提供された部品を用いて三角図を組み立てる課題であり、図6は三角図からの作問課題である。図7、8は、それぞれ図5、6に対する学習者の回答となっている。図9は児童同士の話し合いの様子である。

図10～13は第2回目の授業で提示されたものである。冒頭、図10を用いて関係量としてどのようなものがあるかの問いかけを行った。この問いかけに対して、二つの異なる関係量があり得るとの指摘が児童

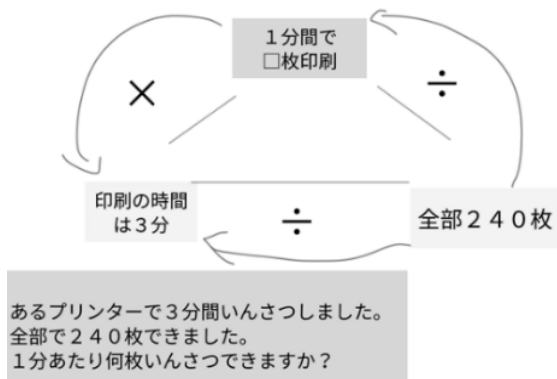


図7 児童の組立て例(1)

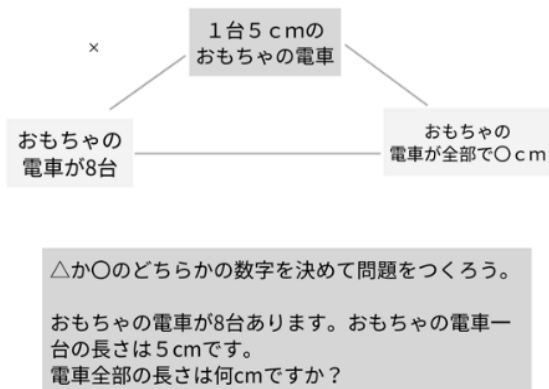


図8 児童の作問例(1)



図9 児童同士の相談の様子

からあり、教授者はその指摘に基づいて三角図の二重化につなげた。なお図10では、「1あたり」という表現に言葉と数字を入れることで関係量を作成する。図11は二重三角図の組み立て課題であり、二つの関係量を児童が自分で作成する必要がある。図12は二重三角図からの作問課題であり、図13は作問例となっている。

3.4. 評価に用いた課題

二重三角図作成・立式課題

今回の実践で用いた二重三角図作成・立式課題を図14に示した。児童は提示された場面（左下方の長方形内）を、二つの存在量と二つの関係量で構成される

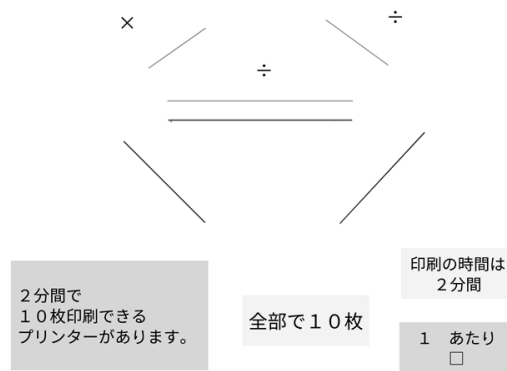


図11 二重三角図組立課題

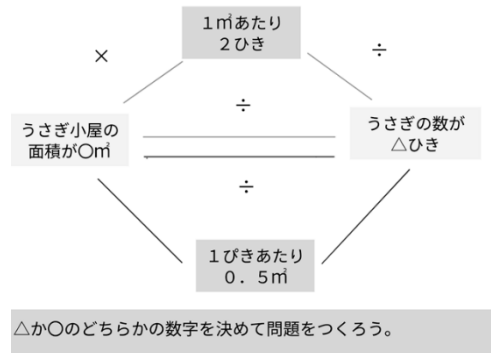


図12 作問課題(2)

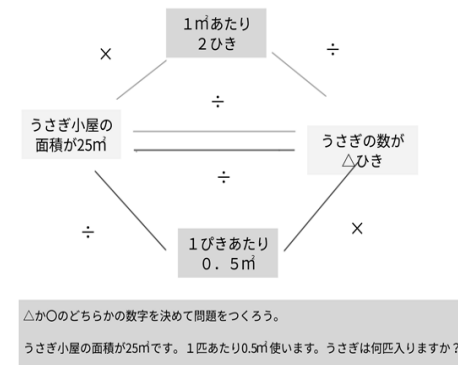


図13 児童の作問例(2)

二重三角図として表現することが求められる．存在量はブランクの長方形に，関係量は「1__あたり□__」と記載されている長方形に言葉と数字を書き込むことで作成する．関係量を二つ作成するためには，関係量の長方形をコピーする必要がある．書き込みやコピーは，ロイロノートの機能を用いている．さらに，この二重三角図に基づいて，成立している式を全て書き出すことが求められた．式は別途紙に書いて提出している．図15に提出された二重三角図と式の例を示す．結果とその分析は3.6で述べる．

二重三角図を作成するためには，同一場面において対となる二つの関係量が存在することを認識する必要がある．同一場面において二つの関係量が対となって存在していることは，教科書でも扱われており，たとえば，人数と面積から込み具合を考える問題で，「一人あたりの面積」と「面積あたりの人数」の両方を導く例が該当する．したがって，二重三角図が対となる二つの関係量の記述を求めること自体は算数の範囲を逸脱したものではないといえる．

また，著者らの先行研究において，13名の教職大学院生（全員教職免許取得者，小学校免許11名，現職教員5名）二つの存在量間に成立する二つの関係量を考

える課題を行った後，算数文章題の観点から「二つの存在量間の二つの関係量は重要であるか」という設問に回答してもらったところ，全員が強い肯定（5件法）とする回答が得られている[5]．また，文章題学習における対となる関係量への認識の重要性を指摘する先行研究もいくつかみられる[6-8]．

しかしながら，[8]では，馴染みのある関係量とそうでない関係量（たとえば，「時間あたりの給与：時給」と「給与あたりの時間」）では認識に違いがあることを指摘しており，文系大学生110名を対象とした調査において，馴染のある関係量を示したうえで，その対となる馴染みのない関係量が同様に妥当な意味を持つかどうか判断させたところ，同様に妥当な意味を持つとの回答が5割に達しないことを報告している．また，筆者らが情報系大学生・大学院生17名に対して行った調査でも，二つの存在量を提示し，その二つの存在量において比例関係が存在するという条件を設定したうえで，成立する式をできるだけ多く書き出すという課題を3問与えたところ，3問とも二つの関係量を記述できた割合は56%であった[4]．この3問は，（問1）リンゴの個数とお皿の枚数，（問2）シュートの回数とゴールの回数，（問3）ジュースの重さと果汁の重さ，の問題であり，問1では非小数関係量（皿1枚あたりのリンゴ個数）が100%で，小数関係量（リンゴ1個あたりの皿の枚数）が56%の正答率であり，問3では，非小数関係量（果汁の重さあたりのジュースの重さ）が72%で，小数関係量（ジュースの重さあたりの果汁の重さ）が100%の正答率であった．これは，[8]の「学校で教えられる式や日常生活で用いる式のみが正しいと考えている学習者の実態が示された」という指摘に合致するものといえる．

関係量の指導法や理解度の調査は数多く報告されているが，それらでは関係量が一つであることが前提となっており，その一つは日常的に用いられるなじみ深い量が用いられている．たとえば，[10]では，「（問1）1時間に10kmの速さで5時間進みます．何km進みますか．（問2）1時間に10kmの速さで進みます．60km進みました．何時間かかりましたか．（問3）75km進むのに5時間かかりました．1時間では何kmの速さで進みましたか．」といった三用法に対応する問題を与え，難易度の主観評価を行っているが，与えられている関係量は「速度」のみであり，対となる関係量である「ラップタイム」は扱われていない．また，問3では，「75km進むのに5時間かかりました」から二つの関係量が導きうるが，一つの特定するために「1時間では」という関係量を特定する情報が提供されている．これらのことは，対となる関係量が学習対象ではあるものの，乗除場面において必然的に

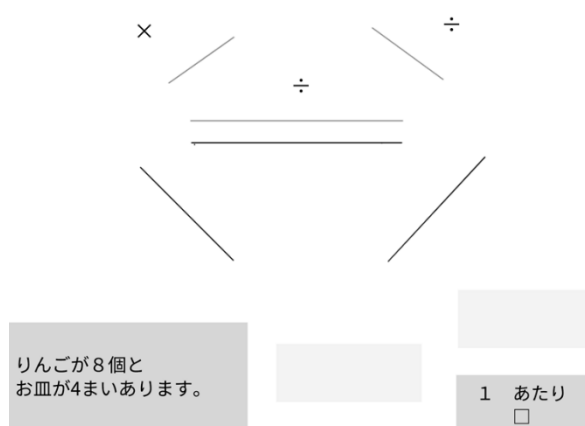


図14 二重三角図作成・立式課題

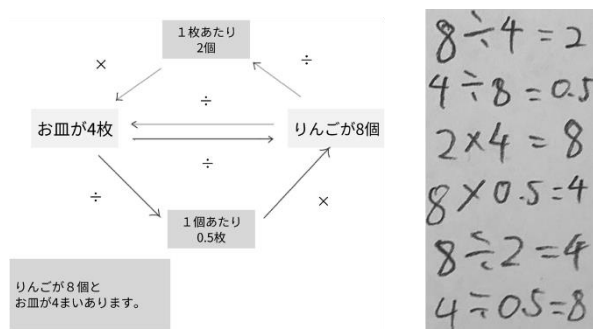


図15 二重三角図作成・立式課題への回答

存在する量としては取り扱われていないことが伺われる。したがって、対となる関係量を必然のものとして取り扱う二重三角図は学習者にとって新規性の高いものであり、その作図を学習者が事前にできるようになっていることは考えにくい。このことから、授業後に学習者が二重三角図を書けるようになれば、授業の効果と判断できる。また、二重三角図から正しく立式できるかどうかによって、二重三角図の理解度合いが現れると考えた。二重三角図には方向性のある割り算が四つ含まれており、かつ、「小さい数を大きい数で割る割り算」と「1より小さい数で割る割り算」が含まれており、数字と演算だけでなく、意味を踏まえて立式する必要がある。なお、「パターンを覚えているだけ」との指摘もありうるが、二重三角図は単位文章題における量間の必要十分な関係を表しているといえるので、この関係をパターンとして利用可能であることは、単位文章題の理解を示している。このようなパターンは「スキーマ」と呼ぶことができる。

関係量保存性課題

ある場面において比例関係が存在している場合、存在量に変化しても関係量は保存される。このことを関係量の保存性と呼び、関係量に対する理解を評価として、この保存性を問う関係量保存性課題を用いる試みがこれまでにいくつかの研究でなされている[11,12]。[13]では、幾つかの調査の結果として、小学生で19-44%、大学生でも66-75%の正解率であったと報告している。二重三角図を学ぶことによる算数文章題理解への効果をこの関係量保存性課題も用いて評価する。二重三角図は存在量と関係量の違いを可視化しており、また、

(1) 速度問題
[問題1] (分子量：距離変化)
時速30kmで走り続ける車が15km走った時と、120km走ったときでは、どちらがいか、どちらも同じか
[問題2] (分母量：時間変化)
時速50kmで走り続ける車が1時間走った時と、3時間走った時では、どちらが速いか
(2) 1箱あたりリンゴ問題
[問題3] (分子量：個数変化)
リンゴが1箱30個入っているとして、リンゴが全部で60個ある場合と、リンゴが全部で90個ある場合で、1箱に入っているリンゴの個数はどちらが多いか、どちらも同じか
[問題4] (分母量：箱数変化)
リンゴが1箱30個入っているとして、5箱ある場合と、10箱ある場合で、1箱に入っているリンゴの個数はどちらが多いか、どちらも同じか
(3) 時間あたり距離問題
[問題5] (分子量：距離変化)
1時間で20km進む車がある。10km走った時と、100km走った時で、どちらが1時間で走る距離が長いか、あるいは同じか
[問題6] (分母量：時間変化)
1時間で60km進む車がある。1時間走った時と、4時間走った時で、どちらが1時間で走る距離が長いか

図 1 6 関係量保存性課題

二つの存在量の関係として関係量を定義している。二重三角図を用いた文章題の理解が進むことで、関係量の保存性への理解も進むと期待できるので、この課題のスコアの向上として学習効果を測定できると考えた。

本実践で用いた関係量保存性課題を図16に示した。問題1、2は「速度」を関係量とした問題、問題3、4は「1箱あたりのリンゴの個数」を関係量とした問題、問題5、6は速度を「1あたり量」に書き換えて、「1時間あたりの距離」を関係量とした問題となっている。問題1、3、5が比較量の変化に対する関係量の保存性、問題2、4、6が基準量の変化に対する関係量の保存性となっている。いずれも形式的には同じであるが、問題3、4は関係量が1箱あたりのリンゴの個数という具体性のある量となっているため、他に比べて簡単であり、問題5、6は1あたり量としての表現となっているため、速度を関係量とする問題1、2に比べて簡単ではないかと予想した。

3.5. 結果分析

関係量保存性課題の結果と分析

表1に関係量保存性課題の結果を示した。事前事後のスコアについて合計点、および三種類の問題それぞれの事前事後スコアについてウィルコクソンの符号化順位検定を行ったところ、合計点 ($p=0.000$, 効果量大 ($r=0.601$)), 速度問題 ($p=0.000$, 効果量大 ($r=0.584$)), リンゴと皿問題 ($p=0.009$, 効果量中 ($r=0.426$)), 時間あたり距離問題 ($p=0.002$, 効果量大 ($r=0.597$)) となり、いずれも有意差があった。授業の影響で、関係量保存性について理解が進んだことが窺われる。

事前テストにおける三種類の問題のスコアについてフリードマン検定を行ったところ有意差があったので ($p=0.002$), Holm 法を用いて多重比較したところ、速度問題とリンゴと皿問題の間で有意差があり ($p=0.17$, 効果量中 ($r=0.447$)), 他の間では有意差は見られなかつた。

表 1 事前テストにおける関係量保存性課題のスコア。各種課題 2 点・合計 6 点満点。カッコ内標準偏差 ($n=19$)

	事前	事後
速度	0.158(0.501)	1.895(0.459)
リンゴと皿	1.053(0.848)	1.737(0.562)
時間あたり距離	0.579(0.769)	1.632(0.684)
合計	1.789(1.507)	5.263(1.408)

これは関係量保存性課題設定時の仮説に沿った結果になっていると判断している。事後テストにおける三種類問題のスコアについてもフリードマン検定を行ったところ有意差がなくなっており ($p=0.115$), また天井効果も表れている。これは二重三角図を用いた学習によって関係量への理解が進んだこと結果を思われる。

文 献

- [1] 平嶋宗. (2019). 作問学習に対する知的支援の試みと実践—組立としての作問および診断・フィードバック機能の実現—. 科学教育研究, 43(2), 61-73.
- [2] 平嶋宗. (2021). 思考の外在的行為化の場としての仮想空間—学習支援の立場から—. 人工知能, 36(4), 476-479.
- [3] 平嶋宗. (2023). 算数文章題乗除の統合的解釈と学習課題化. 教育システム情報学会研究会報告, 38(4), 16-23.
- [4] 平嶋宗. (2024). 量間の演算関係を対象とした算数文章題における乗除の統合的理解の ための二重三角スキーマ—Worked Exampleとしての知識モデル外在化の試み—, 信学技報, ET2024-5, pp.24-31
- [5] 守山映見里, 尾坂隆児, 清水拓海, 林雄介, 平嶋宗. (2024). 三量命題モデルのオープン化としての複数算数文章題連結の組立演習システムの開発と予備的評価. 教育システム情報学会誌, 41(1), 26-31.
- [6] 小田切忠人. (1987). 算数科における「1 あたり量」の指導に関する一考察, 琉球大学教育学部紀要第二部(30): 1-6.
- [7] 藤村宣久. (1990). 児童期の内包量概念の形成過程に関する縦断的研究. 発達心理学研究, 1(1), 70-78.
- [8] 進藤聡彦, & 麻柄啓一. (2014). 内包量の公式における「変数の入れ替え原理」の理解. 教授学習心理学研究, 10(1), 12-24
- [9] 丹尾春彦. (2015). 逆内包量による分数除法の指導: 分数のわり算はなぜわる数をひっくり返してかけるのか. 教授学の探究, 29, 19-54.
- [10] 河崎雅人, 遠藤あず美. (2017). 小学校高学年における内包量の理解度と主観的難易度の分析. 数学教育学会誌, 58(3-4), 87-95.
- [11] 斎藤裕. (2002). 短大生を対象とした内包量の理解に関する研究. 県立新潟女子短期大学研究紀要, 39, 25-35.
- [12] 辻千秋・伊證三之・石井恭子(2010). 「内包量概念の形成に関する調査研究」『福井大学教育実践研究』第 35 号, pp.97-102
- [13] 麻柄啓一. (2001). 内包量に関する学習者の誤概念. 科学教育研究, 25(5), 295-303.

二重三角図組立・立式課題の結果と分析

19名中17名(89%)が二つの関係量を正しく作成することができた。また、15名(79%)が6個の式を正しく立式できた(表2)。事前合計スコア, 事後合計スコア, 二つの関係量を正しく作成できたかどうか(二値), 6個の式を正しく立式できたかどうか(二値)についてスピアマンの順相関係数を計算したところ, 事後合計スコアと立式($r=0.617, p=0.005$), 事後合計スコアと関係量($r=0.492, p=0.033$), および立式と関係量($r=0.664, p=0.02$)に有意な相関があり, いずれも中程度であった。

二重三角図組立・立式課題は授業の三日後に実施されたものであり, 復習などを経ずに行ったにもかかわらず, 9割近くの児童が二つの関係量を作成でき, 8割の児童が立式までできたことは, 二重三角図の作成と二重三角図からの立式能力を多くの児童が獲得できていることを示唆する。さらに関係量保存性課題のスコアとの相関は, この獲得が学習者の文章題理解に貢献していることを示唆するものといえる。これらの結果より, 本実践の目的である, (1)二重三角図を描けるか, (2)二重三角図に基づいて立式ができるか, (3)文章題に対する理解を向上させることができるか, についていずれも肯定できたと判断している。

表2 二重三角図組立・立式課題の結果。二重三角図の完答者は, 二つの関係量を正しく作成した人数。立式は, 6つの式を正しく立式した人数 (n=19)

	完答者	非完答者
二重三角図	17	2
立式	15	4

4. まとめ

比例の場面が二重三角図として表現される量と量間の関係を持つことは自明といえる。したがって, 場面理解の深化を目指す上で, 二重三角図を学習対象化することも妥当性がある。ここで問題となるのは, 学習可能性と, その学習がどの程度場面理解の深化に貢献するかということになる。本稿報告した実践は, 一事例であり, また, 評価の方法も限定的ではあるが, 二重三角図が学習可能であり, また, その学習が場面理解の深化に貢献することを示唆するものとなっている。今後さらに二重三角図の実践的授業方法を様々に考案し, 実践・評価することが必要となる。また, 従来の教科書的な説明との差分を踏まえたうえで, 二重三角図の妥当性・優位性を検討・検証していくことを予定している。