

幾何学的制約を考慮したシェル構造物の形状最適化

(Shape Optimization of Shell Structures
Considering Geometrical Constraints)

平成25年9月

藤田慎之輔

目次

第 1 章	序論	1
1.1	研究の背景	1
1.2	既往の研究	2
1.3	研究の目的と方法	3
1.4	論文の構成	4
1.5	発表論文	5
第 2 章	微分幾何学と曲面の代数不変量	7
2.1	はじめに	7
2.2	微分幾何学の概要	8
2.2.1	反変テンソルと共変テンソル	8
2.2.2	基底ベクトル	9
2.2.3	計量テンソル	10
2.2.4	エディントンイプシロン	11
2.2.5	反変成分と共変成分	12
2.2.6	密度量	12
2.3	テンソル積ベジエ曲面の代数不変量	14
2.3.1	基底関数の導関数	14
2.3.2	各種テンソルの導出	14
2.3.3	代数不変量	16
2.4	三角形パッチベジエ曲面の代数不変量	17
2.4.1	基底関数の導関数	17
2.5	代数不変量と曲面形状との関係	18
2.6	各種ベクトルおよびテンソルの微分	20
第 3 章	ひずみエネルギーと代数不変量を考慮した連続体シェルの形状最適化	21
3.1	概説	21
3.2	感度解析	22
3.2.1	ひずみエネルギーの節点 z 座標に関する感度解析	22
3.2.2	シェル中央面の面積の節点 z 座標に関する感度解析	22
3.2.3	節点 z 座標に関する感度とベジエ曲面の制御点の z 座標 q_z に関する感度の関係	23
3.2.4	β_0 不変量の制御点の z 座標 q_z に関する感度解析	24
3.2.5	β_1 不変量の制御点の z 座標 q_z に関する感度解析	24
3.2.6	β_2 不変量の制御点の z 座標 q_z に関する感度解析	25

3.2.7	γ_1 不変量の制御点の z 座標 q_z に関する感度解析	25
3.2.8	γ_2 不変量の制御点の z 座標 q_z に関する感度解析	26
3.2.9	γ_3 不変量の制御点の z 座標 q_z に関する感度解析	26
3.2.10	α 不変量の制御点の z 座標 q_z に関する感度解析	26
3.3	テンソル積ベジエ曲面により形状記述される正方形平面を有するシェル	27
3.3.1	最適化モデル	27
3.3.2	例題 1: 代数不変量制約を与えない場合	28
3.3.3	例題 2: β 不変量制約を与えて凸らしさを制御する場合	30
3.3.4	例題 3: γ 不変量制約を与えて山らしさを制御する場合	33
3.3.5	例題 4: 球らしさを最大化する場合	36
3.4	テンソル積ベジエ曲面により形状記述される楕円体シェル	42
3.4.1	最適化モデル	42
3.4.2	例題 1: 代数不変量制約を与えない場合	43
3.4.3	例題 2: β 不変量制約を与えて凹らしさを制御する場合	45
3.4.4	例題 3: γ 不変量制約を与えて山らしさを制御する場合	48
3.5	三角形ベジエパッチにより形状記述される三角形平面を有するシェル	51
3.5.1	最適化モデル	51
3.5.2	例題 1: 代数不変量制約を与えない場合	52
3.5.3	例題 2: β 不変量制約を与えて凸らしさを制御する場合	54
3.5.4	例題 3: γ 不変量制約を与えて谷らしさを制御する場合	57
3.5.5	例題 4: 球らしさを最大化する場合	60
3.6	三角形ベジエパッチにより形状記述される球形平面を有するシェル	66
3.6.1	最適化モデル	66
3.6.2	例題 1: 代数不変量制約を与えない場合	67
3.6.3	例題 2: β 不変量制約を与えて凸らしさを制御する場合	69
3.6.4	例題 3: γ 不変量制約を与えて谷らしさを制御する場合	72
3.7	3章の結論	75
第4章	ひずみエネルギーと展開可能性を考慮した連続体シェルの形状最適化	77
4.1	概説	77
4.2	区分領域の設定	78
4.3	1/4 領域ベジエパッチにより形状記述される正方形平面を有するシェル	79
4.3.1	最適化モデル	79
4.3.2	例題 1: 代数不変量制約を与えない場合	80
4.3.3	例題 2: 可展条件を導入する場合	82
4.4	三角形ベジエパッチの連結により形状記述される異形平面を有するシェル 1	86
4.4.1	最適化モデル	86
4.4.2	例題 1: 代数不変量制約を与えない場合	87
4.4.3	例題 2: 可展条件を導入する場合	90
4.5	三角形ベジエパッチの連結により形状記述される異形平面を有するシェル 2	94
4.5.1	最適化モデル	94
4.5.2	例題 1: 代数不変量制約を与えない場合	95

4.5.3	例題 2：可展条件を導入する場合	97
4.6	三角形ベジエパッチの連結により形状記述される異形平面を有するシェル 3	101
4.6.1	最適化モデル	101
4.6.2	例題 1：代数不変量制約を与えない場合	103
4.6.3	例題 2：可展条件を導入する場合	106
4.7	4 章の結論	110
4.8	模型製作による検証	112
第 5 章	線織面の形状最適化	115
5.1	はじめに	115
5.2	ベジエ曲線を用いた線織曲	116
5.3	x, y, z 座標を設計変数とする場合に生じる潜在的な問題	116
5.4	感度解析	119
5.4.1	シェルの各要素の辺の長さの平均からの差の二乗和の節点 z 座標に関する感度解析	119
5.4.2	シェルの各要素の面積の平均からの差の二乗和の節点 z 座標に関する感度解析	120
5.4.3	シェルの水平投影面積の節点 z 座標に関する感度解析	120
5.5	数値最適化例 1 – シリンダーシェル –	122
5.5.1	最適化モデル	122
5.5.2	最適化概要	123
5.5.3	最適化結果と考察	124
5.6	数値最適化例 2 – 負のガウス曲率を有するシェル –	129
5.6.1	最適化モデル	129
5.6.2	最適化概要	130
5.6.3	最適化結果と考察	130
5.7	数値最適化例 3 – 不整形な形状を有するシェル –	135
5.7.1	最適化モデル	135
5.7.2	最適化概要	135
5.7.3	最適化結果と考察	136
5.8	5 章の結論	141
第 6 章	ひずみエネルギーと部材長一様化を考慮したラチスシェルの形状最適化	143
6.1	はじめに	143
6.2	感度解析	145
6.2.1	節点 z 座標に関する感度係数とベジエ曲面のパラメータに関する感度係数の関係	145
6.2.2	総部材長の節点 z 座標に関する感度解析	146
6.2.3	部材長の平均部材長からの差の 2 乗和の節点座標に関する感度解析	146
6.3	曲げモーメントの表記	147
6.4	部材長一様化の方法	148
6.4.1	最適化問題の定式化	148
6.4.2	最適化例による収束性の比較	149
6.5	三角形グリッドを有するラチスシェル	152
6.5.1	最適化モデル	152

6.5.2	例題 1：節点の z 座標を設計変数とした場合	153
6.5.3	例題 2：節点の xyz 座標を変数とした場合	154
6.5.4	例題 3：制御点の z 座標を変数とした場合	156
6.5.5	例題 4：制御点の xyz 座標を変数とした場合	156
6.5.6	例題 5：曲面上の節点位置を定めるパラメータを変数とした場合	162
6.6	四角形グリッドを有するラチスシェル	168
6.6.1	最適化モデル	168
6.6.2	例題 1：節点の z 座標を設計変数とした場合	169
6.6.3	例題 2：節点の xyz 座標を変数とした場合	169
6.6.4	例題 3：制御点の z 座標を変数とした場合	169
6.6.5	例題 4：制御点の xyz 座標を変数とした場合	172
6.6.6	例題 5：曲面上の節点位置を定めるパラメータを変数とした場合	172
6.7	数値解析例 4 一部材グループを考慮した場合	182
6.7.1	最適化モデル	182
6.8	6 章の結論	190
第 7 章	結論	193
付録 A	三角形平面シェル要素のマトリクス詳細	197
A.1	三角形平面シェル要素	197
A.1.1	面内変形要素	197
A.1.2	面外変形要素	198
A.1.3	三角形平面シェル要素	200
A.1.4	座標変換マトリクス	201
A.1.5	要素座標系における節点座標	201
A.1.6	等価節点力ベクトル (自重)	201
A.2	各種マトリクスの微分	202
A.2.1	要素面積の微分	202
A.2.2	座標変換マトリクスと要素座標系における節点座標の微分	203
A.2.3	面内変形要素剛性マトリクスの微分	203
A.2.4	面外変形要素剛性マトリクスの微分	204
A.2.5	三角形シェル要素剛性マトリクスの微分	206
A.2.6	等価節点力ベクトルの微分	206
付録 B	三次元梁要素のマトリクス詳細	207
B.1	三次元梁要素	207
B.1.1	三次元梁要素	207
B.1.2	要素両端の断面力	208
B.1.3	座標変換マトリクス	208
B.1.4	要素座標系における節点座標	211
B.1.5	等価節点力ベクトル (自重)	211
B.2	三次元梁要素の各種マトリクスの節点 z 座標に関する微分	212
B.2.1	要素長さの微分	212

B.2.2	座標変換マトリクスの微分	212
B.2.3	要素座標系における剛性マトリクスの微分	214
B.2.4	三次元梁要素の剛性マトリクスの微分	215
B.2.5	等価節点力ベクトルの微分	215
付録 C	ベジエ曲面による形状表現	217
C.1	ベジエ曲線	217
C.1.1	ベジエ曲線の構成	217
C.1.2	ベジエ曲線の性質	218
C.2	ベジエ曲面	219
C.2.1	テンソル積ベジエ曲面	220
C.2.2	三角形パッチベジエ曲面	220
C.2.3	ベジエ曲面の性質	221
C.3	ベジエ曲面の制御点と有限要素の節点との関係	221
C.3.1	テンソル積ベジエ曲面の制御点と有限要素の節点との関係	222
C.3.2	三角形パッチベジエ曲面の制御点と有限要素の節点との関係	223
付録 D	最適化手法	227
D.1	概説	227
D.2	単一目的最適化問題	227
D.3	大域的最適解と局所的最適解	228
D.4	最適性条件	228
D.5	制約付き単一目的最適化手法	230
D.5.1	逐次二次計画法	230
D.6	多目的最適化問題と単一目的最適化問題	234
D.6.1	解の概念	234
D.6.2	制約法	235
参考文献		237
謝辞		240

第1章

序論

1.1 研究の背景

建築と幾何学は密接に関係している。例えば、ガウディ建築の最高傑作と名高いグエル教会や、サグラダファミリアなどには、カテナリーアーチが多用され、幾何学が建築構造体としての物理学へ昇華された傑作といえる。その他にも、裁断球殻により構成されるクレスゲ・オーディトリウム(エーロ・サーリネン 1955)、EP 曲面により構成されるジョン・F・ケネディ国際空港の TWA ターミナルビル(エーロ・サーリネン 1962)、HP 曲面により構成されるソチミルコのレストラン(フェリックス・キャンデラ 1957)や、同じく HP 曲面を用いた東京カテドラル聖マリア大聖堂(丹下健三 1964)など、幾何学が建築に取り入れられた例は枚挙にいとまがない。

一方で、施工技術や解析技術の進歩に伴い、近年では、古典的な幾何学にとらわれない自由な形態を有する建築構造物もみられるようになった。北京オリンピックのメインスタジアム(ヘルツォーク&ド・ムーロン 2008)や、まだ記憶に新しい新国立競技場の設計コンペ1等案(ザハ・ハディド 2012)などは、一見すると形態に幾何学を見出すことのできない複雑なフォルムを有している。他方、幾何学の世界で 1950 年代以降、船体や車両のフォルムの表現のために生み出されたパラメトリック曲面と呼ばれる形状表現自由度の高い曲面が、CAD、CAM 技術の発展とともに建築の世界にも取り入れられるようになり、前述のような複雑な形態もかなりの精度で表現が可能となっており、スプライン曲面により構成されるロレックス・ラーニング・センター(SANAA2010)などに応用されている。

建築における幾何学とは、すなわちその形態を指すので、意匠的な側面に目を奪われがちであるが、それはあくまで建築を構成する数ある要素の 1 つに過ぎない。建築形態と力学形態の結びつきは不可避であり、建築構造物の創生に際し造形的な形を追求したとしても、力学的な要求を満たすことが必要である。建築にはスケールがあり、そこで構造と融合することが重要となる¹⁾。とりわけ、シェルなどの大空間構造物は、形の持つ強さによって大スパンを可能にしてきた構造形式であり、シェル構造の形を変えることは、力学的な強さを変えることに直接的に繋がることから、シェル構造に対して力学的な機能を追求することは非常に重要である。一方で建築は、機械製品のように画一大量生産されるものではないことに加え、施工性、経済性、社会性、審美性といった多様な要求を満足することが求められる特異な存在である²⁾。デザインとしては優れていても、その形が複雑であれば、部材の取り合いが複雑化し、施工が困難となったり、製作が不可能となる。また、三角形の部屋は使いにくいなどといったように、建築の形は、機能性にも強い相関がある。建築に求められる制約条件の多くは、建築の形態に課せられるものであり、幾何学とは切り離すことのできない存在である。

近年、力学的性能を最大化するような建築形態を求める手法の研究が盛んに行われている。力学的性能というのは、前述のとおりシェル構造におけるもっとも重要な構成要素の 1 つであると同時に、数学的定式化になじみやすい要素であるといえる。一方で、建築は力学だけでは成立しない。幾何学と密接に関係している数多くの非力学的性能を高いレベルで満足することが求められ、複雑な形態が求められる現代において、それらを設計者の経験や直感だけで満足するのは極めて困難である。

幾何学とは、モノの形をはかる学問分野の総称である。建築に求められる多様な条件を満足するために、幾何学的制約を定量的な形で与えることができれば、設計のプロセスにおいて合理的な形態を導き出す一助となると考えられる。

1.2 既往の研究

シェル構造に対して力学的な機能を最大化するような形態を求める研究はこれまでに多く存在する。まず、連続体シェルを扱った研究について、ここでは特にシェル中央面の形状決定問題を扱ったものを挙げる。この種の研究については、1908年のMilankovic³⁾の研究が世界で最初とされている。そこでは、シェル断面内の応力が同時に材料強度に達することを意図して、曲面全体で膜応力が一様となる条件を膜力の釣り合い方程式に与え、これを満たすシェル厚の中央面の形状を求める問題として扱われている。外力は自重と液体の内圧が与えられている。この等応力曲面を求める問題は、Flugge⁴⁾などによっても解かれている。特に液体の内圧による解は、表面張力による水滴の形状に対応し、実際の液体タンクとして設計されている。ところで、組み合わせ応力下では材料の破壊条件はより複雑であり、実際には膜応力を一様とすることは適切ではない。Biezeno⁵⁾はこれを指摘し、トレスカの降伏条件を膜応力の満たすべき条件として与え、シェル曲面の強度を一様とする問題を扱っている。同様の問題はStubble⁶⁾、Brown⁷⁾などによっても扱われている。以上の研究は、いずれも膜力の釣り合い式に、応力分布を指定するかあるいは分布に関して何らかの条件を与えて釣り合い形状を求めるもので、曲げによる影響は考慮されていない。このほか、シェル曲面を決定する簡単な方法として、柔軟な膜の大変形解析を行い、変形後の釣り合い形状を利用するものも見られる⁸⁾。曲げモーメントの発生しないシェルの形状を解析的に求めたものにHorne⁹⁾の研究がある。そこでは、分布外力は考慮されていないものの、シェル上下端に一定の鉛直力を受ける軸対称シェルに対し、膜の基礎方程式に曲率変化が0という条件を付加して、シェル形状の満たすべき微分方程式を導出し、解を求めている。

これら初期の研究は、最適なシェルの形態が満たすべき条件を仮定して基礎方程式に与え、形状を求めるかあるいは残された変数の関係を調査したものである。それに対して、機械工学の分野では最適化手法が発展している。最適化手法は、物理的な機能を最大限に発揮するような形態を得るための強力なツールとして、航空機や自動車の形状決定に利用されるようになり、汎用ソフトウェアも主として機械設計向けに市販されるまでになったが、建築構造設計の分野での実用化は大きく遅れていた。これは、前述したように、建築に要求される項目の多さ、ならびに一品生産であることなどが原因として挙げられる。しかし、解析技術の進歩、最適化手法の発展、整備により1970年代には数理計画法に基づく建築構造物の最適設計法の概念が明確な形で表れてきた。これは、従来の解仮定型の形状決定問題とは異なり、構造形態を決める各部の寸法、形状を代表する値を変数とし、その構造物のある種の目的関数を定め、数学的な最適化に関する種々の方法を用いて、与えられた制約条件下で目的関数を最大あるいは最小とする変数を決める方法である。数理計画法による最適設計問題は、主にトラスや骨組構造の力学的な制約下における最小重量設計問題を中心に発展した。トラスの最小重量問題において、節点座標を設計変数として形状最適化を行った初期のものとしてPedersen¹⁰⁾による研究がある。連続体シェルの最適化問題においても、数理計画法を用いた感度解析による逐次修正が行われ、構造解析には有限要素法のような離散化手法が広く用いられるようになった。シェルの形状を設計変数とし、応力の最大値を目的関数として最適化を行ったものに、Trompette and Marcelin¹¹⁾、Younsheng¹²⁾、Barbosa and Soares¹³⁾らの研究などがある。これらはいずれも軸対称シェルを扱っている。また、この頃より、航空機や自動車の設計に利用されてきたCAGD(Computer Aided Geometric Design)¹⁴⁻¹⁷⁾と呼ばれる、パラメトリックな表現により曲面を生成する手法が、建築の分野でも応用が見られるようになる。Ramm¹⁸⁾は、パラメトリック曲面の1つであるベジエ曲面を用いてシェルの曲面を記述し、最適化問題として外力により生ずるひずみエネルギーを目的関数とし、制約に構造材の体積一定の条件を与えており、Isler¹⁹⁾のシェルに見られるような点支持されたシェルを解析対象とし、剛性の高いシェル形状を求めている。文献²⁰⁾ではこの問題における最適形状の、シェル縁におけるミーゼス応力の分布が示されており、幾何学的な形状と比べて応力集中が回避される結果が示されている。また、

同文献中には、膜の大変形解析により形状決定された四点支持 RC シェルによる載荷実験、材料及び幾何学的非線形解析の結果も示されている。なお、Hinton ら²¹⁾ は同様にひずみエネルギーを目的関数とし、帯板要素を用いて筒状シェルの形状最適化を行っている。この文献では膜応力、曲げモーメント、せん断力のひずみエネルギーに対する寄与率が示されており、最適解では膜応力が支配的になることが示されている。近年では、パラメトリック曲面によりシェル形状を記述し、ひずみエネルギーの感度係数に基づいて自由曲面シェルの形状を決定する手法が実設計に応用されている²²⁾。近年では、曲面の形状のみならず、厚さもパラメトリックに最適化の変数として扱った研究も見られる^{23,24)}。

一方、ラチスシェルの形状最適化問題においても同様のアプローチとして、ベジエ曲面で記述されたシェルの形状や剛性分布を最大化した Ohsaki ら²⁵⁾ の研究や、形状初期不整による座屈荷重の減少を考慮に入れた指標である RS 座屈荷重係数を最大化した山本ら²⁶⁾ の研究などが挙げられる。RS 座屈荷重係数については、藤田ら²⁷⁾ によって連続体シェルを対象とした形状最適化問題にも目的関数として取り入れられている。ラチスシェルは、連続体シェルと異なり、規格化された部材を用いるのが一般的であり、断面形状を最適化する場合、規格化された部材をリストから選択し配置する問題設定を行うことが望まれる。広義には形状最適化問題に含める場合も多いが、この種の問題は特に位相最適化問題と呼ばれ、離散変数問題となるため、断面形状を設計変数とする際は数理計画法に変わる発見的な手法によって解を求めることが多い。このような発見的な手法に基づく形状最適化問題は、2 次元トラスやラーメン骨組などに多く適用例が見られる。発見的な手法に基づく最適化手法は、数理計画法に代表される理論的な最適化手法と比べ、非常に汎用性に優れた手法であり、離散変数問題を扱うことが容易である反面、計算コストが大きく、大規模問題に対して実用的な時間内に最適形状を得るためには様々なパラメータのチューニングが必要であることから、シェルなどの大規模構造物を対象とした研究はあまり行われていない。

近年では、建築に対する考え方は機能主義が支配するその他の工業製品とは一線を画し、建築における主要な機能である力学的な合理性とは別の様々な要求性能を満足することを目指した研究が行われている。特に、発見的な手法に基づくアルゴリズムによる最適化手法は、比較的小規模な問題において近年実設計に多く取り入れられるようになり、アルゴリズムックデザイン²⁸⁾ と呼ばれ 1 つの設計手法としての地位を確立しつつある。

一方、幾何学的制約を考慮したシェルの形状決定問題に対しては、数理計画法を用いたいくつかの手法が提案されている。Ohsaki ら^{29,30)} は、曲面計量を目的関数とすることで意匠性の定量的評価を試みている。浜田ら³¹⁾ は、デザイナーのイメージする曲面を初期形状とすることで、初期形状と最適形状との節点座標の差のノルムを目的関数として意匠性を評価している。近年では、建築構造物にかけられる施工費などが抑制傾向にあり、コスト面の制約も課題となっており、Tang³²⁾ は様々なジオメトリに整形可能で、再利用可能な木製型枠の提案を行っている。ラチスシェルを対象とした研究としては、部材長の種類を少なくすることを目的とした小河ら³³⁾ の研究が挙げられる。そこでは、部材長の完全な一様化は達成されていないものの、長さの近い数種類の部材で構成され、かつ線形座屈荷重が最大化された曲面を得ている。また、Kuijvenhoven ら³⁴⁾ により、あらかじめ与えられた幾何学形状に対して合理的なグリッド配置を行う手法も提案されている。しかし、これら幾何学的制約を考慮に入れた最適化問題は、その定式化の難しさから、感度解析を必要とする数理計画法による研究は数が少なく、さらなる発展が望まれる。

1.3 研究の目的と方法

本研究の目的は、力学的性能に加えて、幾何学的制約を考慮したシェルの曲面形状創生手法の提案である。意匠性や建築計画、施工性等、特に非力学的性能に関わる曲面の幾何学的特性は、その定式化の難しさから、形状最適化問題にこれまで組み込まれてこなかった。そこで本研究では、幾何学的特性を評価可能な数学的指標を提案し、提案した指標を実際に曲面の形状最適化問題に組み込むことによってその適用性を検証する。数多くの解析モデルを取り扱い、手法の汎用性を示すとともに、幾何学的制約を考慮することで形状最適化という数学的に美しい形態創生手法の適用範囲を広げ、本研究が理論的手法に基づく構造形態創生手法を実設計に利用するための礎となることを目指す。

本研究では、シェル構造物を対象とする。複雑な曲面形状を十分な精度で離散化して節点座標をすべて未知量とすると、数理計画法によって最適解を得ることが難しい場合がある。そのような問題に対し、既往の研究では、少数のパラメータで複雑な曲面を表現することが可能であるスプライン曲面が広く用いられている。スプライン曲面の中でも、最も古典的なものがベジエ曲面であり、これにより曲面の形状記述を行い未知量の数を低減したうえで形状最適化を行うアプローチは Ramm¹⁸⁾ らにより有効性が確かめられており、これにより曲面形状の滑らかさを保ったまま形状表現の自由度を大きく損なわずに、大幅な未知量の低減ができる。

形状表現にベジエ曲面を用いて、まず、連続体シェルの形状最適化を行う。力学的性能として本研究では剛性に着目している。従来より、剛性を高めるには、ひずみエネルギーが最小となる形態を求めることが最も合理的であり、既往の研究でも多く実践されている。よって本研究でも、力学的性能の指標としてひずみエネルギーを採用し、これを目的関数として最小化することを基本とする。さらに、代数不変量により曲面の凹凸や山谷を制御することで、意匠性や建築計画に関わる曲面の幾何学的特性を考慮する。また、施工性については、曲面の平面への展開可能性に着目する。型枠作成が容易となることを目的として、曲面が平面に展開可能な曲面(可展面)となるような制約を最適化問題に付加する。また、曲面を直線に展開可能な曲面(線織面)となるような最適化問題の定式化も行う。

ラチスシェルについても同様に、形状表現にベジエ曲面を用いた形状最適化問題を取り扱う。ラチスシェルの幾何学的制約については、部材長の一様性に着目する。曲面を構成する部材の長さをすべて完全に一様化することで、施工性に優れたラチスシェルの形態を模索する。また、部材長のばらつきを制御することで、意匠性に関わる網目の均一性を制御する。部材長を制御する指標としては、部材長の平均部材長からの差の二乗和を採用する。

1.4 論文の構成

論文の構成は以下の通りである。

第2章では、本研究において非力学的性能の評価指標として用いる曲面の代数不変量について概説する。本研究では特に、ベジエ曲面から抽出される代数不変量について、パラメトリック空間上においてそれらを定義し、詳細な定式化を行う。また、型枠の製作上有利な曲面である可展面と線織面についても概説する。

第3章では、連続体シェルを対象とし、代数不変量を考慮した形状最適化手法について述べる。曲面形状をベジエ曲面により表現し未知量の数を低減させた上で、曲面から抽出される代数不変量に制約を有する制約条件付き単一目的最適化問題を定式化し、逐次二次計画法により解くことで、様々な幾何学的特性を有する曲面形状を導く。解析モデルはテンソル積ベジエ曲面で形状記述されるものと、三角形パッチベジエ曲面で形状記述されるものを扱い、様々な解析モデルを通じて得られた曲面の特徴について考察する。

第4章では、連続体シェルを対象とし、展開可能性を考慮した形状最適化手法について述べる。曲面形状をベジエ曲面により表現し未知量の数を低減させた上で、曲面上の任意の点で Gauss 曲率が0となる制約を与えることにより、曲面を可展面とするような制約条件付き単一目的最適化問題を定式化し、逐次二次計画法により解くことで、展開図を作成可能な曲面形状を導く。解析モデルは3章と同様、テンソル積ベジエ曲面で形状記述されるものと、三角形パッチベジエ曲面で形状記述されるものを扱い、様々な解析モデルを通じて得られた曲面の特徴について考察する。

第5章では、連続体シェルを対象とし、可展面と同様に型枠作成上有利な曲面である、線織面で定義される曲面の形状最適化手法について述べる。可展面は、線織面の特別な場合であり、幾何学的制約が極めて厳しいため、得られる形状が錐面や柱面に限定される欠点がある。曲面が線織面となるように代数的に制約を付加することは難しいため、本章では形状を線織面に限定する。2つのベジエ曲線のパラメータの等しい点を結んだ直線の集合で線織面を形成し、その制御点座標を設計変数とすることで形状最適化を試みる。整形な形状から不整形な形状まで様々な解析モデルを通じて得られた線織面の特徴について考察する。

第6章では、ラチスシェルを対象とし、部材長制約を考慮した形状最適化手法について述べる。曲面形状をベジエ曲面により表現し未知量の数を低減させた上で、曲面を構成する部材の長さを一様化するような制約を有する制約条

件付き単一目的最適化問題を定式化し、逐次二次計画法により解くことで、部材長のばらつきを定量的に制御する。また、完全部材長一様化制約を課すことで、すべて同じ長さを持った部材で構成可能な曲面形状を導く。解析モデルは3章と同様、テンソル積ベジエ曲面で形状記述されるものと、三角形パッチベジエ曲面で形状記述されるものを扱い、設計変数の取り方の違いによる最適解の違いにも着目しながら様々な解析モデルを通じて得られた曲面の特徴について考察する。

第7章では、本研究について総括し、今後の展望について述べる。

1.5 発表論文

査読付き論文

- ・ 藤田慎之輔, 大崎純: ひずみエネルギーとパラメトリック曲面の代数不変量を考慮したシェルの形状最適化, 日本建築学会構造系論文集, Vol.74, No.639, pp857-863, 2009.5
- ・ S. Fujita, and M. Ohsaki: Shape Optimization of Free-form Shells Using Invariants of Parametric Surface, International Journal of Space Structures, Vol.25, No-3, pp.147-153, 2010.9
- ・ 藤田慎之輔, 大崎純: パラメトリック曲面で定義されたラチスシェルの部材長一様化と剛性最大化を目的とした形状最適化, 日本建築学会構造系論文集, vol78, No.685, pp495-502, 2013.3

国内会議論文

- ・ 藤田慎之輔, 大森博司, 木村俊明: ひずみエネルギー極小化された自由曲面シェル構造の座屈不安定性状, 日本建築学会大会学術講演梗概集(中国) 構造, pp.761-762, 2008.9
- ・ 藤田慎之輔, 大森博司, 木村俊明: 自由曲面シェル構造の形態創生手法への構造安定性評価の導入, コロキウム構造形態の解析と創生 2008, pp.97-102, 2008.11
- ・ 藤田慎之輔, 大崎純: パラメトリック曲面の代数不変量を考慮した自由曲面シェルの形状最適化, 日本建築学会近畿支部研究発表会, No.2044, 2009.5
- ・ 藤田慎之輔, 大崎純: 三角形パッチベジエ曲面による区分的可展シェルの形態創生, 日本建築学会大会学術講演梗概集(東北) 構造, pp.831-832, 2009.8
- ・ 藤田慎之輔, 大崎純: パラメトリック曲面の不変量操作による多様な自由曲面シェルの形態創生, コロキウム構造形態の解析と創生 2009, pp.123-126, 2009.11
- ・ 藤田慎之輔, 大崎純: シェル曲面の幾何学的局所特性量を考慮した形状最適化, 日本応用数理学会 2010 年 研究部会 連合発表会, 2010.3
- ・ 藤田慎之輔, 大崎純: ラチスシェルの部材長一様化制約下でのひずみエネルギー最小化, 日本建築学会大会学術講演梗概集(北陸) 構造, 2010.9
- ・ 藤田慎之輔, 大崎純: ラチスシェルの部材長一様化のための最適化手法, コロキウム構造形態の解析と創生 2010, pp.71-76, 2010.10
- ・ 藤田慎之輔, 大崎純: 部材グループを考慮した三角形グリッドラチスシェルの部材長一様化のための形状最適化, 日本建築学会大会学術講演梗概集(東海) 構造, 2012.9

国際会議論文

- S. Fujita, and M. Ohsaki: Shape Optimization of Shells Considering Strain Energy and Algebraic Invariants of Parametric Surface, The 9th Asian Pacific Conference on Shell and Spatial Structures, Nagoya, Japan, 2009.5
- S. Fujita, and M. Ohsaki: Shape Optimization of Free-form Shells Considering Strain Energy and Algebraic Invariants of Parametric Surface, Evolution and Trends in Design, Analysis and Construction of Shell and Spatial Structures Symposium of the IASS, Valencia, Spain, 2009.9
- S. Fujita, and M. Ohsaki : Shape Optimization of Shells Considering Quantity of Local Geometric Characteristics, CJK-OSM6(6th China-Japan-Korea Joint Symposium on Optimization of Structural and Mechanical Systems), Kyoto, Japan, 2010.6

その他共著論文など

- M. Ohsaki and S. Fujita : Multiobjective shape optimization of shells considering mechanical and local geometrical performance measures, IWACOM- (2nd International Workshops on Advances in Computational Mechanics), Yokohama, Japan, 2010.4
- 大崎純, 藤田慎之輔 : 四角形グリッドを有するラチスシェルの部材長一様化とひずみエネルギー最小化を考慮した多目的最適化, 日本建築学会 情報システム技術委員会 第 33 回情報システム利用技術シンポジウム, pp.135-138, 2010.12
- M. Ohsaki and S. Fujita : Multiobjective shape optimization of latticed shells for elastic stiffness and uniform member lengths, ALGODE2011(Proceedings of the International Symposium on Algorithmic Design for Architecture and Urban Design), Tokyo, Japan, 2011.3
- M. Ohsaki, N. Ashiya, S. Matsumoto and S. Fujita : Stability of latticed shell with uniform-length hexagonal grid, Paper No. P-0221, Proc. IABSE-IASS Symposium, London, 2011.9

第2章

微分幾何学と曲面の代数不変量

2.1 はじめに

本研究では、曲面構造物を対象とした構造形態創生手法に、意匠性や施工性の指標となることを目的として、曲面の滑らかさに関する代数不変量を導入することを試みる。微分幾何学はその名の示すように、微積分の方法を幾何学の問題に応用する学問であり、Gaussの曲面の研究に始まる。彼は曲面における曲率の概念を定義した。そして、RiemannがGaussの曲面論を n 次元の抽象的な多様体に拡大し、Gaussのアイデアを一般化した。微分幾何学に基づいて、これまでに丸さ、回転性、平面性などの種々の滑らかさの計量(評価尺度あるいは指標)が提案されてきている。

本章ではまず、曲面の滑らかさを測るための道具立て、つまり微分幾何学^{35,36)}について、テンソル解析の基礎理論³⁷⁾と合わせて概説する。その後、種々の曲面の代数不変量について概説する。Gauss曲率や平均曲率などの基礎的事項に加えて、本研究で用いている、伊里ら³⁸⁾による6つの代数不変量、ならびに本研究で新たに提案する不変量のそれぞれについて定式化と併せて概説するとともに、数値例題を通じてベジエ曲面^{*1}の滑らかさを計量し、その特徴について論じる。最後に、次章以降で必要となる、各種ベクトルおよびテンソルの制御点に関する微分を導出する。

*1 ベジエ曲面の概要については、付録Cを参照

2.2 微分幾何学の概要

2.2.1 反変テンソルと共変テンソル

ある座標系 $[x, y, z]^T$ における2つのベクトル $\mathbf{a} = [a_x, a_y, a_z]^T$ と $\mathbf{b} = [b_x, b_y, b_z]^T$ がある。これらのベクトルが $[x', y', z']^T$ という別の座標系で $\mathbf{a}' = [a_{x'}, a_{y'}, a_{z'}]^T$, $\mathbf{b}' = [b_{x'}, b_{y'}, b_{z'}]^T$ と表わされるとする。このとき, $[a_{x'}, a_{y'}, a_{z'}]^T$ が

$$\begin{Bmatrix} a_{x'} \\ a_{y'} \\ a_{z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} & \frac{\partial x'}{\partial z} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} & \frac{\partial y'}{\partial z} \\ \frac{\partial z'}{\partial x} & \frac{\partial z'}{\partial y} & \frac{\partial z'}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

なる変換規則を持っているとき, このベクトルは反変ベクトルであるという。一方, $[b_{x'}, b_{y'}, b_{z'}]^T$ が

$$\begin{Bmatrix} b_{x'} \\ b_{y'} \\ b_{z'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial x'} & \frac{\partial z}{\partial x'} \\ \frac{\partial x}{\partial y'} & \frac{\partial y}{\partial y'} & \frac{\partial z}{\partial y'} \\ \frac{\partial x}{\partial z'} & \frac{\partial y}{\partial z'} & \frac{\partial z}{\partial z'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

なる変換規則を持っているとき, このベクトルは共変ベクトルであるという。

一般に微分幾何学分野では, 反変ベクトルと共変ベクトルを, それぞれ上添え字, 下添え字をつけた文字で表すことで区別する。その慣例に従い, 例えば, 座標成分そのものは反変ベクトルである*2ことを明示すれば, $[x^1, x^2, x^3]^T$ と表わされる。また, ある関数 z の勾配ベクトル $\mathbf{d} = \left[\frac{\partial z}{\partial x^1}, \frac{\partial z}{\partial x^2}, \frac{\partial z}{\partial x^3} \right]^T$ は共変ベクトルである*3ことから, $\mathbf{d} = [z_1 \ z_2 \ z_3]^T$ のように書き表す。つまり, 座標と勾配ベクトルはそれぞれ

$$x^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} x^k, \quad z_{i'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} z_k \quad (2.3)$$

のように指標表示で表される。一般化すれば, 反変ベクトル a^i と共変ベクトル b_i の変換規則が次式のように記述される。

$$a^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} a^k, \quad b_{i'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} b_k \quad (2.4)$$

*2 例えば, 平面において座標成分が $[x^1, x^2]^T$ で表される直交デカルト座標系を角度 θ 回転させた座標系の座標成分を $[x^{1'}, x^{2'}]^T$ とすれば,

$\begin{Bmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{Bmatrix}$ である。一方, $x^{1'} = x^1 \cos \theta + x^2 \sin \theta$, $x^{2'} = -x^1 \sin \theta + x^2 \cos \theta$ より, 座標変換行

列は $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} & \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} \end{bmatrix}$ となり, これは式 (2.1) の変換行列と同義であるため, 座標そのものは反変ベクトルとなる。

*3 変換前の座標系 (x^1, x^2, x^3) における関数 z の勾配ベクトル \mathbf{d} に対し, 変換後の座標系 $(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$ における勾配ベクトルを $\bar{\mathbf{d}}$ とす

れば, $\bar{\mathbf{d}} = \left[\frac{\partial z}{\partial x^{1'}}, \frac{\partial z}{\partial x^{2'}}, \frac{\partial z}{\partial x^{3'}} \right]^T$ と書けることから, $\begin{Bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x^{1'}} \\ \frac{\partial z}{\partial x^{2'}} \\ \frac{\partial z}{\partial x^{3'}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{1'}} \\ \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{2'}} \\ \frac{\partial x^1}{\partial x^{3'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{3'}} & \frac{\partial x^3}{\partial x^{3'}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x^1} \\ \frac{\partial z}{\partial x^2} \\ \frac{\partial z}{\partial x^3} \end{Bmatrix}$ となり, 式

(2.2) より, 勾配ベクトルは共変ベクトルであることがわかる。

ベクトルの成分は添字が1つあれば表現できた。今度はこれを発展させて添え字が2つで表される量 a^{ij} を考える。 a^{ij} は一般的には行列として表現される。この行列の各成分が座標変換によって次のような変換規則に従う時、これを2階の反変テンソルとよぶ。

$$a^{i'j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^l} a^{kl} \quad (2.5)$$

同様に、 b_{ij} の各成分が座標変換によって次のような変換規則に従う時、これを2階の共変テンソルとよぶ。

$$b_{i'j'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{j'}} b_{kl} \quad (2.6)$$

ベクトルとは1階のテンソルである。0階のテンソルはスカラーとなる。また、1階、2階の共変テンソルの中で、特に断りのない限り、 z_i は勾配ベクトルを表し、 h_{ij} はヘシアンを表す。

2.2.2 基底ベクトル

基底ベクトルとは、座標変換によりある物理量をあらわすベクトルの大きさを測るものさしが変わったときに成分を定めるためのベクトルである。一般に、反変ベクトルの基底ベクトルは共変ベクトルとなる。この定義に従い、ある座標系において、座標成分 (x^1, x^2, x^3) は反変ベクトルであるので、その基底ベクトル (e_1, e_2, e_3) は共変ベクトルとなる。次のように表される任意のベクトル \mathbf{X} を考える。

$$\mathbf{X} = x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 \quad (2.7)$$

(e_1, e_2, e_3) が共変ベクトルなら、式 (2.7) は反変ベクトルの変換則を用いて

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= x^1 e_1 + x^2 e_2 + x^3 e_3 \\ &= x^1 \left(\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} e_{1'} + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} e_{2'} + \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^1} e_{3'} \right) + x^2 \left(\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} e_{1'} + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} e_{2'} + \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^2} e_{3'} \right) + x^3 \left(\frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3} e_{1'} + \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^3} e_{2'} + \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^3} e_{3'} \right) \\ &= \left(x^1 \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^2} + x^3 \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^3} \right) e_{1'} + \left(x^1 \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^2} + x^3 \frac{\partial x^{2'}}{\partial x^3} \right) e_{2'} + \left(x^1 \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^1} + x^2 \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^2} + x^3 \frac{\partial x^{3'}}{\partial x^3} \right) e_{3'} \end{aligned} \quad (2.8)$$

となる。 \mathbf{X} は座標系にかかわらず不変であり、

$$\mathbf{X} = x^{1'} e_{1'} + x^{2'} e_{2'} + x^{3'} e_{3'} \quad (2.9)$$

となる。式 (2.8) と式 (2.9) を比べれば $x^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^k} x^k$ となっていることから、座標成分は反変ベクトルとなることがわかる。共変基底の成分ベクトルは、反変ベクトルであるということは、図 2.1 に示すように、同じベクトルの長さを表現するのに基底ベクトルの長さ (基準) が2倍になれば、座標成分 (見え方) は $\frac{1}{2}$ に、基底ベクトルの長さ (基準) が4倍になれば、座標成分 (見え方) は $\frac{1}{4}$ に、と、基底ベクトルの長さ、とその座標における座標成分とは反比例の関係にならなければ、物理量であるベクトルの長さを不変に保てないことを示している³⁹⁾。一般に、任意のベクトル \mathbf{A} は、共変ベクトルを (e_1, e_2, e_3) を基底ベクトルにもつベクトルを (A^1, A^2, A^3) 、反変ベクトルを (e^1, e^2, e^3) を基底ベクトルにもつベクトルを (A_1, A_2, A_3) とすれば

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A^1 e_1 + A^2 e_2 + A^3 e_3 \\ &= A_1 e^1 + A_2 e^2 + A_3 e^3 \end{aligned} \quad (2.10)$$

と記述される。

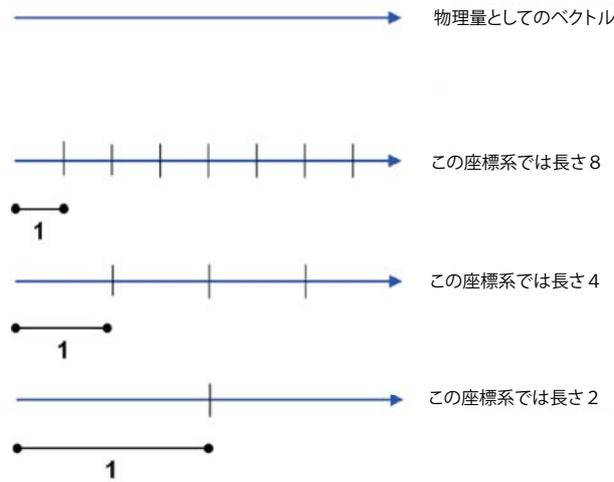


図 2.1 座標系によるベクトルの見え方の変化

2.2.3 計量テンソル

平面内で微小な距離 ds だけ離れた 2 点を考える。一方の点の位置を直交デカルト座標で (x, y) と表したとすると、もう一方の点は $(x + dx, y + dy)$ と表せる。このとき、 ds , dx , dy の間には幾何学的関係より次式が成り立つ。

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \quad (2.11)$$

図 2.1 から分かるように、どのような座標系で表したとしても 2 点間の距離 ds は変わらない。 ds が座標系によらず不変ならば ds^2 も不変であるので、 ds^2 を別の座標系の座標成分 (x', y') で表すことを考える。 dx, dy は微量なので dx' と dy' の一次式で表されることと、それらをそれぞれ 2 乗して和を取ったものが ds^2 であることに注意すれば、 ds^2 はいかなる座標系で表したとしても、次のような dx' と dy' を組み合わせで作った項の和で表すことができる。

$$ds^2 = Adx'^2 + Bdx'dy' + Cdy'dx' + Ddy'^2 \quad (2.12)$$

この係数 A, B, C, D を取り出して次のように行列として表したものを計量テンソルとよび、その成分を g_{ij} で表す。

$$g_{ij} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

なお、式 (2.11) および (2.12) より、直交デカルト座標系における計量テンソルは $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ となる。ここで、共変ベクトル、反変ベクトルを明示する書き方に記述を改め、 dx, dy を dx^1, dx^2 と表すことにすれば、式 (2.12) は

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{11}(dx^1)^2 + g_{12}dx^1dx^2 + g_{21}dx^2dx^1 + g_{22}(dx^2)^2 \\ &= \sum_i \sum_j g_{ij}dx^i dx^j \end{aligned} \quad (2.14)$$

となり、

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \quad (2.15)$$

と総和規約を用いて表示できる*4。式 (2.15) において、何の説明もなく g_{ij} は下添え字表示で記述したが、それは計量テンソルが共変テンソルだからである。なぜなら式 (2.15) において ds^2 は明らかにスカラーであり、座標系に依存

*4 本節では 1 の項で上添え字と下添え字に同一の記号を用いた場合、総和規約を用いることとする。

せず、 dx^i と dx^j は反変ベクトルであるので、 g_{ij} は 2 階の共変テンソルでなければならない。 g_{ij} が 2 階の共変テンソルであることは、式 (2.6) より、以下のような変換則に従うということを意味する。

$$g_{i'j'} = \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{j'}} g_{kl} \quad (2.16)$$

一方、以下のように、計量テンソルは基底ベクトルの内積に等しいことが示される。先ほど議論した微小な距離 ds だけ離れた 2 点を結ぶベクトルは $d\mathbf{r} = dx^i \mathbf{e}_i$ と書ける。ベクトルの内積をとればベクトルの長さの 2 乗に等しくなるので、 ds^2 は

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \\ &= dx^i \mathbf{e}_i \cdot dx^j \mathbf{e}_j \\ &= (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) dx^i dx^j \end{aligned} \quad (2.17)$$

となる。式 (2.15) と式 (2.17) を比べることにより

$$g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \quad (2.18)$$

となることがわかる。以上より、あるベクトル $\mathbf{A} = A^j \mathbf{e}_j (= A_j \mathbf{e}^j)$ の両辺に \mathbf{e}_i を乗じれば次式を得る。

$$\mathbf{e}_i \mathbf{A} = A^j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = g_{ij} A^j \quad (2.19)$$

ここで左辺に $\mathbf{A} = A_i \mathbf{e}^i$ を代入し、双対基底の積がクロネッカデルタを用いて $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j$ となることを用いれば

$$A_i = g_{ij} A^j \quad (2.20)$$

を得る。このことから、計量テンソルは反変ベクトルを共変ベクトルに変換する道具として利用できることが分かる。なお、同様にして $g^{ij} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^j$ を定義すれば

$$A^i = g^{ij} A_j \quad (2.21)$$

を得る。この、計量テンソル g_{ij} の逆行列 g^{ij} は 2 階の反変テンソルであり、両者とも反変ベクトルと共変ベクトルの間の変換テンソルであるという同一の性質から、計量テンソルであるが、本論文では特に両者の区別の必要があるときは、 g_{ij} 、 g^{ij} をそれぞれ共変計量テンソル、反変計量テンソルと呼称する。

2.2.4 エディントンイプシロン

エディントンイプシロンは、3 次元直交デカルト座標系において一般に次のように定義される。

$$E^{ijk} = \begin{cases} 1 & (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \\ -1 & (i, j, k) = (1, 3, 2), (3, 2, 1), (2, 1, 3) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.22)$$

ここでは E^{ijk} は 3 階の共変テンソルであり、 (i, j, k) が $(1, 2, 3)$ の偶置換の場合は 1、奇置換の場合は -1、それ以外は 0 である。行列表記すれば次式となる。

$$\tilde{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

ここで、任意の 3 次元ベクトル $\mathbf{a}^\top = [a_1, a_2, a_3]$ を考え、 $\mathbf{b}^\top = \tilde{\mathbf{E}}\mathbf{a}$ とすれば、その成分は

$$\mathbf{b}^\top = [a_2 - a_3, -a_1 + a_3, a_1 - a_2] \quad (2.24)$$

となるため、 \mathbf{a} 、 \mathbf{b} 間のなす角を θ とすれば、

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{a_1 a_2 - a_3 - a_1^2 + a_1 a_3 + a_2^2 - a_1 a_2}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = 0 \quad (2.25)$$

となり、両者は直交することがわかる。

2.2.5 反変成分と共変成分

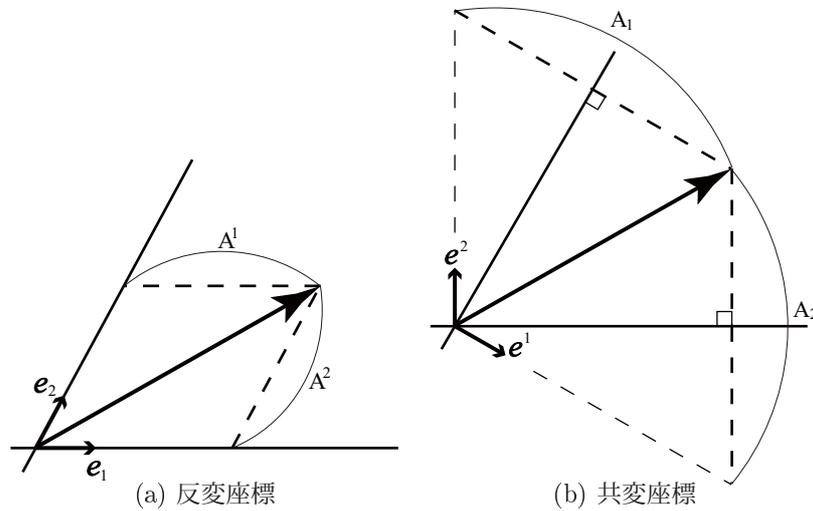


図 2.2 反変座標と共変座標

ベクトルは座標系の取り方（観察する方法）で見え方は変わるが、実際には変化しない。この見え方の変化には2種類あって、それぞれ共変ベクトルと反変ベクトルとして区別される。一般に共変ベクトルとして定義されているものを、計量テンソルを用いて反変ベクトルとして定義することも、その逆も可能である。では、一般に反変ベクトルである座標成分を、共変ベクトルに変換した場合、それは図形的にどのような意味を持っているのかを考える。

図 2.2 のような斜交座標を考える。一般に用いられている座標成分の表し方は図 2.2(a) のタイプであり、この座標成分は反変ベクトルであるので、このような座標成分の取り方を反変座標と呼ぶ。一方、同じ A というベクトルの座標成分を、図 2.2(b) のようにベクトルの先端から座標軸におろした垂線方向の成分で表す方法も考えられる。このようにして表した座標成分は、座標変換によって式 (2.2) のような振る舞いをするため、このような座標成分の取り方は共変座標と呼ばれる。

座標成分に限らず、種々のベクトルは自身の定義によって反変ベクトルもしくは共変ベクトルとして振る舞っているが、計量テンソルによってその振る舞い（座標変換に伴う変化の仕方）が変わったとしても、真のベクトル量は変化するはずがなく、同じものであることに注意する必要がある。曲面から抽出される代数不変量とは、そのような性質に基づいて定式化されるものである。

2.2.6 密度量

不変量の説明の準備として、密度量について概説する。任意の座標系 $\mathbf{x} = [x^1, x^2]^\top \rightarrow \mathbf{x}' = [x'^1, x'^2]^\top$ の座標変換について考える。例として、厚みを有する平板において中央面のある点 $\mathbf{x} = [x^1, x^2]^\top$ における単位面積当たりの質量（密度）を $\rho(\mathbf{x})$ とすると、全質量は

$$M = \int \rho(\mathbf{x}) dS = \int \int \rho(\mathbf{x}) dx^1 dx^2 \quad (2.26)$$

と表せる。ここで、別の座標系 $\mathbf{x}' = [x'^1, x'^2]^\top$ へ変換すると、

$$[x'^1, x'^2]^\top = [f^1(x^1, x^2), f^2(x^1, x^2)]^\top \quad (2.27)$$

上式の積分では、積分変数の変換になるから、ヤコビアン*5

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

を用いた積分変数変換

$$\int dx^1 dx^2 = \int \det(\mathbf{J}) dx^{1'} dx^{2'} \quad (2.29)$$

を考慮すると、質量は

$$M = \int \rho(\mathbf{x}') \det(\mathbf{J}) dx^{1'} dx^{2'} \quad (2.30)$$

となる。質量を表す2つの式(2.26), (2.30)は、密度分布の座標変換を表すと考えることができる。質量は座標系に限らず不変であるので、座標系 \mathbf{x}' における密度分布関数を ρ' とすると、

$$\rho(\mathbf{x}) dx^1 dx^2 = \rho'(\mathbf{x}') dx^{1'} dx^{2'} \quad (2.31)$$

より次式が成立する。

$$\rho'(\mathbf{x}') = \det(\mathbf{J}) \rho(\mathbf{x}) \quad (2.32)$$

このとき、 ρ は重み1のスカラ密度であるという。一般に、

$$\rho'(\mathbf{x}') = \det(\mathbf{J})^w \rho(\mathbf{x}) \quad (2.33)$$

であるとき、 ρ は重み w のスカラ密度といわれる。これは、任意のテンソルに一般化される。例えば、

$$T_{i'j'} = \det(\mathbf{J})^w \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^l}{\partial x^{j'}} T_{kl} \quad (2.34)$$

であるとき、 \mathbf{T} は重み w の2階共変テンソル密度といわれる。

例えば計量テンソル $\underline{\mathbf{g}} = [g_{ij}]$ 及び $\underline{\mathbf{g}}' = [g'_{i'j'}]$ について、式(2.16)および $\det(\underline{\mathbf{g}}) = \det(\underline{\mathbf{g}}^\top)$ であること用いると

$$\det(\underline{\mathbf{g}}') = \det(\mathbf{J})^2 \det(\underline{\mathbf{g}}) \quad (2.35)$$

が成立するので、 $\det(\underline{\mathbf{g}})$ は重み2のスカラ密度である。

また、一般的な各種テンソルは式(2.5), (2.6)の規則に従い、式(2.34)において $w = 0$ なので重みは0である。

一方で、エディントンイプシロンは、平面座標では次式のように定義され、座標系に限らず一定値をとる。

$$\tilde{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{E}}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

これは、座標系に依らず成分が一定値を取るという意味ではスカラのような振る舞いを示すが、これはスカラではない。 $\tilde{\mathbf{E}}$ を別の座標系に変換するには、両側から座標変換行列(=ヤコビアン)を乗じればよい。これをおこなうと次式ようになる。

$$\mathbf{J}^\top \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} \\ \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^1}{\partial x^{2'}} \\ \frac{\partial x^2}{\partial x^{1'}} & \frac{\partial x^2}{\partial x^{2'}} \end{bmatrix} = \det(\mathbf{J}) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

すなわち、エディントンイプシロンは次のような変換規則に従うことがわかる。

$$\tilde{\mathbf{E}}' = \det(\mathbf{J}) \tilde{\mathbf{E}} \quad (2.38)$$

これは式(2.34)とは異なり、重み1の Δ -テンソル密度とよばれる。

*5 この場合のヤコビアンは座標変換行列となる。

2.3 テンソル積ベジエ曲面の代数不変量

テンソル積ベジエ曲面上の位置を定めるパラメータを $s, t \in [0, 1]$ とすると、鉛直方向座標は次式で表わされる。

$$z(s, t) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m q_{z,ij} B_{n,i}(s) B_{m,j}(t) \quad (2.39)$$

なお、ベジエ曲面に関する式中の文字は、特に説明のない場合は C 章に従う。

本研究では、曲面の意匠性や施工性を評価する指標として、伊里らによる $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ の 6 つの代数不変量を採用する。伊里らは地形の標高関数からこれらの不変量を抽出しているが、本研究では、曲面の鉛直方向座標を地形の標高として捉え、不変量を抽出する。本項では、式 (2.39) の高さ関数から抽出される代数不変量の定式化をおこなう。伊里らの代数不変量以外の不変量についても併せて定式化する。

2.3.1 基底関数の導関数

代数不変量の抽出のためには、基底関数のパラメータ s, t に関する導関数が必要となるが、テンソル積ベジエ曲面は、基底関数がバーンスタイン基底関数

$$B_{n,i}(t) = \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1} (1-t)^{n-i} \quad (2.40)$$

として陽に定式化可能なため、パラメータ s, t に関する導関数も次のように陽に計算可能である。

$$\frac{\partial B_{n,i}(t)}{\partial t} = \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-2} (1-t)^{n-i-1} \{(1-n)t + i - 1\} \quad (2.41)$$

$$\frac{\partial^2 B_{n,i}(t)}{\partial t^2} = \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-3} (1-t)^{n-i-2} [2 + i^2 + 2(n-2)t + (n^2 - 3n + 2)t^2 + \{-3 - 2(n-2)t\}i] \quad (2.42)$$

2.3.2 各種テンソルの導出

まず、代数不変量の定式化のために必要な勾配ベクトル、ヘシアン、計量テンソルをテンソル積ベジエ曲面の制御点で表現する。テンソル解析における一般的な表記にしたがい、共変成分を下添え字、反変成分を上添え字付で表現する。まず、共変勾配ベクトル成分は次式で表わされる。

$$z_s = \frac{\partial z(s, t)}{\partial s} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m q_{z,ij} \frac{\partial B_{n,i}(s)}{\partial s} B_{m,j}(t) \quad (2.43)$$

$$z_t = \frac{\partial z(s, t)}{\partial t} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m q_{z,ij} B_{n,i}(s) \frac{\partial B_{m,j}(t)}{\partial t} \quad (2.44)$$

また、共変ヘシアン成分は次式で表わされる。

$$h_{ss} = \frac{\partial^2 z(s, t)}{\partial s^2} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m q_{z,ij} \frac{\partial^2 B_{n,i}(s)}{\partial s^2} B_{m,j}(t) \quad (2.45)$$

$$h_{tt} = \frac{\partial^2 z(s, t)}{\partial t^2} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m q_{z,ij} B_{n,i}(s) \frac{\partial^2 B_{m,j}(t)}{\partial t^2} \quad (2.46)$$

$$h_{st} = h_{ts} = \frac{\partial^2 z(s, t)}{\partial s \partial t} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m q_{z,ij} \frac{\partial B_{n,i}(s)}{\partial s} \frac{\partial B_{m,j}(t)}{\partial t} \quad (2.47)$$

最後に、共変計量テンソル成分は次式で表わされる。

$$g_{ss} = \frac{\partial \mathbf{S}_{n,m}(s, t)}{\partial s} \frac{\partial \mathbf{S}_{n,m}(s, t)}{\partial s} \quad (2.48)$$

$$g_{tt} = \frac{\partial \mathbf{S}_{n,m}(s, t)}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{S}_{n,m}(s, t)}{\partial t} \quad (2.49)$$

$$g_{st} = g_{ts} = \frac{\partial \mathbf{S}_{n,m}(s, t)}{\partial s} \frac{\partial \mathbf{S}_{n,m}(s, t)}{\partial t} \quad (2.50)$$

ただし、 $\mathbf{S}_{n,m}(s, t) = [x(s, t), y(s, t), z(s, t)]^\top$ であり、

$$\frac{\partial \mathbf{S}_{n,m}(s, t)}{\partial s} = \left[\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m q_{x,ij} \frac{\partial B_{n,i}(s)}{\partial s} B_{m,j}(t), \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m q_{y,ij} \frac{\partial B_{n,i}(s)}{\partial s} B_{m,j}(t), \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m q_{z,ij} \frac{\partial B_{n,i}(s)}{\partial s} B_{m,j}(t) \right]^\top \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial \mathbf{S}_{n,m}(s, t)}{\partial t} = \left[\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m q_{x,ij} B_{n,i}(s) \frac{\partial B_{m,j}(t)}{\partial t}, \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m q_{y,ij} B_{n,i}(s) \frac{\partial B_{m,j}(t)}{\partial t}, \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m q_{z,ij} B_{n,i}(s) \frac{\partial B_{m,j}(t)}{\partial t} \right]^\top \quad (2.52)$$

である。ここで、上記のベクトルとテンソルを、次式のように行列表示する。

$$\underline{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} z_s \\ z_t \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{h}} = \begin{bmatrix} h_{ss} & h_{st} \\ h_{ts} & h_{tt} \end{bmatrix}, \quad \underline{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} g_{ss} & g_{st} \\ g_{ts} & g_{tt} \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

これらの共変成分に対し、次のように反変成分が定義される。まず、反変計量テンソルを

$$\bar{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} g^{ss} & g^{st} \\ g^{ts} & g^{tt} \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

とすると、 $\bar{\mathbf{g}}$ は共変計量テンソルの逆行列であり、

$$\bar{\mathbf{g}} = \underline{\mathbf{g}}^{-1} \quad (2.55)$$

が成立する。また、反変勾配ベクトルを

$$\bar{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} z^s \\ z^t \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

とすると、次の関係が成立する。

$$\bar{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{g}} \underline{\mathbf{z}}, \quad \underline{\mathbf{z}} = \underline{\mathbf{g}} \bar{\mathbf{z}} \quad (2.57)$$

さらに、

$$\tilde{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \tilde{E}^{ss} & \tilde{E}^{st} \\ \tilde{E}^{ts} & \tilde{E}^{tt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

で定義されるエディントンイプシロンを用いて、次のような反変ベクトルを定義する。

$$\tilde{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \tilde{z}^s \\ \tilde{z}^t \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{E}} \bar{\mathbf{z}} \quad (2.59)$$

2.2.4 項の性質は 2 方向の曲線座標系であるパラメトリック曲面上でも同様に成り立つため、 $\tilde{\mathbf{z}}$ は勾配ベクトルと直交方向のベクトルであることがわかる。

2.3.3 代数不変量

2.2.3項で述べた通り、式(2.57)のように、計量テンソルには、共変成分を反変成分に、また、反変成分を共変成分にするシフターとしての作用がある。任意の座標系において、共変成分と反変成分との積は不変である。この性質に基づき、伊里らは計量テンソルを補助量とし、勾配ベクトルおよびヘシアンに関する不変量として β 不変量と γ 不変量を定義している。また、Gauss曲率や平均曲率といった曲面の基本量⁴⁰⁾もまた、代数不変量である。これらの不変量の値は曲面の幾何学的形状を評価する上で有効な指標となる。

■ **β 不変量** β 不変量は次のように定式化される。

$$\beta_0 = \sum_{\xi=s,t} \sum_{\lambda=s,t} g^{\xi\lambda} z_\xi z_\lambda = \sum_{\xi=s,t} z^\xi z_\xi (\geq 0) \quad (\text{スカラー}) \quad (2.60)$$

$$\beta_1 = \sum_{\xi=s,t} \sum_{\lambda=s,t} h_{\lambda\xi} g^{\xi\lambda} \quad (\text{スカラー}) \quad (2.61)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{2\det(\underline{g})} \sum_{\xi=s,t} \sum_{\lambda=s,t} \sum_{\mu=s,t} \sum_{\nu=s,t} h_{\nu\lambda} h_{\mu\xi} \tilde{E}^{\xi\lambda} \tilde{E}^{\mu\nu} \quad (\text{スカラー}) \quad (2.62)$$

■ **γ 不変量** γ 不変量^{*6}は次のように定式化される。

$$\gamma_1 = \sum_{\lambda=s,t} \sum_{\xi=s,t} h_{\lambda\xi} z^\xi z^\lambda \quad (\text{スカラー}) \quad (2.63)$$

$$\gamma_2 = \sum_{\lambda=s,t} \sum_{\xi=s,t} h_{\lambda\xi} \tilde{z}^\xi \tilde{z}^\lambda = \sum_{\lambda=s,t} \sum_{\xi=s,t} h_{\lambda\xi} z^\xi \tilde{z}^\lambda \quad (\text{重み1の}\Delta\text{-スカラー密度}) \quad (2.64)$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{\det(\underline{g})} \sum_{\lambda=s,t} \sum_{\xi=s,t} h_{\lambda\xi} \tilde{z}^\xi \tilde{z}^\lambda \quad (\text{スカラー}) \quad (2.65)$$

β , γ 不変量の幾何学的意味については、2.5節で述べる。

■**主曲率** 曲面上のある点Pにおける主曲率は、Pでの法線を含む平面で曲面を切った時に現れる曲線の曲率の最大値と最小値であり、理論的にはヘシアンと計量テンソルに関する一般固有値問題

$$\underline{h}\bar{\phi} = \kappa \underline{g}\bar{\phi} \quad (2.66)$$

の固有値 κ_1 , κ_2 として定義される($\kappa_1 \geq \kappa_2$ とする)。

■**Gauss曲率** Gauss曲率は、主曲率の積 $\kappa_1 \kappa_2$ として定義される。

■**平均曲率** 平均曲率は主曲率の平均 $\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$ として定義される。

■**測地的振率** 曲面上のある点Pにおける測地的振率とは、その点での法線を含む平面に接する測地線の振率である。Pを含む平面で曲面を切った時に現れる曲線が、 κ_1 に対応する主方向となす角を θ とすれば、測地的振率 T は次式で表わされる。

$$T = -\frac{1}{2} (\kappa_1 - \kappa_2) \sin 2\theta \quad (2.67)$$

^{*6} スカラーではないという意味では、 γ_2 は実は不変量ではないが、本論文では γ_2 が0か否かにのみ注目しており、ある座標系で γ_2 が0であれば任意の座標系で γ_2 の値は0となるので、座標系の違いによる値の変化は問題とならない。文献³⁸⁾においても γ_2 は不変量に含めているので、本論文においても不変量に含めることとする。

■ α 不変量 β, γ 不変量に加えて, 新たに, 測地的振率の絶対値の最大値の2乗で定義される α 不変量を提案する。

$$\alpha = \frac{1}{4}(\kappa_1 - \kappa_2)^2 \quad (2.68)$$

なお, $\beta_1 = \kappa_1 + \kappa_2, \beta_2 = \kappa_1\kappa_2$ であることを考慮すれば, α 不変量は β 不変量を用いて書き表すこともできる。

$$\alpha = \frac{1}{4}\beta_1^2 - \beta_2 \quad (2.69)$$

■ β, γ 不変量と主曲率との関係 κ_1, κ_2 に対応する固有ベクトルを $\bar{\phi}_1 = [\phi_1^s, \phi_1^t]^\top, \bar{\phi}_2 = [\phi_2^s, \phi_2^t]^\top$ とおけば, これらは反変固有ベクトルであり, 次式で定義される共変固有ベクトルは主方向を表す。

$$\begin{aligned} \underline{\phi}_1 &= [\phi_{1,s}, \phi_{1,t}]^\top = \underline{g}\bar{\phi}_1 \\ \underline{\phi}_2 &= [\phi_{2,s}, \phi_{2,t}]^\top = \underline{g}\bar{\phi}_2 \end{aligned} \quad (2.70)$$

勾配ベクトルおよびヘシアンは, 主曲率と主方向の関数として次のように表すこともできる。

$$\underline{h} = \begin{bmatrix} \kappa_1\phi_{1,s}^2 + \kappa_2\phi_{2,s}^2 & \kappa_1\phi_{1,s}\phi_{1,t} + \kappa_2\phi_{2,s}\phi_{2,t} \\ \kappa_1\phi_{1,s}\phi_{1,t} + \kappa_2\phi_{2,s}\phi_{2,t} & \kappa_1\phi_{1,t}^2 + \kappa_2\phi_{2,t}^2 \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

$$\underline{z} = \begin{bmatrix} c_1\phi_{1,s} + c_2\phi_{2,s} \\ c_1\phi_{1,t} + c_2\phi_{2,t} \end{bmatrix}, \quad \underline{z} = \begin{bmatrix} c_1\phi_1^s + c_2\phi_2^s \\ c_1\phi_1^t + c_2\phi_2^t \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

ここに, c_1, c_2 は成分を定める定数係数である。

以上より, β 不変量および γ 不変量は, 次のように表すこともできる。

$$\beta_0 = c_1^2 + c_2^2, \quad \beta_1 = \kappa_1 + \kappa_2, \quad \beta_2 = \kappa_1\kappa_2 \quad (2.73)$$

$$\gamma_1 = c_1^2\kappa_1 + c_2^2\kappa_2, \quad \gamma_2 = \sqrt{\det(\underline{g})}c_1c_2(\kappa_1 - \kappa_2) \quad (2.74)$$

$$\gamma_3 = c_1^2\kappa_2 + c_2^2\kappa_1$$

式 (2.73) より, β_1 不変量は平均曲率の2倍, β_2 不変量は Gauss 曲率と同義であることがわかる。

2.4 三角形パッチベジエ曲面の代数不変量

三角形パッチベジエ曲面上の位置を定めるパラメータを $u, v \in [0, 1]$ ($u + v \leq 1$) とすると, 鉛直方向座標は次式で表わされる。

$$z(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} q_{z,ij} B_{n,ij}(u, v) \quad (2.75)$$

2.4.1 基底関数の導関数

テンソル積ベジエ曲面の場合と同様に, パラメータ u, v に関する導関数は次のように陽に計算可能である。

$$\frac{\partial B_{n,ij}(u, v)}{\partial u} = \frac{n!}{i!j!k!} u^{i-1} v^j w^{k-1} (iw - ku) \quad (2.76)$$

$$\frac{\partial B_{n,ij}(u, v)}{\partial v} = \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^{j-1} w^{k-1} (jw - kv) \quad (2.77)$$

$$\frac{\partial^2 B_{n,ij}(u, v)}{\partial u^2} = \frac{n!}{i!j!k!} u^{i-2} v^j w^{k-2} \{ (i-1)iw^2 - 2ikuw + (k-1)ku^2 \} \quad (2.78)$$

$$\frac{\partial^2 B_{n,ij}(u,v)}{\partial v^2} = \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^{j-2} w^{k-2} \{ (j-1)jw^2 - 2jkvw + (k-1)kv^2 \} \quad (2.79)$$

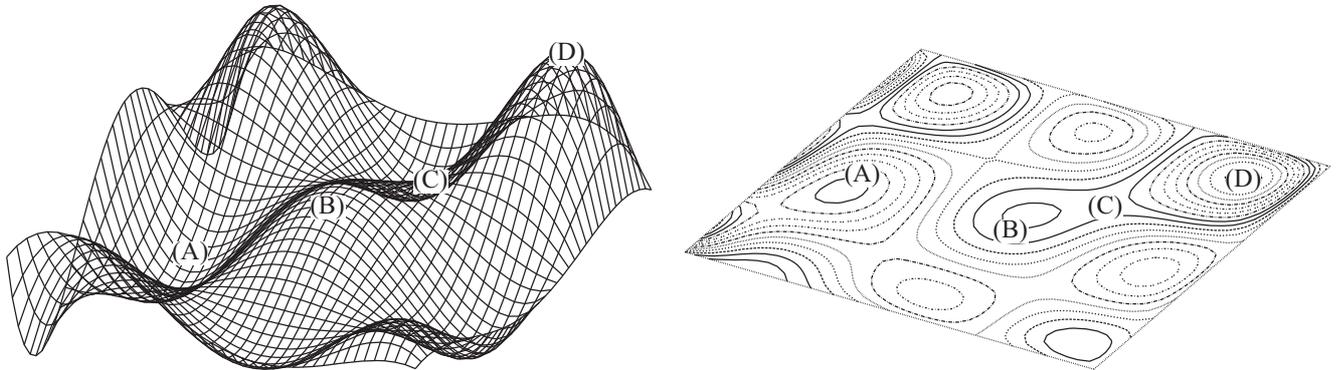
$$\frac{\partial^2 B_{n,ij}(u,v)}{\partial u \partial v} = \frac{n!}{i!j!k!} u^{i-1} v^{j-1} w^{k-2} \{ ijw^2 - ikvw - jkuw + (k-1)kuv \} \quad (2.80)$$

ここで、 $w = 1 - u - v$ 、 $k = n - i - j$ である。三角形パッチベジエ曲面の制御点で表現する各種テンソルは、2.3.2節の定式化において、 s, t を u, v に置き換えることで、テンソル積ベジエ曲面の場合とまったく同様に定式化される。代数不変量についても同様である。

2.5 代数不変量と曲面形状との関係

前述した主曲率との関係などから、曲面上の1つの点Pにおける β 不変量および γ 不変量の値によって、その点近傍の曲面形状を次のように特徴づけることができる。

$\beta_2 > 0$ のとき 点P近傍の等高線は楕円状となる。特に、 $\beta_1^2 = 4\beta_2$ のとき、 $\kappa_1 = \kappa_2$ となり、点P近傍の等高線は円状となり、全方向について曲率一定となる。さらに
 $\beta_1 > 0$ のとき： 曲面は局所的に凹である (例：(A))。
 $\beta_1 < 0$ のとき： 曲面は局所的に凸である (例：(B))。
 $\beta_2 < 0$ のとき 点P近傍の等高線は双曲線状となる (例：(C))。点P近傍の曲面は1つの方向から見れば凹であり、他の方向から見れば凸である。また、曲面上の曲線が局所的に直線 (曲率が0) となる方向が存在する。



$\beta_2 = 0$ のとき 1つの主曲率が0であり

$\beta_1 > 0$ のとき： 0でない主曲率は正である。0の曲率に対応する主方向に曲面は凹でも凸でもなく高さ一定となり、その他の全ての方向には凹である (例：(E))。

$\beta_1 < 0$ のとき： 0でない主曲率が負である。0の曲率に対応する主方向に曲面は凹でも凸でもなく高さ一定となり、その他の全ての方向には凸である (例：(F))。

$\beta_1 = 0$ のとき： 主曲率はどちらも0となり、点P近傍の曲面は局所的に平面となる (例：(G))。

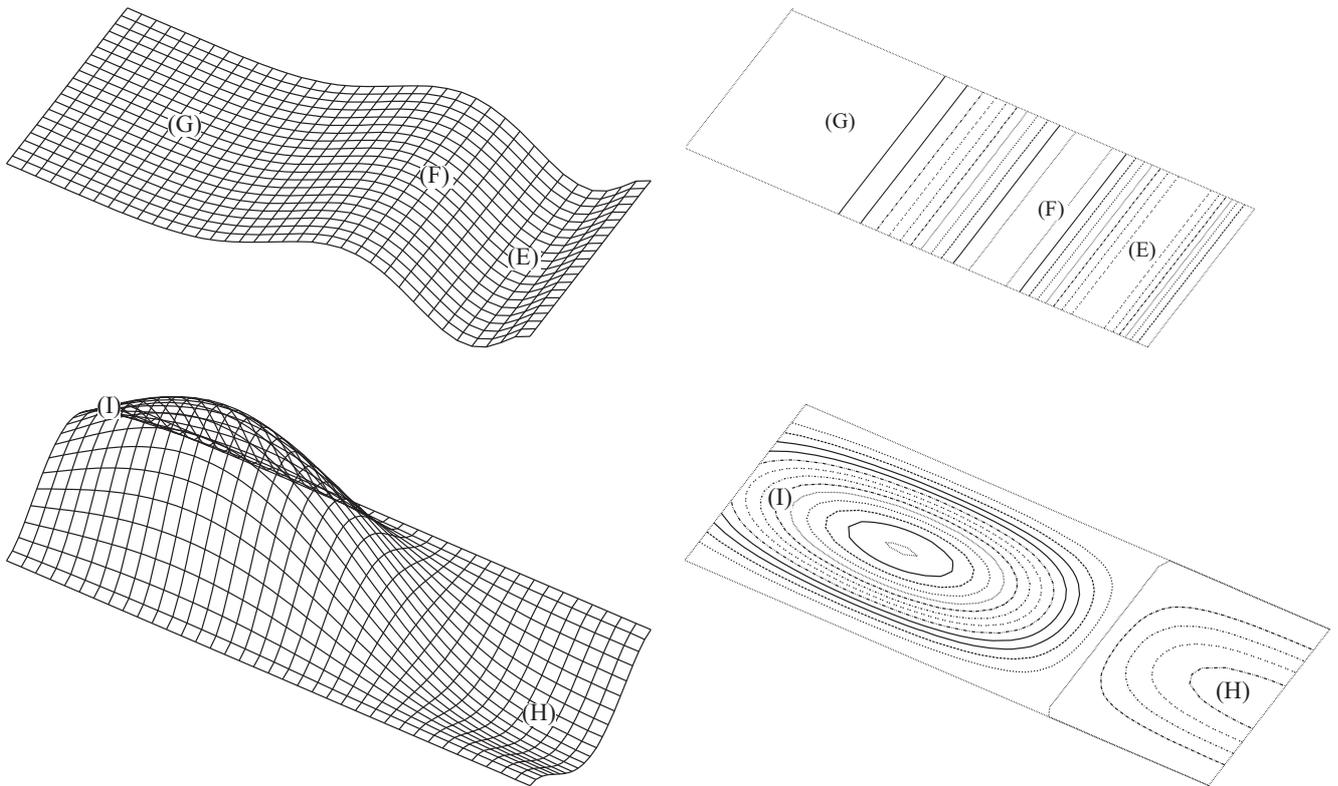
$\beta_0 = 0$ のとき 点Pは極限点となる (例：(D))。

$\gamma_2 = 0$ のとき 勾配ベクトルと1つの主曲率方向が一致し

$|\gamma_1| < |\gamma_3|$ かつ $\gamma_3 > 0$ のとき： 曲面は局所的に凹の筒状となる (例：(H))。

$|\gamma_1| < |\gamma_3|$ かつ $\gamma_3 < 0$ のとき： 曲面は局所的に凸の筒状となる (例：(I))。

なお、 γ_1/β_0 は勾配ベクトル方向の曲率に、 γ_3/β_0 は勾配ベクトル方向と直交方向の曲率にそれぞれ一致する。以降本論文では、凹の筒状を谷、凸の筒状を山と呼称する。



■**可展面と代数不変量** 可展面とは、伸縮することなしに平面に展開することができる曲面である。シェル構造の曲面が可展面であることは、コンクリートシェルを施工する際の型枠作成において有利な性質となると考えられる。3次元空間において実現できる可展面は Gauss 曲率が 0 である曲面として定義される⁴¹⁾。そのため、可展面生成のための条件(可展条件)としては、Gauss 曲率と同義である β_2 不変量が曲面上の任意の点で 0 となるような形状を導けばよい。

■**球らしさと代数不変量** α 不変量は、主曲率の差を表すため、この値が 0 に近づくほどその点近傍の曲面は球の一部に近づくことがわかる。裁断球殻は幾何学的な美しさを有し、多くのシェル構造物の形態に利用されているが、その力学的合理性は必ずしも高くない。ひずみエネルギーに制約を与えつつ、曲面全体で α を最小化することで、剛性を保持しながら球らしさを有する曲面形状を導くことができると考えられる。

■**線織面** 空間内を直線が動くときのその軌跡として定義される曲面を線織面という。可展面が展開可能な面で構成されるのに対し、線織面は直線の集合であり、すべての可展面は線織面である。線織面は次式のように定義できる。

$$S(u, v) = (1 - v)f(u) + vg(u) \quad (2.81)$$

ここで、 u, v はパラメータであり、 $f(u), g(u)$ それぞれの曲線上のパラメータの等しい点を結んだ直線の集合として定義される。可展面が β_2 不変量が曲面上の任意の点で 0 であるのに対し、線織面は β_2 不変量が曲面上の任意の点で 0 または負となる。ただし、これは十分条件であり、 β_2 不変量が曲面上の任意の点で 0 または負である曲面は線織面とは限らない。したがって、代数不変量に制約を与えることで線織面を生成することはできない。

2.6 各種ベクトルおよびテンソルの微分

テンソル積ベジエ曲面について、各種ベクトルおよびテンソルの制御点の z 座標 \mathbf{q}_z に関する微分を求める。三角形パッチベジエ曲面については、テンソル積ベジエ曲面の場合と同様であるので定式化を省略する。

■共変勾配ベクトルの微分 まず、 $\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial q_{z,ij}}$ について、 $\frac{\partial z(s,t)}{\partial s}$ は、 s, t および $\mathbf{q}_z = [\dots, q_{z,ij}, \dots]^T$ の関数であるが、 $q_{z,ij}$ については1次関数であり、 $\frac{\partial z(s,t)}{\partial s}$ を $q_{z,ij}$ で偏微分したとき、 $q_{z,ij}$ が存在する項のみが残り、その他はすべて0となる。 $\frac{\partial z(s,t)}{\partial t}$ についても同様であるので、それらは陽に計算でき、次式のように表される。

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial q_{z,ij}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z_s}{\partial q_{z,ij}} \\ \frac{\partial z_t}{\partial q_{z,ij}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial B_{n,i}(s)}{\partial s} B_{m,j}(t) \\ B_{n,i}(s) \frac{\partial B_{m,j}(t)}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

■共変ヘシアン of 微分 共変勾配ベクトルの微分の場合と同様に、共変ヘシアンの各成分が $q_{z,ij}$ については1次関数であることを考慮すれば、共変ヘシアンの微分 $\frac{\partial \underline{\mathbf{h}}}{\partial q_{z,ij}}$ は次式で表わされる。

$$\frac{\partial \underline{\mathbf{h}}}{\partial q_{z,ij}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_{ss}}{\partial q_{z,ij}} & \frac{\partial h_{st}}{\partial q_{z,ij}} \\ \frac{\partial h_{ts}}{\partial q_{z,ij}} & \frac{\partial h_{tt}}{\partial q_{z,ij}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 B_{n,i}(s)}{\partial s^2} B_{m,j}(t) & \frac{\partial B_{n,i}(s)}{\partial s} \frac{\partial B_{m,j}(t)}{\partial t} \\ \frac{\partial B_{n,i}(s)}{\partial s} \frac{\partial B_{m,j}(t)}{\partial t} & B_{n,i}(s) \frac{\partial^2 B_{m,j}(t)}{\partial t^2} \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

■共変計量テンソルの微分 計量テンソルの成分を陽に表せば次式となる。

$$\underline{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial x(s,t)}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y(s,t)}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial z(s,t)}{\partial s}\right)^2 & \frac{\partial x(s,t)}{\partial s} \frac{\partial x(s,t)}{\partial t} + \frac{\partial y(s,t)}{\partial s} \frac{\partial y(s,t)}{\partial t} + \frac{\partial z(s,t)}{\partial s} \frac{\partial z(s,t)}{\partial t} \\ \frac{\partial x(s,t)}{\partial s} \frac{\partial x(s,t)}{\partial t} + \frac{\partial y(s,t)}{\partial s} \frac{\partial y(s,t)}{\partial t} + \frac{\partial z(s,t)}{\partial s} \frac{\partial z(s,t)}{\partial t} & \left(\frac{\partial x(s,t)}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y(s,t)}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z(s,t)}{\partial t}\right)^2 \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

このうち、 $q_{z,ij}$ の関数であるのは $\frac{\partial z(s,t)}{\partial s}$ と $\frac{\partial z(s,t)}{\partial t}$ のみである。したがって、共変計量テンソルの微分 $\frac{\partial \underline{\mathbf{g}}}{\partial q_{z,ij}}$ は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{\mathbf{g}}}{\partial q_{z,ij}} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_{ss}}{\partial q_{z,ij}} & \frac{\partial g_{st}}{\partial q_{z,ij}} \\ \frac{\partial g_{ts}}{\partial q_{z,ij}} & \frac{\partial g_{tt}}{\partial q_{z,ij}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial z(s,t)}{\partial s} \frac{\partial^2 z(s,t)}{\partial s \partial q_{z,ij}} & \frac{\partial^2 z(s,t)}{\partial s \partial q_{z,ij}} \frac{\partial z(s,t)}{\partial t} + \frac{\partial z(s,t)}{\partial s} \frac{\partial^2 z(s,t)}{\partial t \partial q_{z,ij}} \\ \frac{\partial^2 z(s,t)}{\partial s \partial q_{z,ij}} \frac{\partial z(s,t)}{\partial t} + \frac{\partial z(s,t)}{\partial s} \frac{\partial^2 z(s,t)}{\partial t \partial q_{z,ij}} & 2 \frac{\partial z(s,t)}{\partial t} \frac{\partial^2 z(s,t)}{\partial t \partial q_{z,ij}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2z_s \frac{\partial z_s}{\partial q_{z,ij}} & \frac{\partial z_s}{\partial q_{z,ij}} z_t + z_s \frac{\partial z_t}{\partial q_{z,ij}} \\ \frac{\partial z_s}{\partial q_{z,ij}} z_t + z_s \frac{\partial z_t}{\partial q_{z,ij}} & 2z_t \frac{\partial z_t}{\partial q_{z,ij}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.85)$$

第3章

ひずみエネルギーと代数不変量を考慮した連続体シェル形状最適化

3.1 概説

本章では、連続体シェル構造物に対して、ひずみエネルギーを目的関数とし、曲面の代数不変量を制約条件に導入した制約付き単一目的最適化問題を定式化し、双方を勘案したシェル形状を最適化手法を用いて求める。力学的性能の指標としてひずみエネルギーを採用し、経済性の指標としてシェルの総体積を、意匠性や建築計画などに関わる幾何学的特性の指標として第2章で概説した代数不変量を採用することにより、建築構造物に要求される様々な要求を同時に考慮することを目的とする。シェルの曲面形状はベジエ曲面により表現する。ベジエ曲面を用いることにより、ごく少数の制御点であらゆる曲面形状を効果的に記述でき、未知量を大幅に減らすことで、曲面を有限要素により離散化して節点座標をすべて未知量とした場合に起きる収束性の低下を抑制でき、ベジエ曲面の滑らかさを保つ性質により曲面形状がいびつになることも抑制できる。また、ベジエ曲面は基底関数が陽に定式化可能なため、代数不変量の感度解析を容易に行うことが可能である。

本手法は、曲面形状をベジエ曲面により表現し未知量を低減させた上で、ひずみエネルギーを目的関数、シェルの総体積やベジエ曲面から抽出される代数不変量に制約を有する制約付き単一目的最適化問題を逐次二次計画法により解くことで力学的性能と非力学的性能の双方を勘案した曲面形状を導くものである。

第3.2節では、勾配ベクトルを求める感度解析について述べる。

第3.3節ならびに第3.4節では、テンソル積ベジエ曲面により形状記述される連続体シェルに対して、様々な代数不変量制約を導入した形状最適化問題を定式化し、それらを解くことで得られた解の幾何学的特性および力学的特性について考察する。

第3.5節ならびに第3.6節では、三角形パッチベジエ曲面により形状記述される連続体シェルに対して、様々な代数不変量制約を導入した形状最適化問題を定式化し、それらを解くことで得られた解の幾何学的特性および力学的特性について考察する。

第3.7節では、本章で提案した形状最適化手法により得られた結論を述べる。

3.2 感度解析

逐次二次計画法のような非線形計画法によって最適化問題を解く際に必要となる感度解析^{*1}について述べる。設計問題の目的は、D.4節で示す最適性条件を満足する解を求めることである。そのためには、目的関数並びに制約関数の、設計変数に関する偏微分を求める必要がある。なお、本章では、設計変数はテンソル積ベジエ曲面もしくは三角形パッチベジエ曲面の制御点の z 座標 q_z である。

本章で目的関数あるいは制約関数とする指標は、ひずみエネルギー、シェルの面積、 β 不変量、 γ 不変量、 α 不変量である。なお、ひずみエネルギー、シェルの面積については、陽に制御点に関する設計感度を求めることはせず、節点座標に関する感度係数を求めた後、テンソル積ベジエ曲面の制御点と有限要素の節点との関係から制御点に関する偏微分を間接的に求める。なお、有限要素の各種マトリクスおよびその微分については、付録Aを参照されたい。

3.2.1 ひずみエネルギーの節点 z 座標に関する感度解析

ひずみエネルギーの節点 z 座標に関する偏微分を求める。節点数を N とし、全体座標系で表わされた節点 z 座標を z_i ($i = 1, \dots, N$) と表すことにする。変位の自由度を n 、線形弾性剛性マトリクスを $\mathbf{K} \in R^{n \times n}$ 、節点変位ベクトルを $\mathbf{d} \in R^n$ 、節点荷重ベクトルを $\mathbf{p} \in R^n$ とすると、剛性方程式は次のように書ける。

$$\mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{p} \quad (3.1)$$

上式の両辺を z_i ($i = 1, \dots, n$) で微分すると次式を得る。

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial z_i} \mathbf{d} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial z_i} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z_i} \quad (3.2)$$

一方、ひずみエネルギーは次式で表わされる。

$$E = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \quad (3.3)$$

ひずみエネルギー E の z_i に関する感度係数は、式(3.2)を用いて次のように書ける。

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial z_i} &= \frac{1}{2} \left(2\mathbf{d}^\top \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial z_i} + \mathbf{d}^\top \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial z_i} \mathbf{d} \right) \\ &= \mathbf{d}^\top \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z_i} - \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial z_i} \mathbf{d} \end{aligned} \quad (3.4)$$

3.2.2 シェル中央面の面積の節点 z 座標に関する感度解析

要素数を m 、 i 番目の要素の中央面の面積を Δ_i とすると、シェル中央面の面積 S は次式で表わされる。

$$S = \sum_{i=1}^m \Delta_i \quad (3.5)$$

式(A.34)で定義される法線ベクトルの i 番目の要素を \mathbf{n}_i とすると、シェル中央面の面積 S の z_j に関する感度係数は式(A.37)を用いて次のように書ける。

$$\frac{\partial S}{\partial z_j} = \sum_{i=1}^m \frac{\mathbf{n}_i^\top}{4\Delta_i} \frac{\partial \mathbf{n}_i}{\partial z_j} \quad (3.6)$$

^{*1} パラメータの変化が構造物の応答にどのように影響するかを解析することを感度解析という。最適化理論においては、目的関数あるいは制約関数の、設計変数に関する変化率、すなわち設計変数に関する偏微分を求めることである。

3.2.3 節点 z 座標に関する感度とベジエ曲面の制御点の z 座標 q_z に関する感度の関係

■テンソル積ベジエ曲面 制御点は $(I+1) \times (J+1)$ 個網目状に配置されているとする。また、有限要素の節点は $(I'+1) \times (J'+1)$ 個網目状に配置されているとする。

$$\mathbf{r}_z = [z(s_0, t_0), \dots, z(s_0, t_{J'}), \dots, z(s_{I'}, t_0), \dots, z(s_{I'}, t_{J'})]^\top \quad (3.7)$$

$$\mathbf{q}_z = [q_{z,00}, \dots, q_{z,0J}, \dots, q_{z,I0}, \dots, q_{z,IJ}]^\top \quad (3.8)$$

このとき、ある変数 X の制御点 z 座標 \mathbf{q}_z に関する感度係数は、節点 z 座標に関する感度係数を介して次のように表現できる。

$$\frac{\partial X}{\partial \mathbf{q}_z} = \frac{\partial \mathbf{r}_z}{\partial \mathbf{q}_z} \frac{\partial X}{\partial \mathbf{r}_z} \quad (3.9)$$

ただし、

$$\frac{\partial X}{\partial \mathbf{q}_z} = \left[\frac{\partial X}{\partial q_{z,00}}, \dots, \frac{\partial X}{\partial q_{z,0J}}, \dots, \frac{\partial X}{\partial q_{z,I0}}, \dots, \frac{\partial X}{\partial q_{z,IJ}} \right]^\top \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}_z}{\partial \mathbf{q}_z} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z(s_0, t_0)}{\partial q_{z,00}} & \dots & \frac{\partial z(s_0, t_{J'})}{\partial q_{z,00}} & \dots & \frac{\partial z(s_{I'}, t_0)}{\partial q_{z,00}} & \dots & \frac{\partial z(s_{I'}, t_{J'})}{\partial q_{z,00}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial z(s_0, t_0)}{\partial q_{z,0J}} & \dots & \frac{\partial z(s_0, t_{J'})}{\partial q_{z,0J}} & \dots & \frac{\partial z(s_{I'}, t_0)}{\partial q_{z,0J}} & \dots & \frac{\partial z(s_{I'}, t_{J'})}{\partial q_{z,0J}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial z(s_0, t_0)}{\partial q_{z,I0}} & \dots & \frac{\partial z(s_0, t_{J'})}{\partial q_{z,I0}} & \dots & \frac{\partial z(s_{I'}, t_0)}{\partial q_{z,I0}} & \dots & \frac{\partial z(s_{I'}, t_{J'})}{\partial q_{z,I0}} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial z(s_0, t_0)}{\partial q_{z,IJ}} & \dots & \frac{\partial z(s_0, t_{J'})}{\partial q_{z,IJ}} & \dots & \frac{\partial z(s_{I'}, t_0)}{\partial q_{z,IJ}} & \dots & \frac{\partial z(s_{I'}, t_{J'})}{\partial q_{z,IJ}} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial X}{\partial \mathbf{r}_z} = \left[\frac{\partial X}{\partial z(s_0, t_0)}, \dots, \frac{\partial X}{\partial z(s_0, t_{J'})}, \dots, \frac{\partial X}{\partial z(s_{I'}, t_0)}, \dots, \frac{\partial X}{\partial z(s_{I'}, t_{J'})} \right]^\top \quad (3.12)$$

である。上式中の $\frac{\partial \mathbf{r}_z}{\partial \mathbf{q}_z}$ の各成分は式 (C.23) を偏微分することで次式のように表される。

$$\frac{\partial z(s_k, t_l)}{\partial q_{z,ij}} = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J B_{I,i}(s_k) B_{J,j}(t_l) \quad (k=0, \dots, I' \quad l=0, \dots, J') \quad (3.13)$$

よって式 (C.25) より、次式が成立することがわかる。

$$\frac{\partial \mathbf{r}_z}{\partial \mathbf{q}_z} = \tilde{\mathbf{B}}^\top \quad (3.14)$$

結局、ある変数 X の制御点 z 座標 \mathbf{q}_z に関する感度係数は次式のように節点 z 座標に関する感度係数から求めることができる。

$$\frac{\partial X}{\partial \mathbf{q}_z} = \tilde{\mathbf{B}}^\top \frac{\partial X}{\partial \mathbf{r}_z} \quad (3.15)$$

3.2.3.1 三角形パッチベジエ曲面

節点 z 座標に関する感度と三角形パッチベジエ曲面の制御点の z 座標に関する感度の関係については、テンソル積ベジエ曲面の場合と同様であるので、定式化は省略する。

3.2.4 β_0 不変量の制御点の z 座標 q_z に関する感度解析

以下では、テンソル積ベジエ曲面から抽出される β_0 不変量の制御点の z 座標 q_z に関する感度解析について定式化をおこなう。なお、三角形パッチベジエ曲面における各量の感度については、パラメータ s, t を u, v に置き換えれば良い。他の不変量の感度解析についても同様である。

β_0 不変量は次式で定義される。

$$\beta_0 = \sum_{\kappa=s,t} \sum_{\lambda=s,t} g^{\kappa\lambda} z_\kappa z_\lambda = \sum_{\kappa=s,t} z^\kappa z_\kappa \quad (\geq 0) \quad (3.16)$$

これをマトリクス形で書くと次式となる。

$$\beta_0 = \mathbf{z}^\top \bar{\mathbf{g}} \mathbf{z} \quad (3.17)$$

これを制御点 q_z 座標で偏微分することで次式を得る。

$$\frac{\partial \beta_0}{\partial q_{z,ij}} = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial q_{z,ij}}^\top \bar{\mathbf{g}} \mathbf{z} + \mathbf{z}^\top \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}}{\partial q_{z,ij}} \mathbf{z} + \mathbf{z}^\top \bar{\mathbf{g}} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial q_{z,ij}} \quad (3.18)$$

ここで、 $\frac{\partial \bar{\mathbf{g}}}{\partial q_{z,ij}}$ を陽に計算するのは困難である。そこで、 $\bar{\mathbf{g}}$ が \mathbf{g} の逆行列であることから、

$$\bar{\mathbf{g}} \mathbf{g} = \mathbf{I} \quad (3.19)$$

が成り立つことに注目し、これを q_z 座標で偏微分すると

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{g}}}{\partial q_{z,ij}} \mathbf{g} + \bar{\mathbf{g}} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial q_{z,ij}} = 0 \quad (3.20)$$

を得る。左辺第2項を右辺に移動して両辺に右から $\bar{\mathbf{g}}$ を掛ければ、 $\frac{\partial \bar{\mathbf{g}}}{\partial q_{z,ij}}$ は次のように $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial q_{z,ij}}$ を用いて計算することができる。

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{g}}}{\partial q_{z,ij}} = -\bar{\mathbf{g}} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial q_{z,ij}} \bar{\mathbf{g}} \quad (3.21)$$

以上より、 β_0 の制御点 q_z 座標に関する感度係数が次式により求められる。

$$\frac{\partial \beta_0}{\partial q_{z,ij}} = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial q_{z,ij}}^\top \bar{\mathbf{g}} \mathbf{z} - \mathbf{z}^\top \bar{\mathbf{g}} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial q_{z,ij}} \bar{\mathbf{g}} \mathbf{z} + \mathbf{z}^\top \bar{\mathbf{g}} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial q_{z,ij}} \quad (3.22)$$

3.2.5 β_1 不変量の制御点の z 座標 q_z に関する感度解析

β_1 不変量は次式で定義される。

$$\beta_1 = \sum_{\kappa=s,t} \sum_{\lambda=s,t} h_{\lambda\kappa} g^{\kappa\lambda} \quad (3.23)$$

これをマトリクス形で書くと次式となる*2。

$$\beta_1 = \mathbf{e}_1^\top \mathbf{h} \bar{\mathbf{g}} \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2^\top \mathbf{h} \bar{\mathbf{g}} \mathbf{e}_2 \quad (3.24)$$

*2 $\mathbf{e}_1 = [1 \ 0]^\top$, $\mathbf{e}_2 = [0 \ 1]^\top$

これを制御点 q_z 座標で偏微分することで次式を得る。

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial q_{z,ij}} = e_1^\top \frac{\partial \underline{h}}{\partial q_{z,ij}} \underline{g} e_1 + e_1^\top \underline{h} \frac{\partial \underline{g}}{\partial q_{z,ij}} e_1 + e_2^\top \frac{\partial \underline{h}}{\partial q_{z,ij}} \underline{g} e_2 + e_2^\top \underline{h} \frac{\partial \underline{g}}{\partial q_{z,ij}} e_2 \quad (3.25)$$

さらに、式 (3.21) を考慮すれば、 β_1 の制御点 q_z 座標に関する感度係数が次式により求められる。

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial q_{z,ij}} = e_1^\top \frac{\partial \underline{h}}{\partial q_{z,ij}} \underline{g} e_1 - e_1^\top \underline{h} \underline{g} \frac{\partial \underline{g}}{\partial q_{z,ij}} e_1 + e_2^\top \frac{\partial \underline{h}}{\partial q_{z,ij}} \underline{g} e_2 - e_2^\top \underline{h} \underline{g} \frac{\partial \underline{g}}{\partial q_{z,ij}} e_2 \quad (3.26)$$

3.2.6 β_2 不変量の制御点の z 座標 q_z に関する感度解析

β_2 不変量は次式で定義される。

$$\beta_2 = \frac{\sum_{\kappa=s,t} \sum_{\lambda=s,t} \sum_{\mu=s,t} \sum_{\nu=s,t} h_{\nu\lambda} h_{\mu\kappa} \tilde{E}^{\kappa\lambda} \tilde{E}^{\mu\nu}}{2 \det(\underline{g})} \quad (3.27)$$

これを計算して整理すると、次式のように表すこともできる。

$$\beta_2 = \frac{\det(\underline{h})}{\det(\underline{g})} \quad (3.28)$$

これを制御点 q_z 座標で偏微分することで β_2 の制御点 q_z 座標に関する感度係数が次式により求められる。

$$\frac{\partial \beta_2}{\partial q_{z,ij}} = \frac{\partial \det(\underline{h})}{\partial q_{z,ij}} \det(\underline{g})^{-1} + \det(\underline{h}) \frac{\partial \det(\underline{g})^{-1}}{\partial q_{z,ij}} \quad (3.29)$$

ただし、

$$\frac{\partial \det(\underline{h})}{\partial q_{z,ij}} = \frac{\partial h_{ss}}{\partial q_{z,ij}} h_{tt} + h_{ss} \frac{\partial h_{tt}}{\partial q_{z,ij}} - 2h_{st} \frac{\partial h_{st}}{\partial q_{z,ij}} \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial \det(\underline{g})^{-1}}{\partial q_{z,ij}} = \frac{\partial (g_{ss} g_{tt} - g_{st}^2)^{-1}}{\partial q_{z,ij}} = - \frac{1}{(g_{ss} g_{tt} - g_{st}^2)^2} \left(\frac{\partial g_{ss}}{\partial q_{z,ij}} g_{tt} + g_{ss} \frac{\partial g_{tt}}{\partial q_{z,ij}} - 2g_{st} \frac{\partial g_{st}}{\partial q_{z,ij}} \right) \quad (3.31)$$

である。

3.2.7 γ_1 不変量の制御点の z 座標 q_z に関する感度解析

γ_1 不変量は次式で定義される。

$$\gamma_1 = \sum_{\lambda=s,t} \sum_{\kappa=s,t} h_{\lambda\kappa} z^\kappa z^\lambda \quad (3.32)$$

これをマトリクスの形で書くと次式となる。

$$\gamma_1 = \underline{z}^\top \underline{h} \underline{z} \quad (3.33)$$

上式は式 (2.57) を考慮すると

$$\gamma_1 = \underline{z}^\top \underline{g} \underline{h} \underline{g} \underline{z} \quad (3.34)$$

と書ける。これを制御点 q_z 座標で偏微分することで次式を得る。

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial q_{z,ij}} = \frac{\partial \underline{z}}{\partial q_{z,ij}}^\top \underline{g} \underline{h} \underline{g} \underline{z} + \underline{z}^\top \frac{\partial \underline{g}}{\partial q_{z,ij}} \underline{h} \underline{g} \underline{z} + \underline{z}^\top \underline{g} \frac{\partial \underline{h}}{\partial q_{z,ij}} \underline{g} \underline{z} + \underline{z}^\top \underline{g} \underline{h} \frac{\partial \underline{g}}{\partial q_{z,ij}} \underline{z} + \underline{z}^\top \underline{g} \underline{h} \underline{g} \frac{\partial \underline{z}}{\partial q_{z,ij}} \quad (3.35)$$

さらに、式 (3.21) を考慮すれば、 γ_1 の制御点 q_z 座標に関する感度係数が次式により求められる。

$$\frac{\partial \gamma_1}{\partial q_{z,ij}} = \frac{\partial \underline{z}}{\partial q_{z,ij}}^\top \underline{g} \underline{h} \underline{g} \underline{z} - \underline{z}^\top \underline{g} \frac{\partial \underline{g}}{\partial q_{z,ij}} \underline{g} \underline{h} \underline{g} \underline{z} + \underline{z}^\top \underline{g} \frac{\partial \underline{h}}{\partial q_{z,ij}} \underline{g} \underline{z} - \underline{z}^\top \underline{g} \underline{h} \underline{g} \frac{\partial \underline{g}}{\partial q_{z,ij}} \underline{z} + \underline{z}^\top \underline{g} \underline{h} \underline{g} \frac{\partial \underline{z}}{\partial q_{z,ij}} \quad (3.36)$$

3.2.8 γ_2 不変量の制御点の z 座標 q_z に関する感度解析

γ_2 不変量は次式で定義される。

$$\gamma_2 = \sum_{\lambda=s,t} \sum_{\kappa=s,t} h_{\lambda\kappa} \tilde{z}^\kappa z^\lambda \left(= \sum_{\lambda=s,t} \sum_{\kappa=s,t} h_{\lambda\kappa} z^\kappa \tilde{z}^\lambda \right) \quad (3.37)$$

これをマトリクスの形で書くと次式となる。

$$\gamma_2 = \bar{\mathbf{z}}^\top \mathbf{h} \tilde{\mathbf{z}} \quad (3.38)$$

上式は式 (2.57), (2.59) を考慮すると

$$\gamma_2 = \mathbf{z}^\top \bar{\mathbf{g}} \mathbf{h} \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{z} \quad (3.39)$$

と書ける。これを制御点 q_z 座標で偏微分することで次式を得る。

$$\frac{\partial \gamma_2}{\partial q_{z,ij}} = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial q_{z,ij}}^\top \bar{\mathbf{g}} \mathbf{h} \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{z} + \mathbf{z}^\top \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}}{\partial q_{z,ij}} \mathbf{h} \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{z} + \mathbf{z}^\top \bar{\mathbf{g}} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial q_{z,ij}} \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{z} + \mathbf{z}^\top \bar{\mathbf{g}} \mathbf{h} \tilde{\mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial q_{z,ij}} \quad (3.40)$$

さらに、式 (3.21) を考慮すれば、 γ_2 の制御点 q_z 座標に関する感度係数が次式により求められる。

$$\frac{\partial \gamma_2}{\partial q_{z,ij}} = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial q_{z,ij}}^\top \bar{\mathbf{g}} \mathbf{h} \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{z} - \mathbf{z}^\top \bar{\mathbf{g}} \frac{\partial \bar{\mathbf{g}}}{\partial q_{z,ij}} \bar{\mathbf{g}} \mathbf{h} \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{z} + \mathbf{z}^\top \bar{\mathbf{g}} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial q_{z,ij}} \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{z} - \mathbf{z}^\top \bar{\mathbf{g}} \mathbf{h} \tilde{\mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial q_{z,ij}} \quad (3.41)$$

3.2.9 γ_3 不変量の制御点の z 座標 q_z に関する感度解析

γ_3 不変量は次式で定義される。

$$\gamma_3 = \frac{\sum_{\lambda=s,t} \sum_{\kappa=s,t} h_{\lambda\kappa} \tilde{z}^\kappa \tilde{z}^\lambda}{\det(\underline{\mathbf{g}})} \quad (3.42)$$

これをマトリクスの形で書くと次式となる。

$$\gamma_3 = \frac{\tilde{\mathbf{z}}^\top \mathbf{h} \tilde{\mathbf{z}}}{\det(\underline{\mathbf{g}})} \quad (3.43)$$

上式は式 (2.59) を考慮すると

$$\gamma_3 = \frac{\mathbf{z}^\top \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{h} \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{z}}{\det(\underline{\mathbf{g}})} \quad (3.44)$$

と書ける。これを制御点 q_z 座標で偏微分することで γ_3 の制御点 q_z 座標に関する感度係数が次式により求められる。

$$\frac{\partial \gamma_3}{\partial q_{z,ij}} = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial q_{z,ij}}^\top \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{h} \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{z} \det(\underline{\mathbf{g}})^{-1} + \mathbf{z}^\top \tilde{\mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial q_{z,ij}} \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{z} \det(\underline{\mathbf{g}})^{-1} + \mathbf{z}^\top \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{h} \tilde{\mathbf{E}} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial q_{z,ij}} \det(\underline{\mathbf{g}})^{-1} + \mathbf{z}^\top \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{h} \tilde{\mathbf{E}} \mathbf{z} \frac{\partial \det(\underline{\mathbf{g}})^{-1}}{\partial q_{z,ij}} \quad (3.45)$$

3.2.10 α 不変量の制御点の z 座標 q_z に関する感度解析

α 不変量は、

$$\alpha = \frac{1}{4} \beta_1^2 - \beta_2 \quad (3.46)$$

のように β 不変量を用いて書き表すことができたので、 α の制御点 q_z 座標に関する感度係数は β 不変量の感度係数を介して次式により求められる。

$$\frac{\partial \alpha}{\partial q_{z,ij}} = \frac{1}{2} \beta_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial q_{z,ij}} - \frac{\partial \beta_2}{\partial q_{z,ij}} \quad (3.47)$$

本章での最適化問題での共通事項は以下のとおりである。

- 応力算定は有限要素法による線形静的解析によりおこなう。
- 有限要素は三角形平面シェル要素^{*3}を用いる。
- 材料は普通コンクリートとし、ヤング率を 21GPa, ポアソン比を 0.17 とする。
- 外力は自重として単位体積重量 24kN/m³ を作用させる。
- シェル厚は一様に 0.1m とする。
- 最適化問題の定式化に際し, 変位の自由度を n , 節点変位ベクトルを $\mathbf{d} \in R^n$, 線形弾性剛性マトリクスを $\mathbf{K} \in R^{n \times n}$, シェル中央面の総面積を S , 支点の z 座標を r_z^* で表わす。
- 初期形状の値を下添え字の 0 で表わす。

3.3 テンソル積ベジエ曲面により形状記述される正方形平面を有するシェル

3.3.1 最適化モデル

1つ目の最適化モデルは, 図 3.1 に示すような正方形平面を有するシェル構造物とする。ここで, 支持条件は 4 隅をピン支持とし, 応力集中を避けるために各隅で 2 個ずつの支点を与える。初期形状は次のような双 2 次関数で与える。

$$z = h(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) \quad (3.48)$$

ここで, 支点を含む平面の中央を座標の原点とし, スパン 30m, ライズ 6m ($a = b = 15, h = 6/a^2b^2$) とする。形状はテンソル積ベジエ曲面により記述し, 制御点は曲面全体に 7×7 の格子状に配置する。最適化の際の設計変数は, 図に黒点で示した制御点の z 座標 q_z とする。設計変数の数は 49 である。弾性解析はフルモデル解析とする。要素数は 644 である。外力, 材料定数, 断面形状などは, 3.2.10 節の最後に示した通りである。

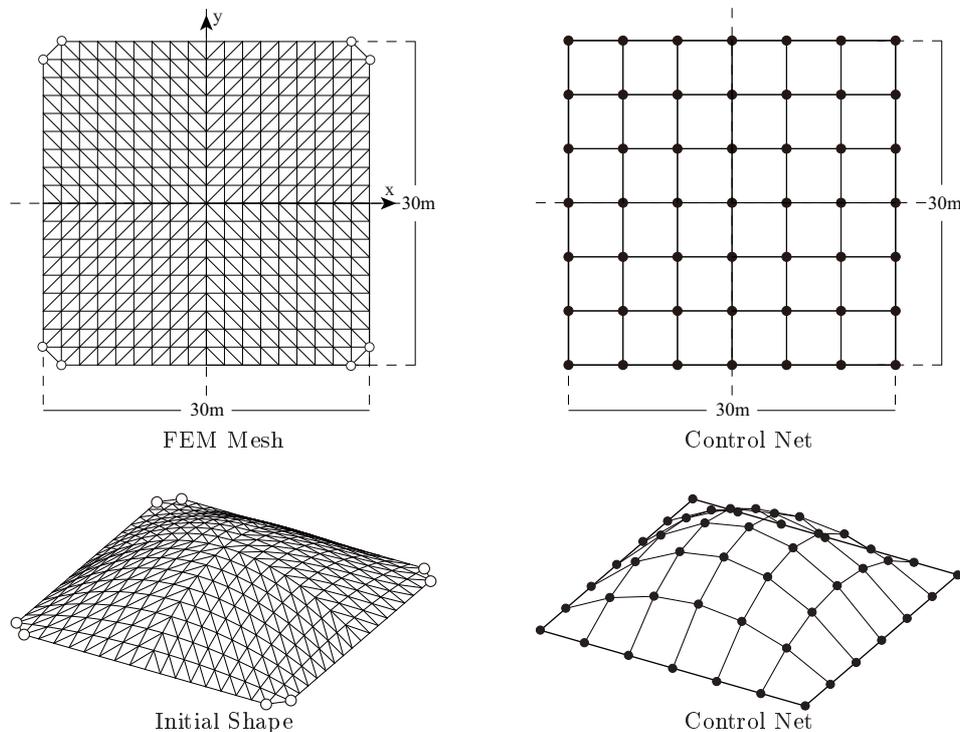


図 3.1 最適化モデル 1

^{*3} 面内変形要素には定ひずみ要素を, 面外変形要素には Zienkiewicz らの非適合三角形要素を採用する。

次節以降、幾何学的制約を考慮した様々な最適化問題を定式化し、その最適化結果を示す。最適化結果の表記での共通事項は以下のとおりである。

- 変形図の点線は荷重作用前の形状を、実線は荷重作用時の変位を100倍にして表した形状を示している。
- 変形図中の d_{\max} として示した値は各節点の鉛直方向変位のうち最大の値を表す。
- 膜応力分布図において、実線、点線はそれぞれ各要素図心における圧縮応力、引張応力を表し、線の長さは主応力の大きさを表す。
- 膜応力分布図中の σ_{\max}^t は各要素図心における引張応力の最大値、 σ_{\max}^c は圧縮応力の最大値である。
- 曲げ応力分布図中の σ_{\max}^b は各要素図心の曲げモーメントによる縁応力の絶対値のうち最大の値を表している。

3.3.2 例題1：代数不変量制約を与えない場合

最適化概要

次の最適化問題を考える。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(\mathbf{q}_z) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \\ & \text{subject to} && \begin{cases} S(\mathbf{q}_z) - S_0 \leq 0 \\ \mathbf{r}_z^*(\mathbf{q}_z) - \mathbf{r}_{z,0}^* = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.49)$$

この最適化問題は、支持点を不動とし、シェル中央面の面積を初期形状の値以下とする制約条件のもとでひずみエネルギーを最小化する問題である。なお、最適化モデルはシェル厚を一樣としているため、面積制約は体積制約と同義であり、極めてサイズの大きい非現実的な形状が得られることを防ぎ、さらに、設計変数の許容領域を限定して解の収束性を高めるとともに、材料コストを抑えるという意味で経済的指標の役割も果たす。

最適化結果と考察

最適性条件を満足し、最適化は終了した。得られた最適解曲面の形状を図3.2(b)に示す。また、比較の対象として、初期解曲面の形状を図3.2(a)に示す。各図で上方にアイソメトリック図を、下方には立面図をそれぞれ示す。初期形状および最適形状の、自重作用時の弾性変形の様子を図3.3(a),(b)にそれぞれ示す。初期形状および最適形状のシェル中央面の膜応力、および曲げモーメントによる縁応力の分布図を図3.4(a),(b)および図3.5(a),(b)にそれぞれ示す。

図3.2を見ると、最適化を行うことで、側部のサイズがカタナリー状に上昇していることが確認できる。目的関数およびシェル中央面の面積の値を見ると、最適形状は、初期形状と同じ体積を有しながらも、側部のサイズをカタナリー状に上昇させることでひずみエネルギーの値を初期形状からおよそ94%低減できていることがわかる。

図3.3を見ると、最適形状の自重作用時の変位は、初期形状に比べ大幅に低減されていることがわかる。最大鉛直変位は初期形状からおよそ96%低減されており、剛性が飛躍的に上昇している。この結果は、ひずみエネルギーの力学的評価指標としての有効性を示すものである。

図3.4および図3.5を見ると、最適化を行うことで曲げ応力が非常に小さくなっていることが確認できる。初期形状において支持部が負担していた曲げ応力が抑制される代わりに、全体として膜応力によって外力に対し抵抗する力学的メカニズムに変化している。また、初期形状において支持部から側部にかけて生じていた引張力は、最適形状ではその代わりにシェル全面に圧縮力が生じ、それらは支持点に向かって滑らかに流れるように効率的に分布している。

以降、本最適化結果をもとにして、式(3.49)に様々な代数不変量制約の導入を試みる。

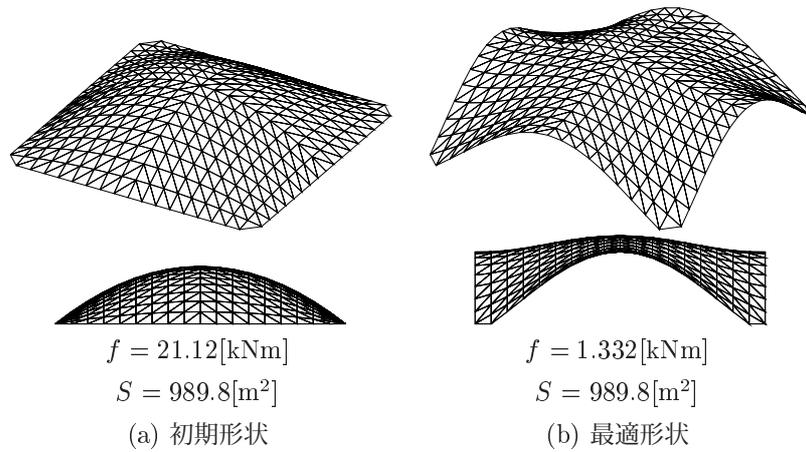


図 3.2 形状図

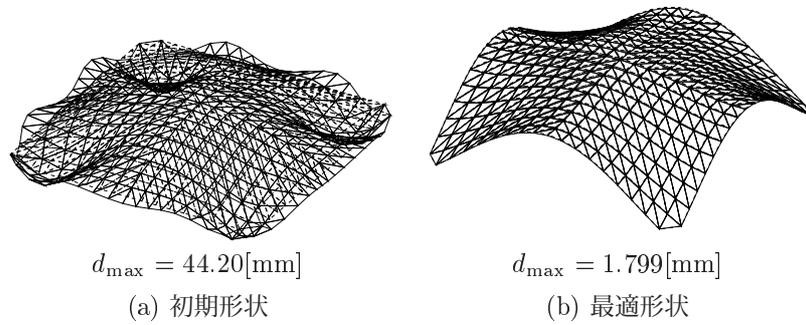


図 3.3 変形図 ($\times 100$)

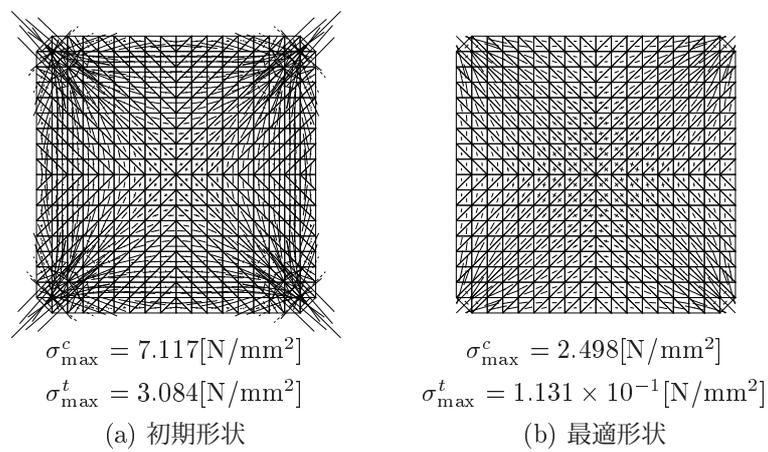


図 3.4 膜応力分布図

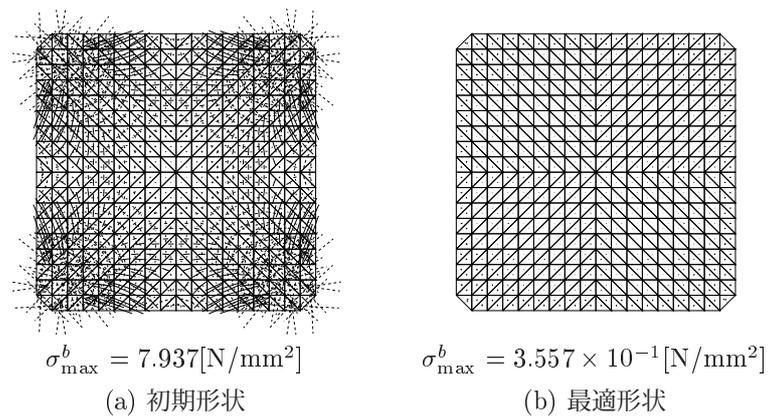


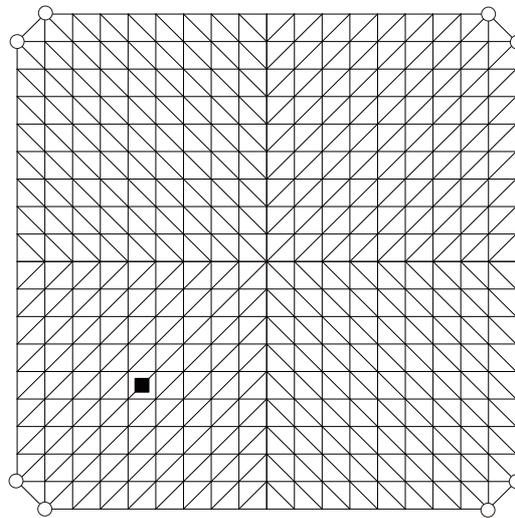
図 3.5 曲げ応力分布図

3.3.3 例題2： β 不変量制約を与えて凸らしさを制御する場合

最適化概要

次の最適化問題を考える。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(\mathbf{q}_z) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \\ & \text{subject to} && \begin{cases} S(\mathbf{q}_z) - S_0 \leq 0 \\ \mathbf{r}_z^*(\mathbf{q}_z) - \mathbf{r}_{z,0}^* = 0 \\ \beta_2^c(\mathbf{q}_z) > 0 \\ \beta_1^c(\mathbf{q}_z) \leq \bar{\beta} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.50)$$



■ : β 不変量制約を与える点

$$(s^c, t^c) = (0.25, 0.25)$$

β_1^c, β_2^c はそれぞれ、図の■点における β_1, β_2 不変量である。この最適化問題は、問題 (3.49) に加えて、 $\bar{\beta} < 0$ のとき、制約点が凸面となるような β 不変量制約を導入している。

最適化結果と考察

$\bar{\beta} = -0.20$ および $\bar{\beta} = -0.40$ として最適化を実行した結果、ともに最適性条件を満足し、最適化は終了した。 $\bar{\beta} = -0.20$ および $\bar{\beta} = -0.40$ として得られた最適解曲面の形状を図 3.6(b) および (c) にそれぞれ示す。また、比較の対象として、初期解曲面の形状を図 3.6(a) に示す。各図で上方にアイソメトリック図を、下方には立面図をそれぞれ示す。初期形状および最適形状の、自重作用時の弾性変形の様子を図 3.7(a)~(c) にそれぞれ示す。初期形状および最適形状のシェル中央面の膜応力、および曲げモーメントによる縁応力の分布図を図 3.8(a)~(c) および図 3.9(a)~(c) にそれぞれ示す。初期形状および最適形状の鉛直方向座標に関する等高線図を図 3.10(a)~(c) にそれぞれ示す。最適形状の等高線図 3.10(b), (c) において、 β 不変量制約を与えた点を黒点で示している。

図 3.6 を見ると、 $\bar{\beta} = -0.20, \bar{\beta} = -0.40$ の両方の場合において、最適化を行うことで側部のライズを上昇させつつも、 β 不変量制約を与えた点が凸面となるように形状に膨らみを生じていることが確認できる。図 3.10 の等高線図と合わせて考察すると、 β_1 の値が小さいほど形状の凸性が大きくなっていることがわかる。このことは、問題 (3.50) において $\bar{\beta}$ の値を変化させることで不変量制約を与えた点の凸らしさを自由にコントロールできることを示している。目的関数およびシェル中央面の面積の値を見ると、最適形状は、初期形状と同じ体積を有し、問題 (3.49) の最適

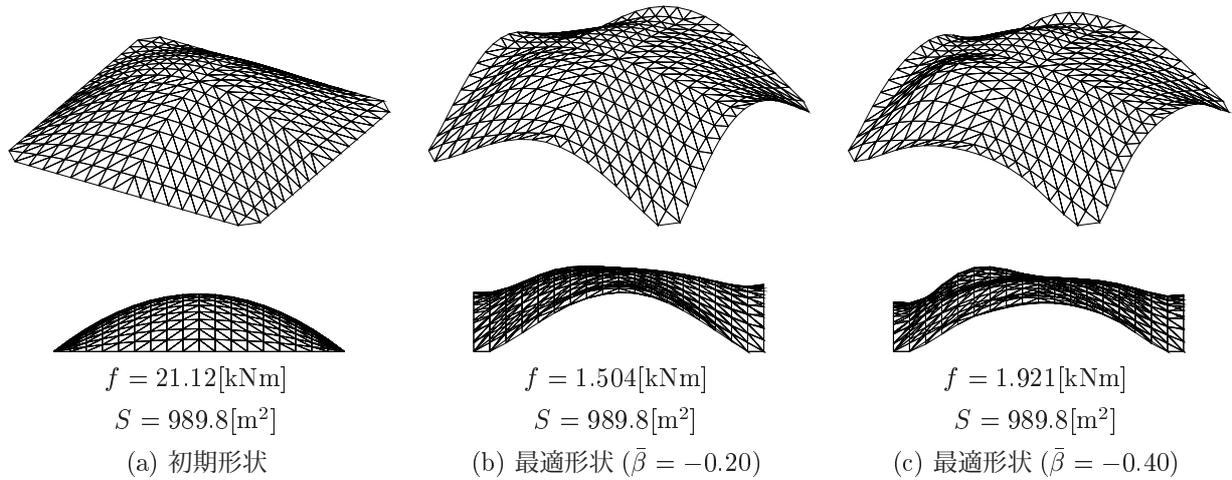
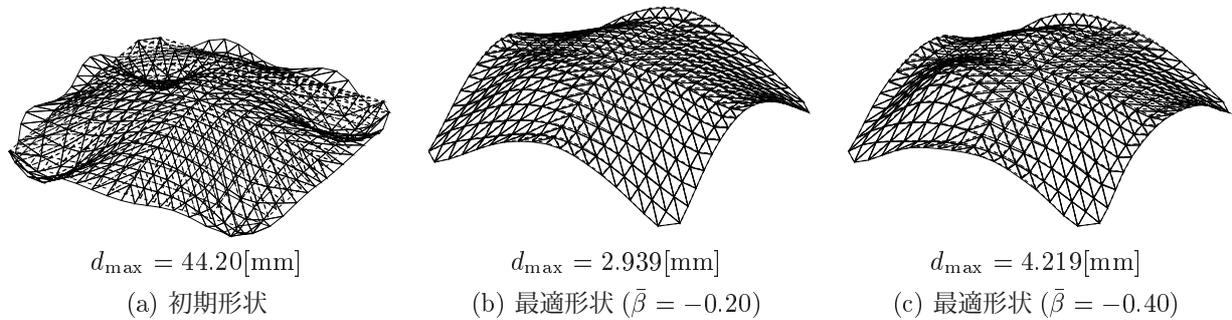


図 3.6 形状図

図 3.7 変形図 ($\times 100$)

形状には及ばないものの、不変量制約点に凸らしさを有しながらひずみエネルギーの値を大きく減少できていることがわかる。

図 3.7 を見ると、最適形状の自重作用時の変位は、初期形状に比べ大幅に低減されており、代数不変量制約を満たしつつも高い剛性が得られていることがわかる。

図 3.8 および図 3.9 を見ると、最適形状は、不変量制約を与えた点に膨らみを生じつつも、問題 (3.49) の最適形状と同様に、曲げ応力、引張応力が小さい圧縮抵抗型の力学的メカニズムを有する形態へと移行していることがわかる。

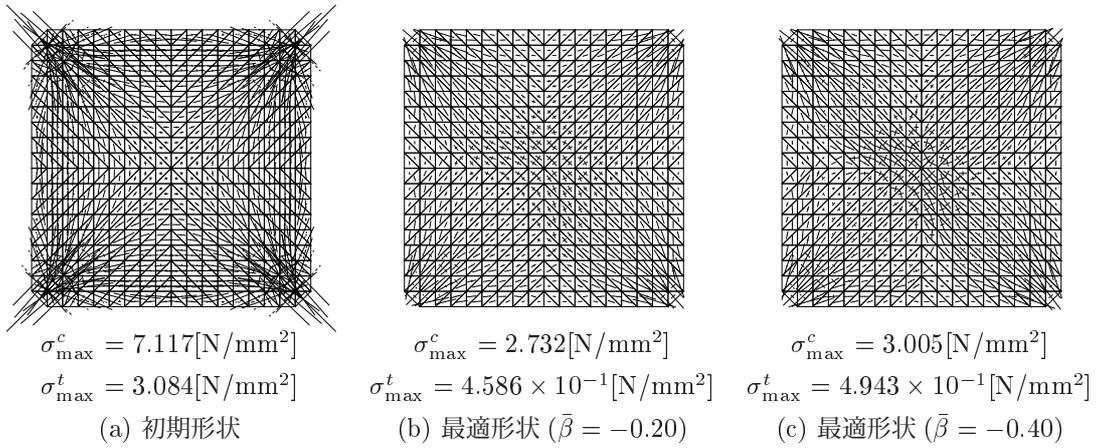


図 3.8 膜応力分布

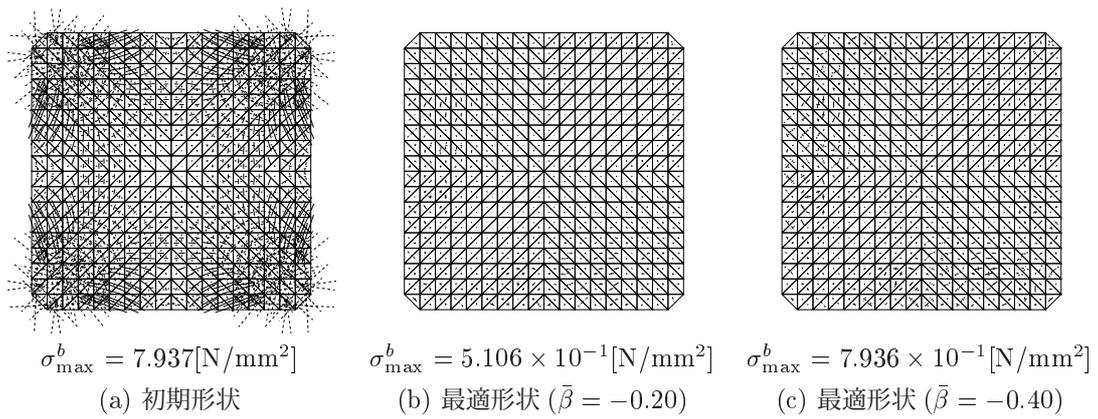


図 3.9 曲げ応力分布

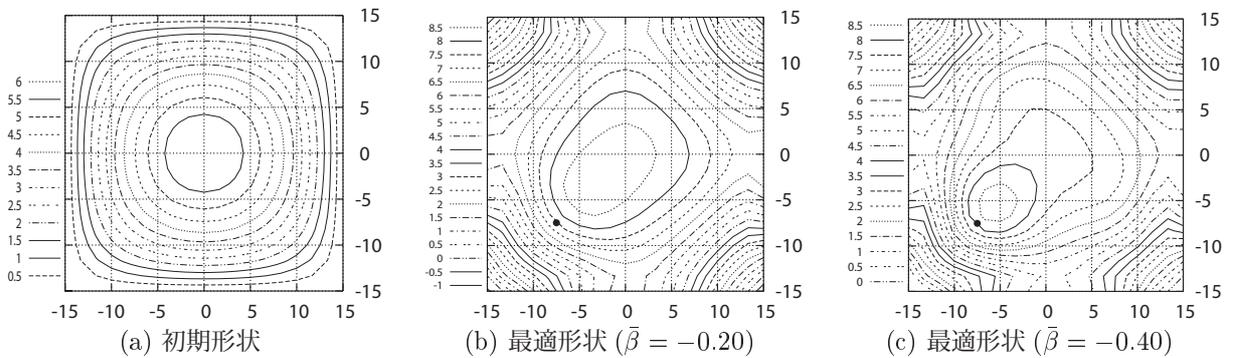


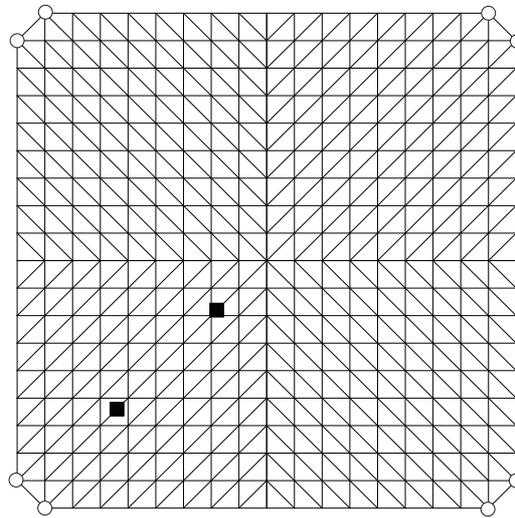
図 3.10 z 座標等高線図

3.3.4 例題 3 : γ 不変量制約を与えて山らしさを制御する場合

最適化概要

次の最適化問題を考える。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(\mathbf{q}_z) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \\ & \text{subject to} && \begin{cases} S(\mathbf{q}_z) - S_0 \leq 0 \\ \mathbf{r}_z^*(\mathbf{q}_z) - \mathbf{r}_{z,0}^* = 0 \\ \gamma_2^{ci}(\mathbf{q}_z) = 0 \\ \gamma_3^{ci^2}(\mathbf{q}_z) - \gamma_1^{ci^2}(\mathbf{q}_z) > 0 \quad (i = 1, 2) \\ \gamma_3^{ci}(\mathbf{q}_z) \leq \bar{\gamma}^{ci} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.51)$$



■ : γ 不変量制約を与える点

$$(s^{c1}, t^{c1}) = (0.20, 0.20), (s^{c2}, t^{c2}) = (0.40, 0.40)$$

γ_1^{ci} , γ_2^{ci} , γ_3^{ci} はそれぞれ、図の■点における γ_1 , γ_2 , γ_3 不変量である。この最適化問題は、問題 (3.49) に加えて、 $\gamma^{ci} < 0$ ($i = 1, 2$) のとき、制約点が山となるような γ 不変量制約を導入している。

最適化結果と考察

$\bar{\gamma}^{c1} = \bar{\gamma}^{c2} = -0.020$ および $\bar{\gamma}^{c1} = \bar{\gamma}^{c2} = -0.040$ として最適化を実行した結果、ともに最適性条件を満足し、最適化は終了した。 $\bar{\gamma}^{c1} = \bar{\gamma}^{c2} = -0.020$ および $\bar{\gamma}^{c1} = \bar{\gamma}^{c2} = -0.040$ として得られた最適解曲面の形状を図 3.11(b) および (c) にそれぞれ示す。また、比較の対象として、初期解曲面の形状を図 3.11(a) に示す。各図で上方にアイソメトリック図を、下方には立面図をそれぞれ示す。初期形状および最適形状の、自重作用時の弾性変形の様子を図 3.12(a) ~ (c) にそれぞれ示す。初期形状および最適形状のシェル中央面の膜応力、および曲げモーメントによる縁応力の分布図を図 3.13(a) ~ (c) および図 3.14(a) ~ (c) にそれぞれ示す。初期形状および最適形状の鉛直方向座標に関する等高線図を図 3.15(a) ~ (c) にそれぞれ示す。最適形状の等高線図 3.15(b), (c) において、 γ 不変量制約を与えた点を黒点で示している。

図 3.11 を見ると、 $\bar{\gamma}^{c1} = \bar{\gamma}^{c2} = -0.020$, $\bar{\gamma}^{c1} = \bar{\gamma}^{c2} = -0.040$ の両方の場合において、最適化を行うことで γ 不変量制約を与えた点が山となるように形状に筒状の膨らみを生じていることが確認できる。図 3.15 の等高線図と合わせ

て考察すると、 γ_3 の値が小さいほど形状の山らしさが大きくなっていることがわかる。このことは、問題 (3.51) において $\bar{\gamma}^{ci}$ の値を変化させることで不変量制約を与えた点の山らしさを自由にコントロールできることを示している。目的関数およびシェル中央面の面積の値を見ると、 $\bar{\gamma}^{c1} = \bar{\gamma}^{c2} = -0.020$ とした場合の最適形状は、初期形状と同じ体積を有し、問題 (3.49) の最適形状には及ばないものの、不変量制約点に凸らしさを有しながらひずみエネルギーの値を大きく減少できていることがわかる。 $\bar{\gamma}^{c1} = \bar{\gamma}^{c2} = -0.040$ とした場合の最適形状も、初期形状からひずみエネルギーの値が低減されている。

図 3.12 を見ると、 $\bar{\gamma}^{c1} = \bar{\gamma}^{c2} = -0.020$ とした場合の最適形状の自重作用時の変位は、初期形状に比べ大幅に低減されており、代数不変量制約を満たしつつも高い剛性が得られていることがわかる。 $\bar{\gamma}^{c1} = \bar{\gamma}^{c2} = -0.040$ とした場合の最適形状の自重作用時の変位は、初期形状に比べると低減されているものの、比較的大きな変形をする結果となった。

図 3.13 および図 3.14 を見ると、 $\bar{\gamma}^{c1} = \bar{\gamma}^{c2} = -0.020$ とした場合の最適形状は、不変量制約を与えた点に筒状の膨らみを生じつつも、問題 (3.49) の最適形状と同様に、曲げ応力、引張応力が小さい圧縮抵抗型の力学的メカニズムを有する形態へと移行していることがわかる。一方で、 $\bar{\gamma}^{c1} = \bar{\gamma}^{c2} = -0.040$ とした場合の最適形状は、圧縮抵抗型の力学的メカニズムを形成するには至らず、別の力学形態へ移行し、 $\bar{\gamma}^{c1} = \bar{\gamma}^{c2} = -0.020$ とした場合の最適形状と比較して大きく剛性が劣る結果となった。これは、面積制約に加えて厳しい γ 不変量制約課して山らしさを高めた結果、実行可能領域内が限定されたためと考えられる。

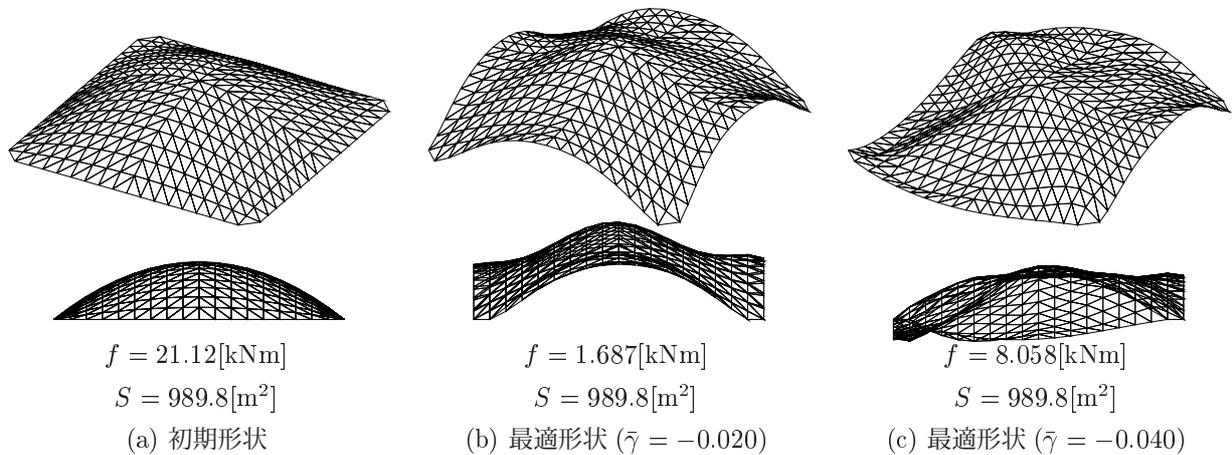
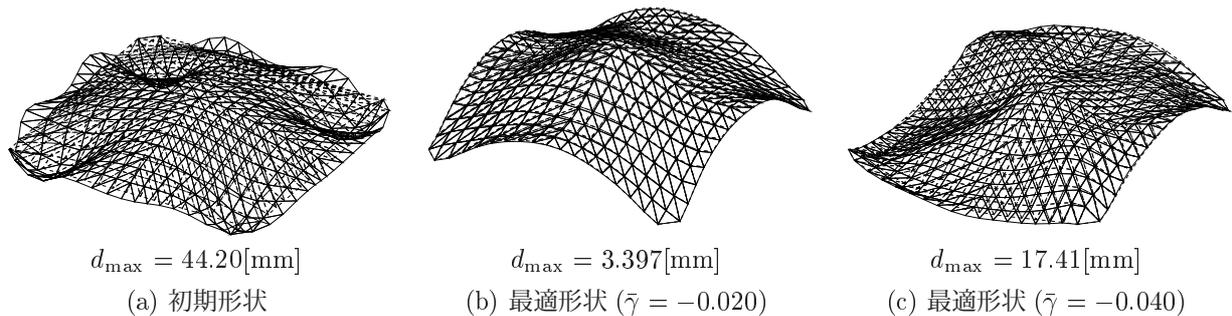


図 3.11 形状図

図 3.12 変形図 ($\times 100$)

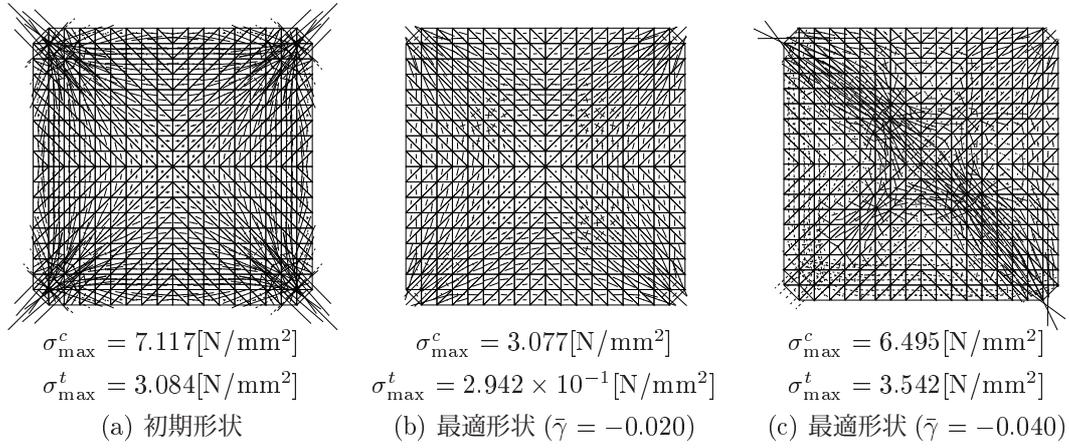


図 3.13 膜応力分布

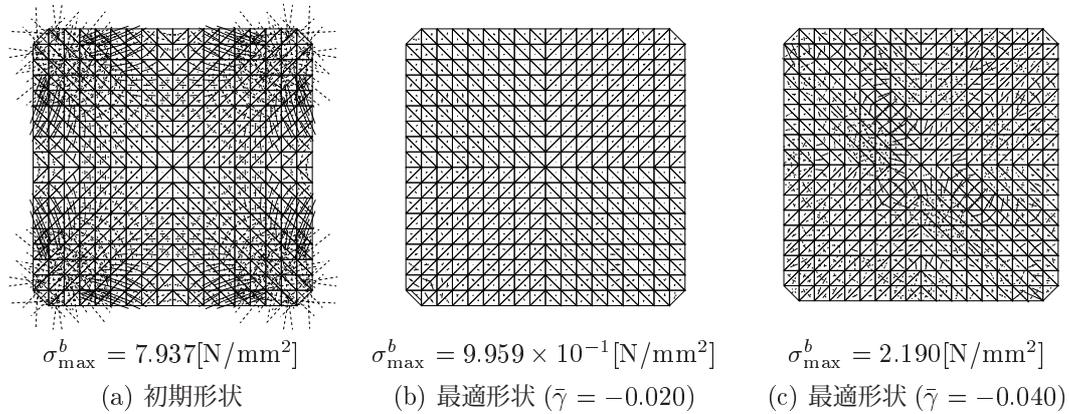


図 3.14 曲げ応力分布

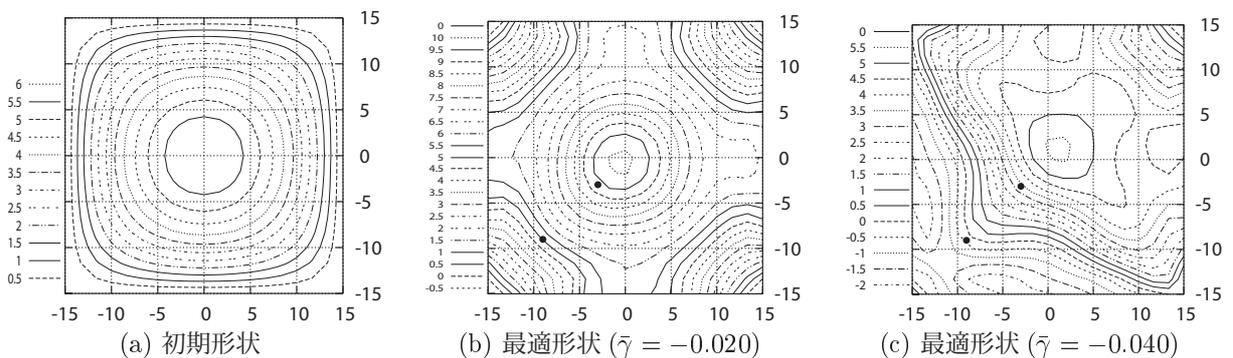


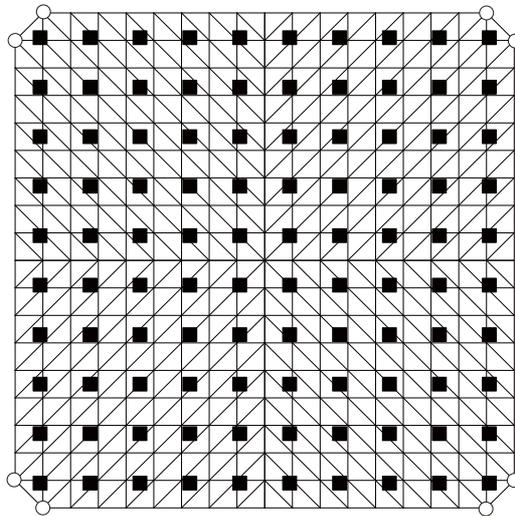
図 3.15 z 座標等高線図

3.3.5 例題4：球らしさを最大化する場合

最適化概要

次の最適化問題を考える。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \begin{cases} f(\mathbf{q}_z) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \\ g(\mathbf{q}_z) = \sum_{i=1}^{100} \alpha^{c_i} \end{cases} \\ & \text{subject to} && \begin{cases} S(\mathbf{q}_z) - S_0 \leq 0 \\ \mathbf{r}_z^*(\mathbf{q}_z) - \mathbf{r}_{z,0}^* = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.52)$$



■ : α 不変量を計算する点

$$s^{c_i}, t^{c_i} \in [0.05, 0.15, 0.25, 0.35, 0.45, 0.55, 0.65, 0.75, 0.85, 0.95], \quad (i = 1, 2, \dots, 100)$$

この最適化問題は、問題 (3.49) に加えて、新たに曲面の球らしさを最大化するような目的関数を付加した多目的最適化問題である。ここで、 α^{c_i} は図の黒点における α 不変量である。曲面が完全な球である場合、曲面全体で α 不変量が 0 となる性質がある。裁断球殻は幾何学的な美しさを有し、多くの実構造物に利用されているが、その力学的合理性は必ずしも高くない (例として、初期形状と同様 $S = 989.8$ とした場合の裁断球形シェルの力学性状を図 3.16 に示すが、ひずみエネルギー、最大鉛直変位ともに大きく、剛性が低く支持点周辺に過度の応力集中が起きていることがわかる)。

そこで、ひずみエネルギーの最小化に加えて、曲面上の十分多くの点 (本最適化では図の 100 個の点) の α 不変量の合計を最小化することで、球らしさと剛性の双方を求めた曲面形状の創生を試みる。

多目的最適化問題の求解にあたり、本研究では D.6.2 項で概説した制約法を用い、次の 2 つの制約付き単一目的最適化問題を考える。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(\mathbf{q}_z) \\ & \text{subject to} && \begin{cases} S(\mathbf{q}_z) - S_0 \leq 0 \\ \mathbf{r}_z^*(\mathbf{q}_z) - \mathbf{r}_{z,0}^* = 0 \\ g(\mathbf{q}_z) - \bar{g} \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.53)$$

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && g(\mathbf{q}_z) \\ & \text{subject to} && \begin{cases} S(\mathbf{q}_z) - S_0 \leq 0 \\ \mathbf{r}_z^*(\mathbf{q}_z) - \mathbf{r}_{z,0}^* = 0 \\ f(\mathbf{q}_z) - \bar{f} \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.54)$$

\bar{g} , \bar{f} の値を変化させて繰り返し最適化を行うことでパレート解群を求めることができる。

最適化結果と考察

制約法により, \bar{g} , \bar{f} の値を変えて繰り返し最適化をおこなったところ, 図 3.17 に示すようなパレート解群が得られた。各パレート解は, それぞれ最適性条件を完全に満足した。図 3.17 は, 縦軸に α 不変量の和を, 横軸にひずみエネルギーをとっている。合わせて, 得られたパレート解群の最大主応力および最大鉛直変位を図 3.18 に示す。図 3.18 は, 縦軸左に最大主応力を, 縦軸右に最大鉛直変位をとっている。

ここで, 図 3.17 において, $\bar{f} = 1.70$ とした解は球らしさを最大化した解ではない。しかしながら, $\bar{f} = 1.80, 1.90, \dots$ とひずみエネルギーの制約を緩和していくと, 不等式制約 $S - S_0 \leq 0$ が不活性となり始める。そこで, 初期形状と同様 $S = 989.8$ とした場合の裁断球形シェル (以下, 裁断球殻) をパレート解群とともに比較の対象とすることとした。

得られたパレート解群のうち代表的なシェル形状を図 3.19(a)~(f) に示す。また, 比較の対象として, 裁断球殻のシェル形状を図 3.16(a) に示す。各図で上方にアイソメトリック図を, 下方には立面図をそれぞれ示す。代表的なパレート解の自重作用時の弾性変形の様子を図 3.20(a)~(f) にそれぞれ示す。裁断球殻の自重作用時の弾性変形の様子を図 3.16(b) に示す。代表的なパレート解のシェル中央面の膜応力, および曲げモーメントによる縁応力の分布図を図 3.21(a)~(f) および図 3.22(a)~(f) にそれぞれ示す。裁断球殻のシェル中央面の膜応力, および曲げモーメントによる縁応力の分布図を図 3.16(c) および図 3.16(d) にそれぞれ示す。代表的なパレート解の鉛直方向座標に関する等高線図を図 3.23(a)~(f) にそれぞれ示す。裁断球殻の鉛直方向座標に関する等高線図を図 3.16(e) に示す。

図 3.17 を見ると, ひずみエネルギーと球らしさとの間には, トレード・オフの関係があることが確認できる。図 3.18 を見ると, ひずみエネルギーの値が 1.70 以下の範囲におけるパレート解群は, 球らしさを高めるにつれて最大鉛直変位こそ若干の上昇がみられるものの, 最大主応力の値はほとんど変化がなく, 力学的合理性に大きな劣化が見られないことがわかる。

図 3.19 を見ると, ひずみエネルギー最小解から g の値が小さくなるにつれて, 曲面形状が球へと近づいていることがわかる。図 3.23 の等高線図と合わせて考察すると, その経過が良くわかる。問題 (3.54) において $\bar{f} = 1.700$ としたときの最適形状は, 裁断球殻のシェル形状 3.16(a) および等高線図 (e) と近似しており, かなり球らしさが高められていると言える。最適化モデルのスパンは 30m であるため, 節点単位で見た場合には形状の相違は数十センチ単位と比較的大きいが, マクロに見ると類似した形状を有するにもかかわらず, ひずみエネルギーの値は裁断球殻と比べてはるかに小さく, わずかな形状の違いが剛性に大きく影響を及ぼすことがわかる。

図 3.20 を見ると, 最大鉛直変位はどのパレート解も小さく抑えられており, 本手法のようにひずみエネルギーと球らしさの双方を目的関数として形状最適化をおこなった場合, ある程度球らしさを高めても, 高い力学性能を維持した曲面形状を導くことができる。

図 3.21 および図 3.22 を見ると, ひずみエネルギー最小解に見られる全体として膜応力によって外力に対し抵抗する力学的メカニズムが, 今回提示したパレート解群に共通してみられることが確認できる。特に問題 (3.54) において $\bar{f} = 1.700$ としたときの最適形状はかなりの球らしさを有し, ひずみエネルギー最小解とは曲面形状に大きな違いを有するにもかかわらず, どちらも同じような力の伝達経路を有している。一方で完全な裁断球形シェルの力学的メカニズムは, 今回提示したパレート解群のそれとは大きく劣り, 境界部に大きな曲げ応力が発生している。

本手法により, 実構造物にも良く利用されている裁断球殻に近い曲面形状を有し, かつ高い剛性を有するシェルの創生が可能であるといえる。

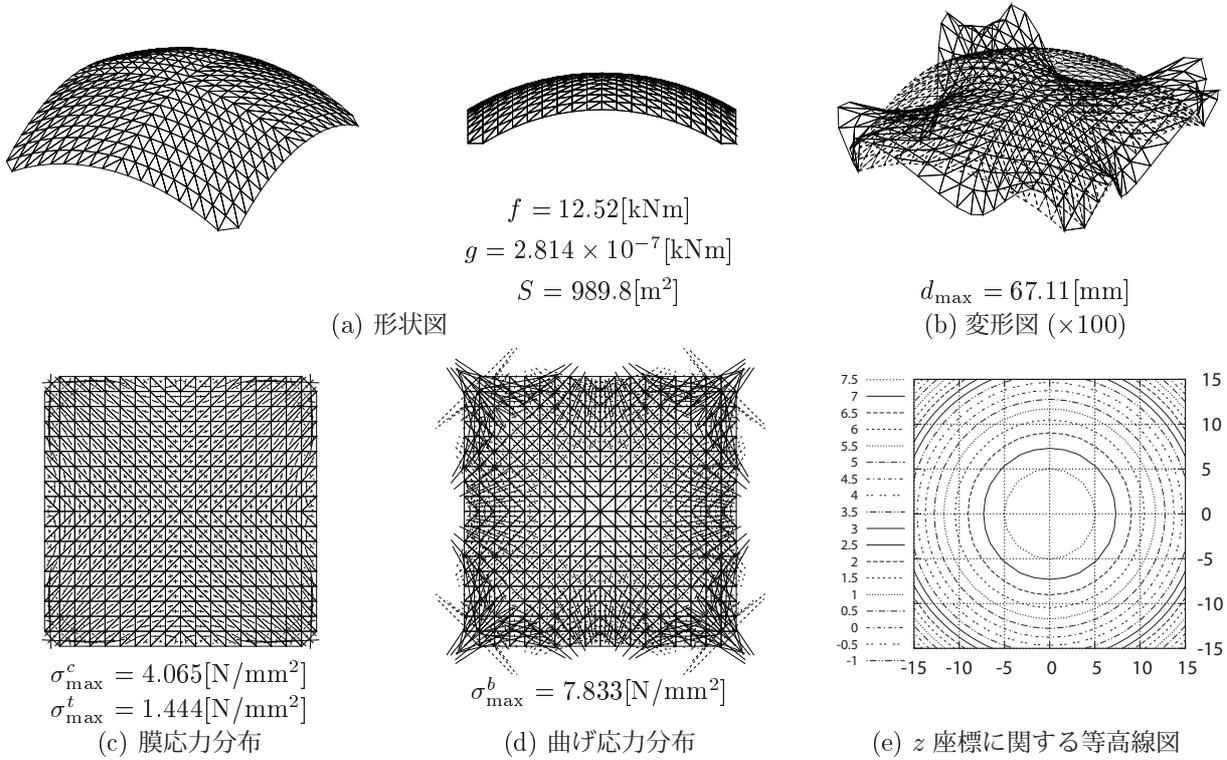


図 3.16 $S = 989.8$ とした場合の裁断球形シェルの力学性状

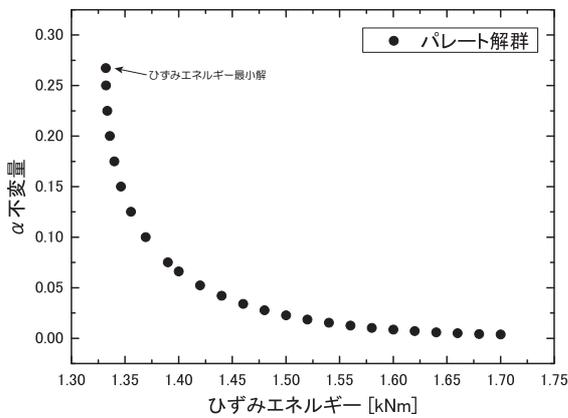


図 3.17 パレート解群の存在位置

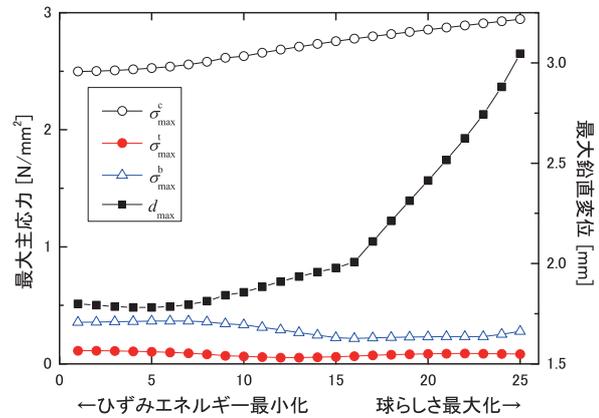
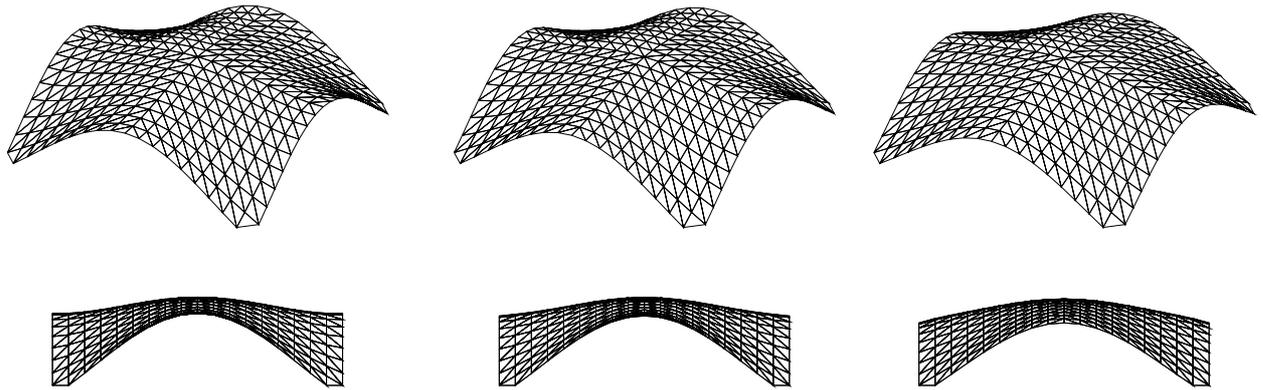


図 3.18 パレート解群の力学性能



$$\begin{aligned}
 f &= 1.332[\text{kNm}] \\
 g &= 0.2672 \\
 S &= 989.8[\text{m}^2]
 \end{aligned}$$

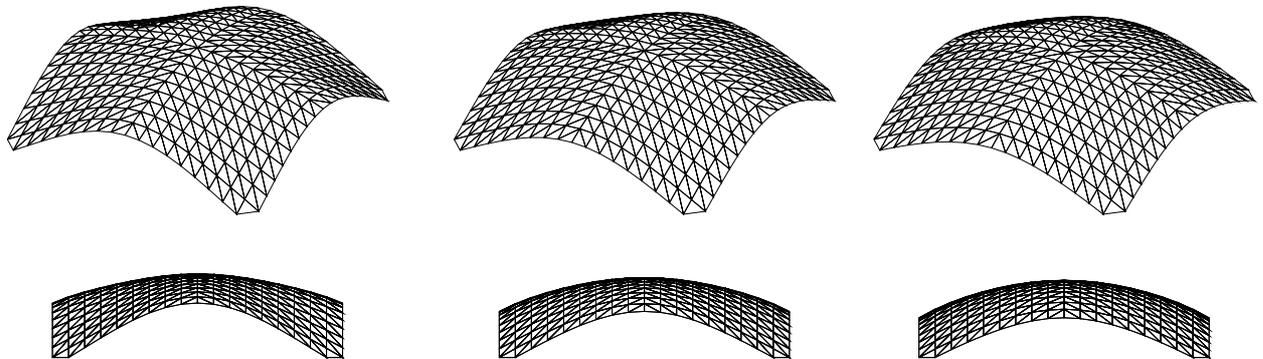
(a) 最適形状 (ひずみエネルギー最小解)

$$\begin{aligned}
 f &= 1.336[\text{kNm}] \\
 g &= 0.2000 \\
 S &= 989.8[\text{m}^2]
 \end{aligned}$$

(b) 最適形状 ($\bar{g} = 2.000 \times 10^{-1}$)

$$\begin{aligned}
 f &= 1.369[\text{kNm}] \\
 g &= 0.1000 \\
 S &= 989.8[\text{m}^2]
 \end{aligned}$$

(c) 最適形状 ($\bar{g} = 1.000 \times 10^{-1}$)



$$\begin{aligned}
 f &= 1.440[\text{kNm}] \\
 g &= 4.196 \times 10^{-2} \\
 S &= 989.8[\text{m}^2]
 \end{aligned}$$

(d) 最適形状 ($\bar{f} = 1.440$)

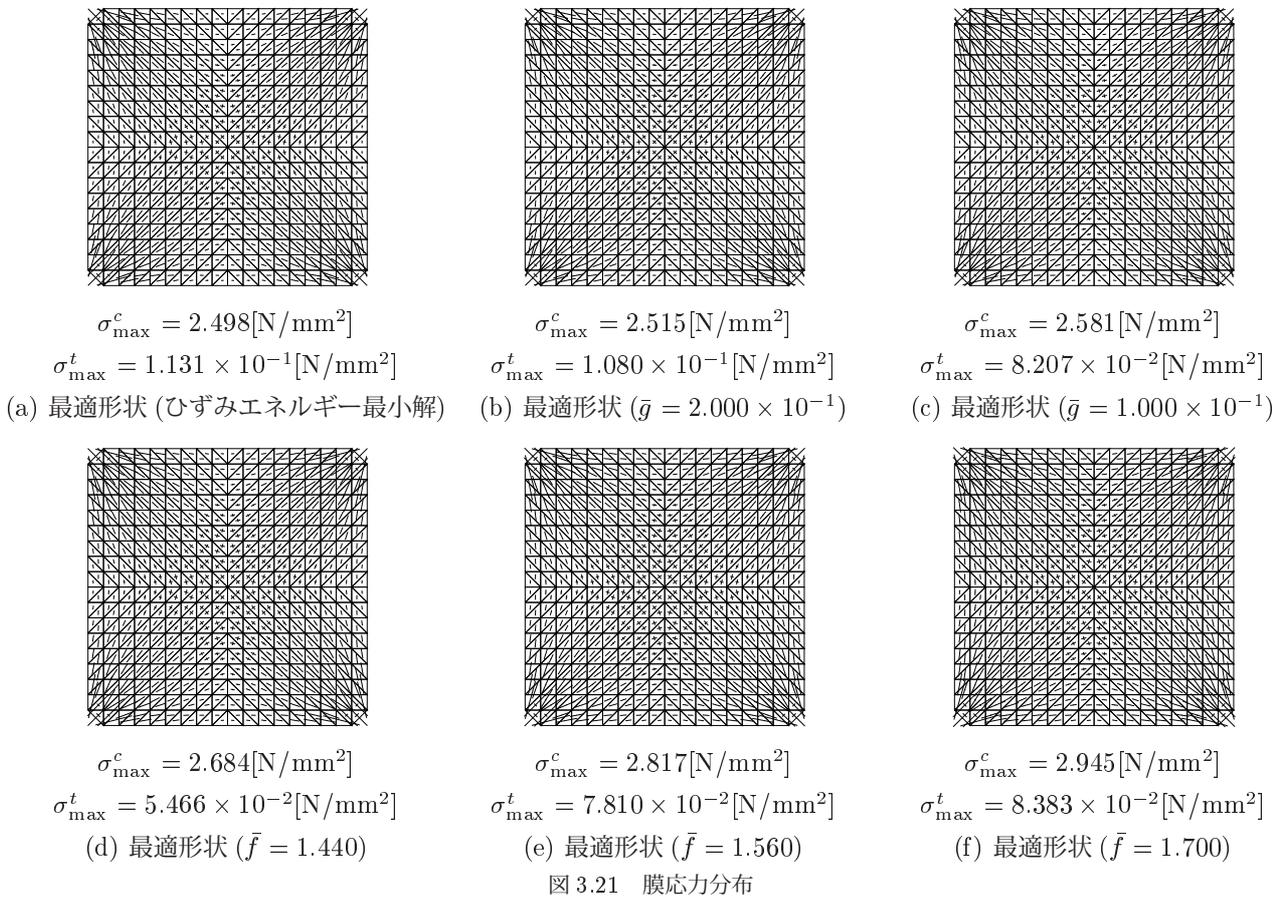
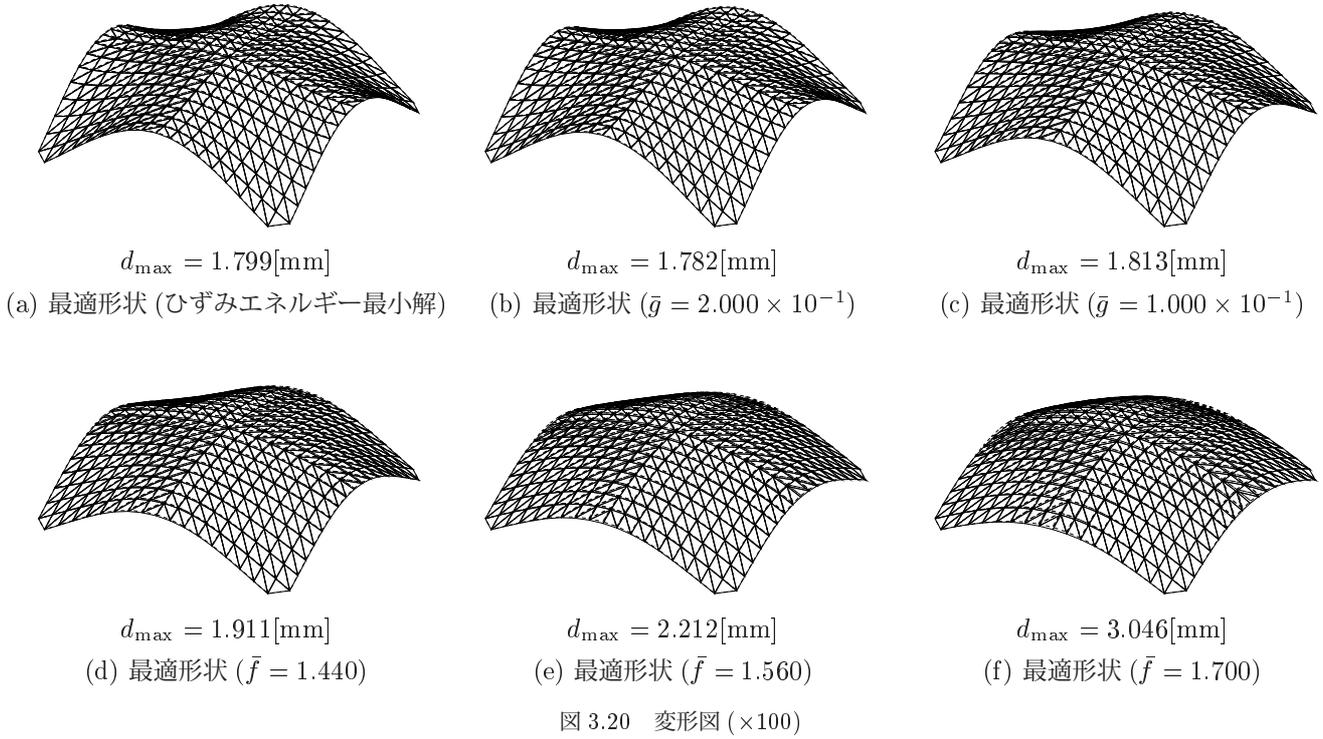
$$\begin{aligned}
 f &= 1.560[\text{kNm}] \\
 g &= 1.265 \times 10^{-2} \\
 S &= 989.8[\text{m}^2]
 \end{aligned}$$

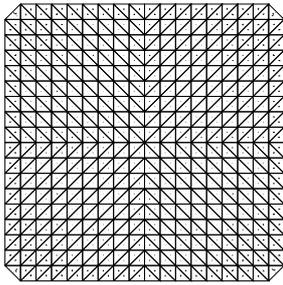
(e) 最適形状 ($\bar{f} = 1.560$)

$$\begin{aligned}
 f &= 1.700[\text{kNm}] \\
 g &= 3.825 \times 10^{-3} \\
 S &= 989.8[\text{m}^2]
 \end{aligned}$$

(f) 最適形状 ($\bar{f} = 1.700$)

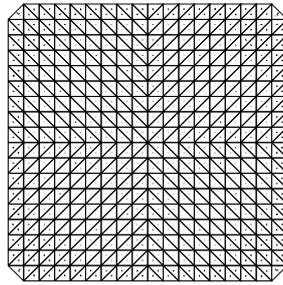
図 3.19 形状図





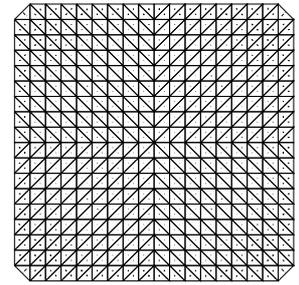
$$\sigma_{\max}^b = 3.557 \times 10^{-1} [\text{N/mm}^2]$$

(a) 最適形状 (ひずみエネルギー最小解)



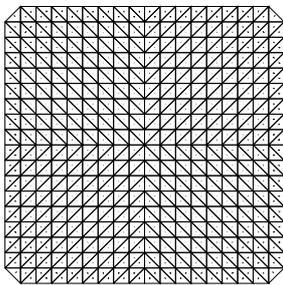
$$\sigma_{\max}^b = 3.631 \times 10^{-1} [\text{N/mm}^2]$$

(b) 最適形状 ($\bar{g} = 2.000 \times 10^{-1}$)



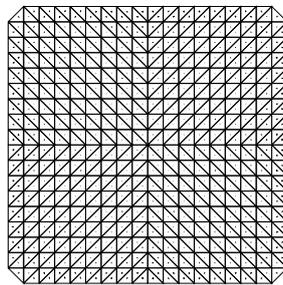
$$\sigma_{\max}^b = 3.594 \times 10^{-1} [\text{N/mm}^2]$$

(c) 最適形状 ($\bar{g} = 1.000 \times 10^{-1}$)



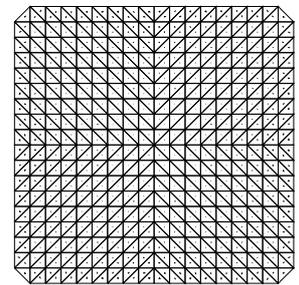
$$\sigma_{\max}^b = 2.901 \times 10^{-1} [\text{N/mm}^2]$$

(d) 最適形状 ($\bar{f} = 1.440$)



$$\sigma_{\max}^b = 2.260 \times 10^{-1} [\text{N/mm}^2]$$

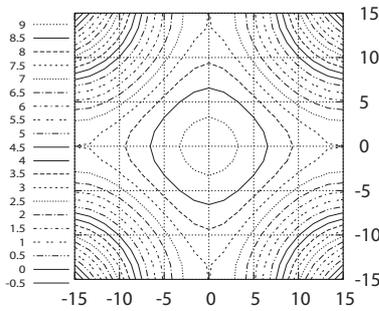
(e) 最適形状 ($\bar{f} = 1.560$)



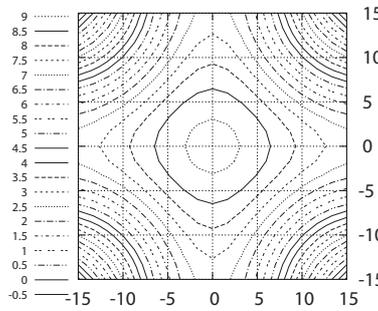
$$\sigma_{\max}^b = 2.783 \times 10^{-1} [\text{N/mm}^2]$$

(f) 最適形状 ($\bar{f} = 1.700$)

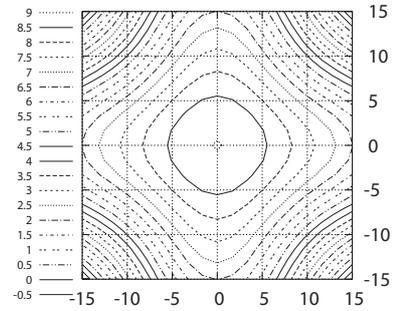
図 3.22 曲げ応力分布



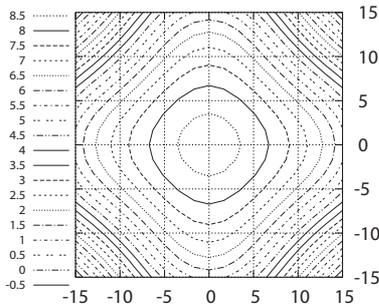
(a) 最適形状 (ひずみエネルギー最小解)



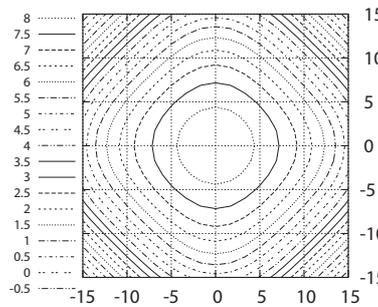
(b) 最適形状 ($\bar{g} = 2.000 \times 10^{-1}$)



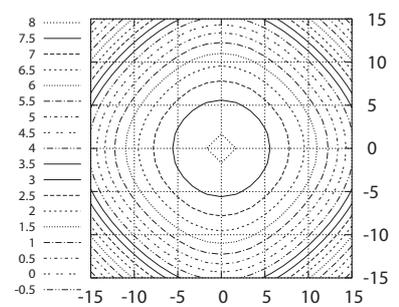
(c) 最適形状 ($\bar{g} = 1.000 \times 10^{-1}$)



(d) 最適形状 ($\bar{f} = 1.440$)



(e) 最適形状 ($\bar{f} = 1.560$)



(f) 最適形状 ($\bar{f} = 1.700$)

図 3.23 z 座標に関する等高線図

3.4 テンソル積ベジエ曲面により形状記述される楕円体シェル

3.4.1 最適化モデル

2つ目の最適化モデルは、図3.24に示すような楕円平面を有するシェル構造物とする。ここで、支持条件は図に示す6点を固定支持とし、初期形状は次のような楕円体関数で与える。

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (3.55)$$

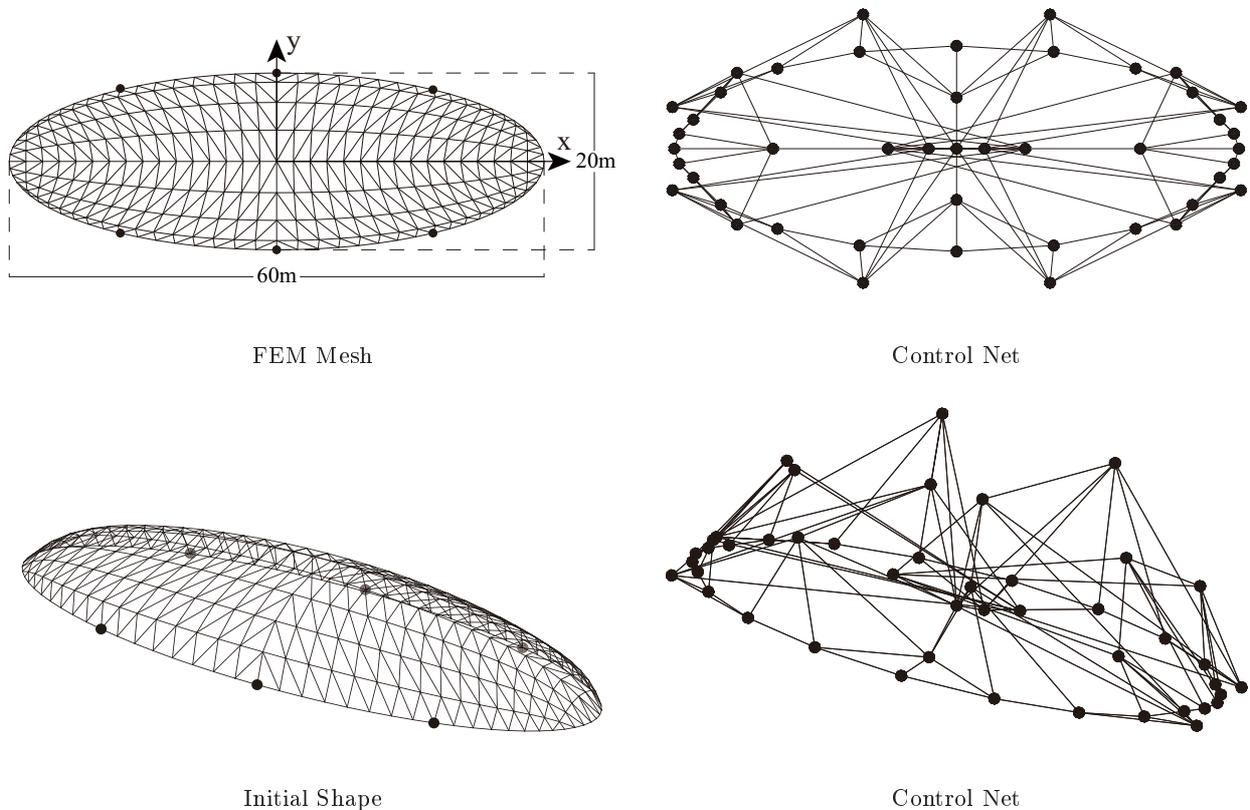


図3.24 最適化モデル2

ここで、支点を含む平面の中央を座標の原点とし、スパン $60\text{m} \times 20\text{m}$ 、ライズ 7m ($a = 60, b = 20, c = 7$) とする。形状はテンソル積ベジエ曲面により記述し、制御点は曲面上の節点の中から周部節点を含む 7×5 の格子状に選んだ節点をベジエ補間により補間して求める。テンソル積ベジエ曲面により楕円や球などの平面形状を補間する場合、制御点は格子状に配置されない*4。最適化の際の設計変数は、図に黒点で示した制御点の z 座標 q_z とする。設計変数の数は35である。弾性解析はフルモデル解析とする。要素数は644である。外力、材料定数、断面形状などは、3.2.10節の最後に示した通りである。

*4 非有理テンソル積ベジエ曲面や、非有理B曲面曲面を用いれば、格子状配置の制御点で楕円を表現することも可能であるが、今回は代数不変量の計算が容易であるテンソル積ベジエ曲面を用いることとした。

3.4.2 例題 1：代数不変量制約を与えない場合

最適化概要

次の最適化問題を考える。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(\mathbf{q}_z) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \\ & \text{subject to} && \begin{cases} S(\mathbf{q}_z) - S_0 \leq 0 \\ \mathbf{r}_z^*(\mathbf{q}_z) - \mathbf{r}_{z,0}^* = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.56)$$

この最適化問題は、支持点を不動とし、シェル中央面の面積を初期形状の値以下とする制約条件のもとでひずみエネルギーを最小化する問題である。

最適化結果と考察

最適性条件を満足し、最適化は終了した。得られた最適解曲面の形状を図 3.25(b) に示す。また、比較の対象として、初期解曲面の形状を図 3.25(a) に示す。各図で上方にアイソメトリック図を、下方には立面図をそれぞれ示す。初期形状および最適形状の、自重作用時の弾性変形の様子を図 3.26(a),(b) にそれぞれ示す。初期形状および最適形状のシェル中央面の膜応力、および曲げモーメントによる縁応力の分布図を図 3.27(a),(b) および図 3.28(a),(b) にそれぞれ示す。

図 3.25 を見ると、最適化を行うことで、側部のライズが上昇するとともに形状に波上のむくりを生じていることが確認できる。シェル側部の先端には、やや滑らかさに欠ける形状があらわれている。これは、制御点の平面配置がイレギュラーであることが一因として考えられる。また、目的関数およびシェル中央面の面積の値を見ると、最適形状は、初期形状と同じ体積を有しながらも、側部のライズを上昇し、形状全体を湾曲させることでひずみエネルギーの値を初期形状からおよそ 89 % 低減できていることがわかる。

図 3.26 を見ると、最適形状の自重作用時の変位は、初期形状に比べ大幅に低減されていることがわかる。最大鉛直変位は初期形状からおよそ 96 % 低減されており、剛性が飛躍的に上昇している。この結果は、ひずみエネルギーの力学的評価指標としての有効性を示すものである。

図 3.27 および図 3.28 を見ると、最適化を行うことで曲げ応力が非常に小さくなっていることが確認できる。初期形状において両側部に発生していた大きな曲げ応力が抑制される代わりに、全体として膜応力によって外力に対し抵抗する力学的メカニズムに変化している。また、初期形状において支持部周辺ならびに両側部の縁周辺に生じていた引張力は、最適形状ではその代わりにシェル全面に圧縮力が生じ、それらは 6 つある支持点のうち主として外側の 4 つの支持点に向かって滑らかに流れるように効率的に分布している。

以降、本最適化結果をもとにして、式 (3.56) に様々な代数不変量制約の導入を試みる。

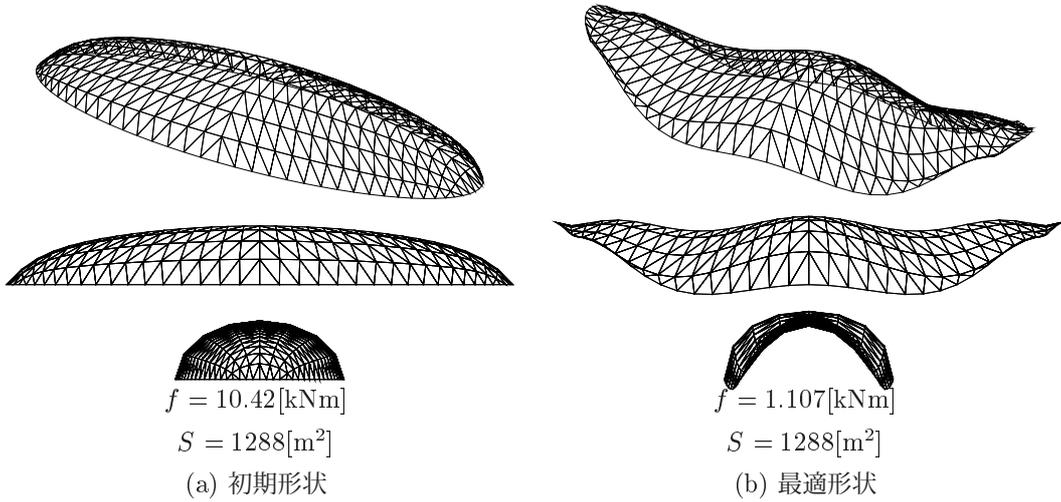


図 3.25 形状図

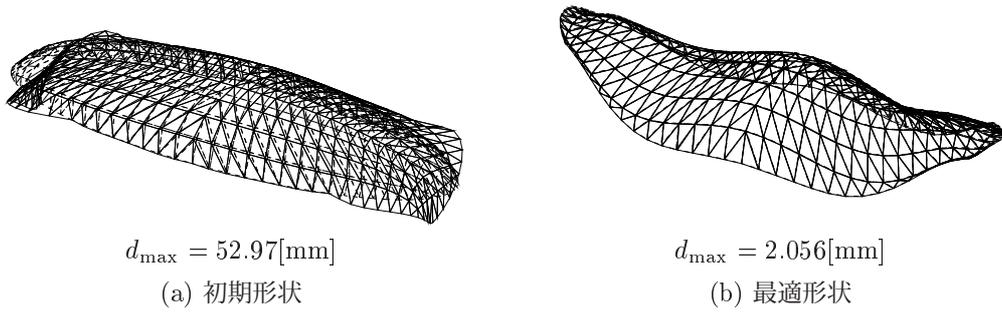


図 3.26 変形図 ($\times 100$)

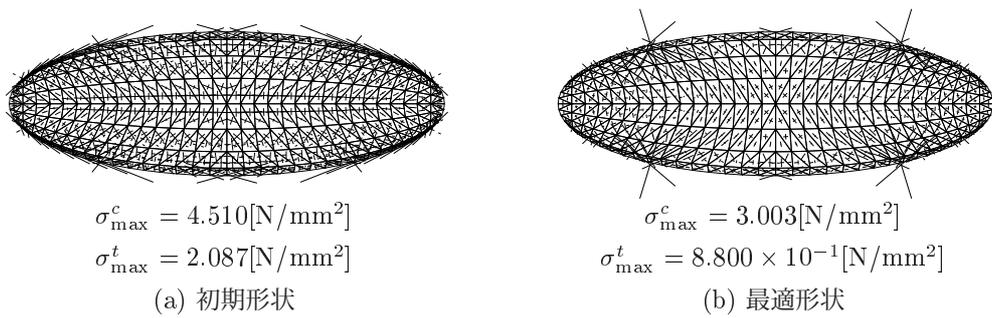


図 3.27 膜応力分布図

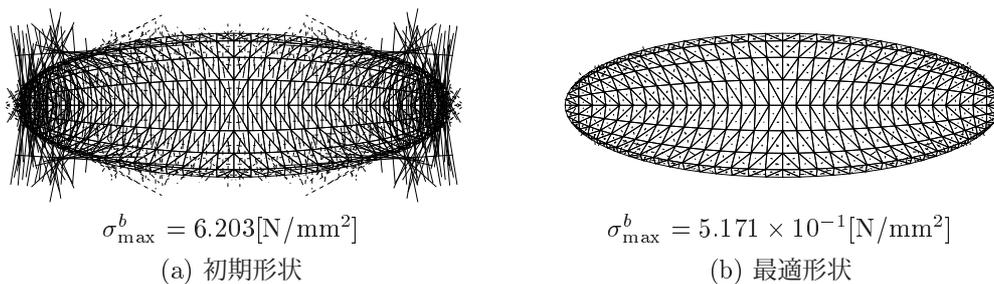


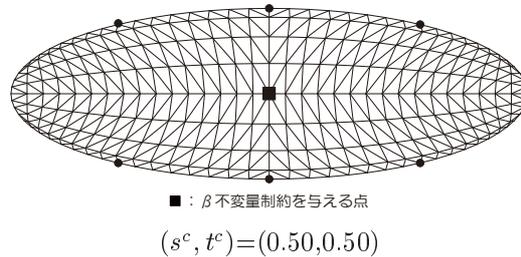
図 3.28 曲げ応力分布図

3.4.3 例題 2 : β 不変量制約を与えて凹らしさを制御する場合

最適化概要

次の最適化問題を考える。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(\mathbf{q}_z) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \\ & \text{subject to} && \begin{cases} S(\mathbf{q}_z) - S_0 \leq 0 \\ \mathbf{r}_z^*(\mathbf{q}_z) - \mathbf{r}_{z,0}^* = 0 \\ \beta_2^c(\mathbf{q}_z) > 0 \\ \beta_1^c(\mathbf{q}_z) \geq \bar{\beta} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.57)$$



β_1^c, β_2^c はそれぞれ、図の■点における β_1, β_2 不変量である。この最適化問題は、問題 (3.56) に加えて、 $\bar{\beta} > 0$ のとき、制約点が凹面となるような β 不変量制約を導入している。

最適化結果と考察

$\bar{\beta} = 0.05$ および $\bar{\beta} = 0.10$ として最適化を実行した結果、ともに最適性条件を満足し、最適化は終了した。 $\bar{\beta} = 0.05$ および $\bar{\beta} = 0.10$ として得られた最適解曲面の形状を図 3.29(b) および (c) にそれぞれ示す。また、比較の対象として、初期解曲面の形状を図 3.29(a) に示す。各図で上方にアイソメトリック図を、下方には立面図をそれぞれ示す。初期形状および最適形状の、自重作用時の弾性変形の様子を図 3.30(a)~(c) にそれぞれ示す。初期形状および最適形状のシェル中央面の膜応力、および曲げモーメントによる縁応力の分布図を図 3.31(a)~(c) および図 3.32(a)~(c) にそれぞれ示す。初期形状および最適形状の鉛直方向座標に関する等高線図を図 3.33(a)~(c) にそれぞれ示す。最適形状の等高線図 3.33(b), (c) において、 β 不変量制約を与えた点を黒点で示している。

図 3.29 を見ると、 $\bar{\beta} = 0.05, \bar{\beta} = 0.10$ の両方の場合において、最適化を行うことで側部のライズを上昇させつつも、制約点の両脇が凸状に膨らんだ結果、 β 不変量制約を与えた点が凹面となっているが確認できる。図 3.33 の等高線図と合わせて考察すると、 β_1 の値が大きいほど形状の凹性が大きくなっていることがわかる。このことは、問題 (3.57) において $\bar{\beta}$ の値を変化させることで不変量制約を与えた点の凹らしさを自由にコントロールできることを示している。目的関数およびシェル中央面の面積の値を見ると、最適形状は、初期形状と同じ体積を有し、問題 (3.56) の最適形状には及ばないものの、不変量制約点に凹らしさを有しながらひずみエネルギーの値を大きく減少できていることがわかる。

図 3.30 を見ると、最適形状の自重作用時の変位は、初期形状に比べ大幅に低減されており、代数不変量制約を満たしつつも高い剛性が得られていることがわかる。

図 3.31 および図 3.32 を見ると、最適形状は、問題 (3.56) の最適形状に比べ中央の支持点にかかる膜応力が増加し、すべての支持点に向かって均一に膜応力が集中しており力の流れは異なるものの、不変量制約を与えた点に窪みを有しながらも曲げ応力、引張応力が小さい圧縮抵抗型の力学的メカニズムが得られていることがわかる。

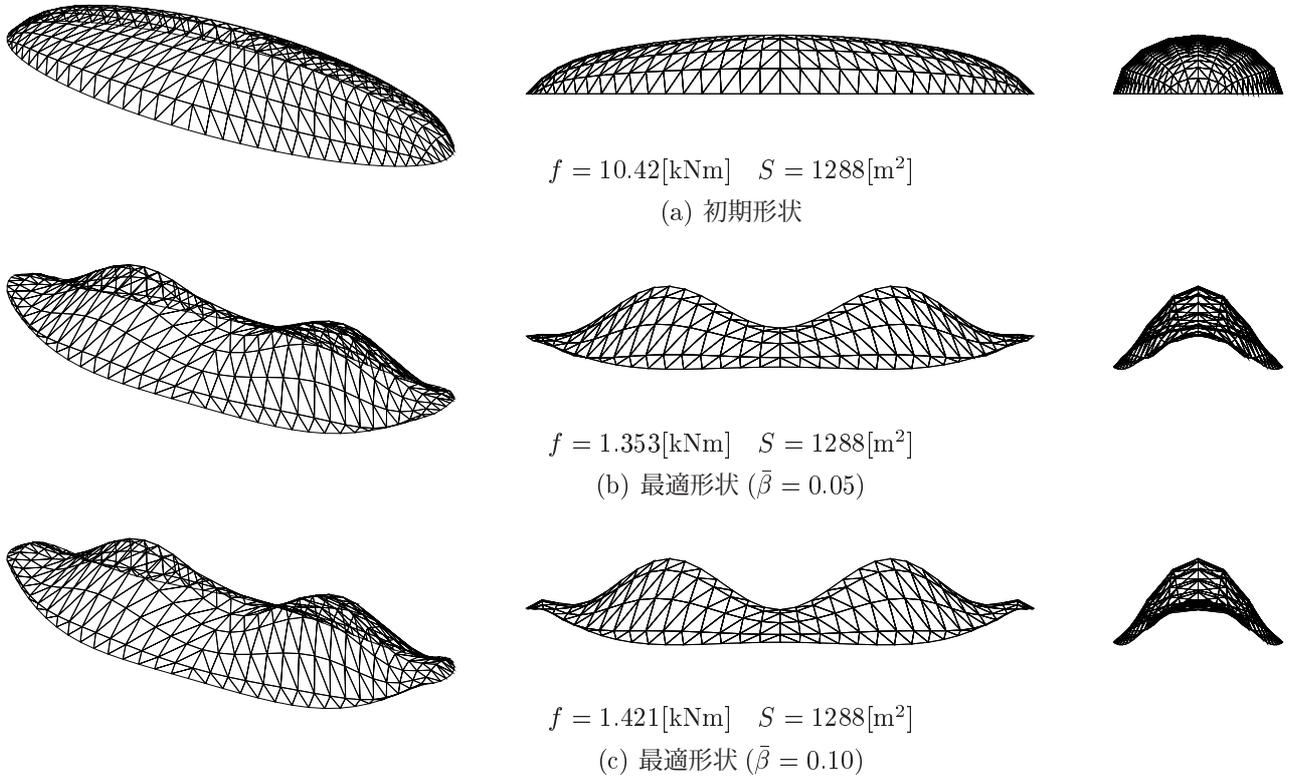


図 3.29 形状図

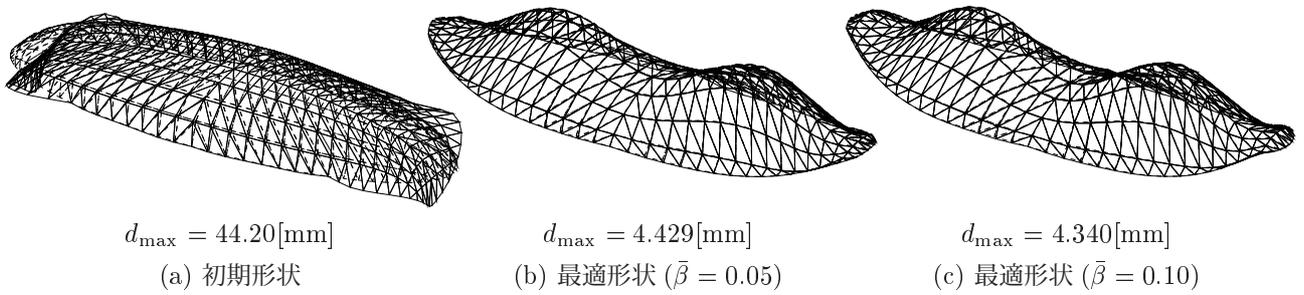
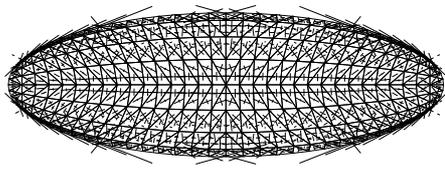


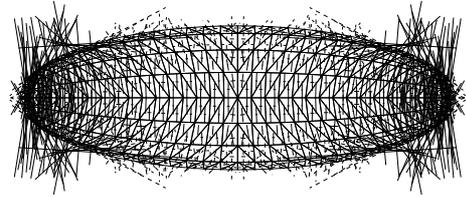
図 3.30 変形図 ($\times 100$)



$$\sigma_{\max}^c = 4.510[\text{N/mm}^2]$$

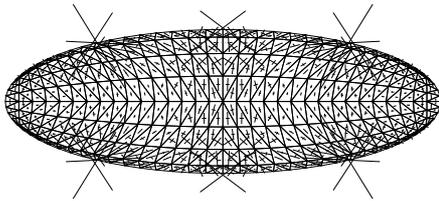
$$\sigma_{\max}^t = 2.087[\text{N/mm}^2]$$

(a) 初期形状



$$\sigma_{\max}^b = 6.203[\text{N/mm}^2]$$

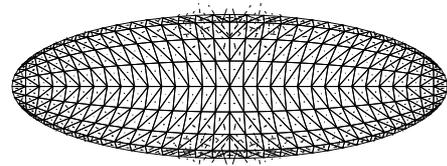
(a) 初期形状



$$\sigma_{\max}^c = 3.539[\text{N/mm}^2]$$

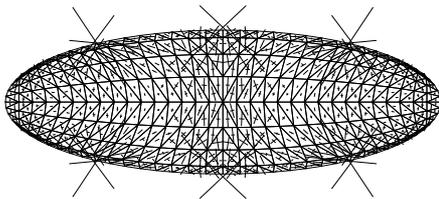
$$\sigma_{\max}^t = 6.878 \times 10^{-1}[\text{N/mm}^2]$$

(b) 最適形状 ($\bar{\beta} = 0.05$)



$$\sigma_{\max}^b = 1.250[\text{N/mm}^2]$$

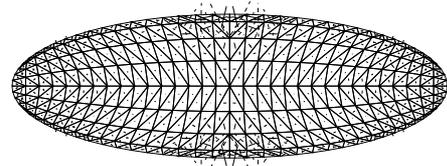
(b) 最適形状 ($\bar{\beta} = 0.05$)



$$\sigma_{\max}^c = 3.412[\text{N/mm}^2]$$

$$\sigma_{\max}^t = 8.568 \times 10^{-1}[\text{N/mm}^2]$$

(c) 最適形状 ($\bar{\beta} = 0.10$)

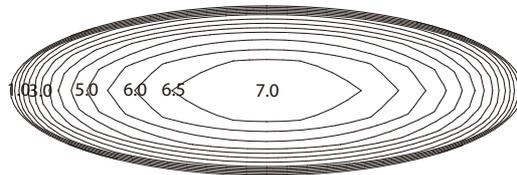


$$\sigma_{\max}^b = 1.437[\text{N/mm}^2]$$

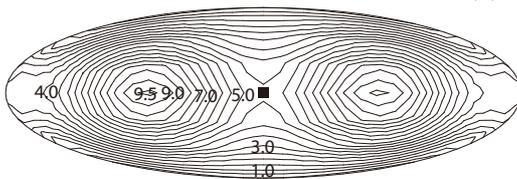
(c) 最適形状 ($\bar{\beta} = 0.10$)

図 3.31 膜応力分布

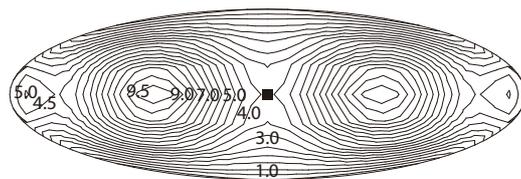
図 3.32 曲げ応力分布



(a) 初期形状



(b) 最適形状 ($\bar{\beta} = 0.05$)



(b) 最適形状 ($\bar{\beta} = 0.05$)

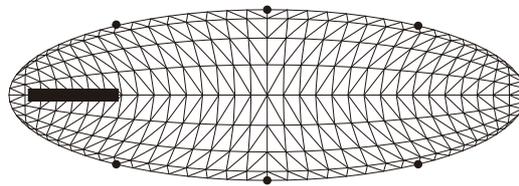
図 3.33 z 座標等高線図

3.4.4 例題3: γ 不変量制約を与えて山らしさを制御する場合

最適化概要

次の最適化問題を考える。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(\mathbf{q}_z) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \\ & \text{subject to} && \begin{cases} S(\mathbf{q}_z) - S_0 \leq 0 \\ \mathbf{r}_z^*(\mathbf{q}_z) - \mathbf{r}_{z,0}^* = 0 \\ \gamma_2^{ci}(\mathbf{q}_z) = 0 \\ \gamma_3^{ci^2}(\mathbf{q}_z) - \gamma_1^{ci^2}(\mathbf{q}_z) > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, 7) \\ \gamma_3^{ci}(\mathbf{q}_z) \leq \bar{\gamma}^{ci} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.58)$$



■ : γ 不変量制約を与える点

$$\begin{aligned} (s^{c1}, t^{c1}) &= (0.05, 0.50) & (s^{c2}, t^{c2}) &= (0.075, 0.50) & (s^{c3}, t^{c3}) &= (0.10, 0.50) & (s^{c4}, t^{c4}) &= (0.125, 0.50) \\ (s^{c5}, t^{c5}) &= (0.15, 0.50) & (s^{c6}, t^{c6}) &= (0.175, 0.50) & (s^{c7}, t^{c7}) &= (0.20, 0.50) \end{aligned}$$

γ_1^i, γ_2^i はそれぞれ、図の■点における γ_1, γ_2 不変量である。この最適化問題は、問題 (3.56) に加えて、 $\bar{\gamma} < 0$ のとき、制約点が山となるような γ 不変量制約を導入している。

最適化結果と考察

$\bar{\gamma} = -0.004$ および $\bar{\gamma} = -0.008$ として最適化を実行した結果、ともに最適性条件を満足し、最適化は終了した。 $\bar{\gamma} = -0.004$ および $\bar{\gamma} = -0.008$ として得られた最適解曲面の形状を図 3.34(b) および (c) にそれぞれ示す。また、比較の対象として、初期解曲面の形状を図 3.34(a) に示す。各図で上方にアイソメトリック図を、下方には立面図をそれぞれ示す。初期形状および最適形状の、自重作用時の弾性変形の様子を図 3.35(a)~(c) にそれぞれ示す。初期形状および最適形状のシェル中央面の膜応力、および曲げモーメントによる縁応力の分布図を図 3.36(a)~(c) および図 3.37(a)~(c) にそれぞれ示す。初期形状および最適形状の鉛直方向座標に関する等高線図を図 3.38(a)~(c) にそれぞれ示す。最適形状の等高線図 3.38(b), (c) において、 γ 不変量制約を与えた点を黒点で示している。

図 3.34 を見ると、 $\bar{\gamma} = -0.004, \bar{\gamma} = -0.008$ の両方の場合において、最適化を行うことで側部のライズを上昇させつつも、 γ 不変量制約を与えた点が山となるように形状に膨らみと傾斜を生じていることが確認できる。図 3.38 の等高線図と合わせて考察すると、 γ_1 の値が小さいほど山が急こう配となっていることがわかる。このことは、問題 (3.58) において $\bar{\gamma}$ の値を変化させることで不変量制約を与えた点の山らしさを自由にコントロールできることを示している。目的関数およびシェル中央面の面積の値を見ると、最適形状は、初期形状と同じ体積を有し、問題 (3.56) の最適形状には及ばないものの、不変量制約点に山らしさを有しながらひずみエネルギーの値を大きく減少できていることがわかる。

図 3.35 を見ると、最適形状の自重作用時の変位は、初期形状に比べ大幅に低減されており、代数不変量制約を満たしつつも高い剛性が得られていることがわかる。

図 3.36 および図 3.37 を見ると、最適形状は、不変量制約を与えた点に膨らみを生じつつも、問題 (3.56) の最適

形状と同様に、曲げ応力、引張応力が小さい圧縮抵抗型の力学的メカニズムを有する形態へと移行していることがわかる。

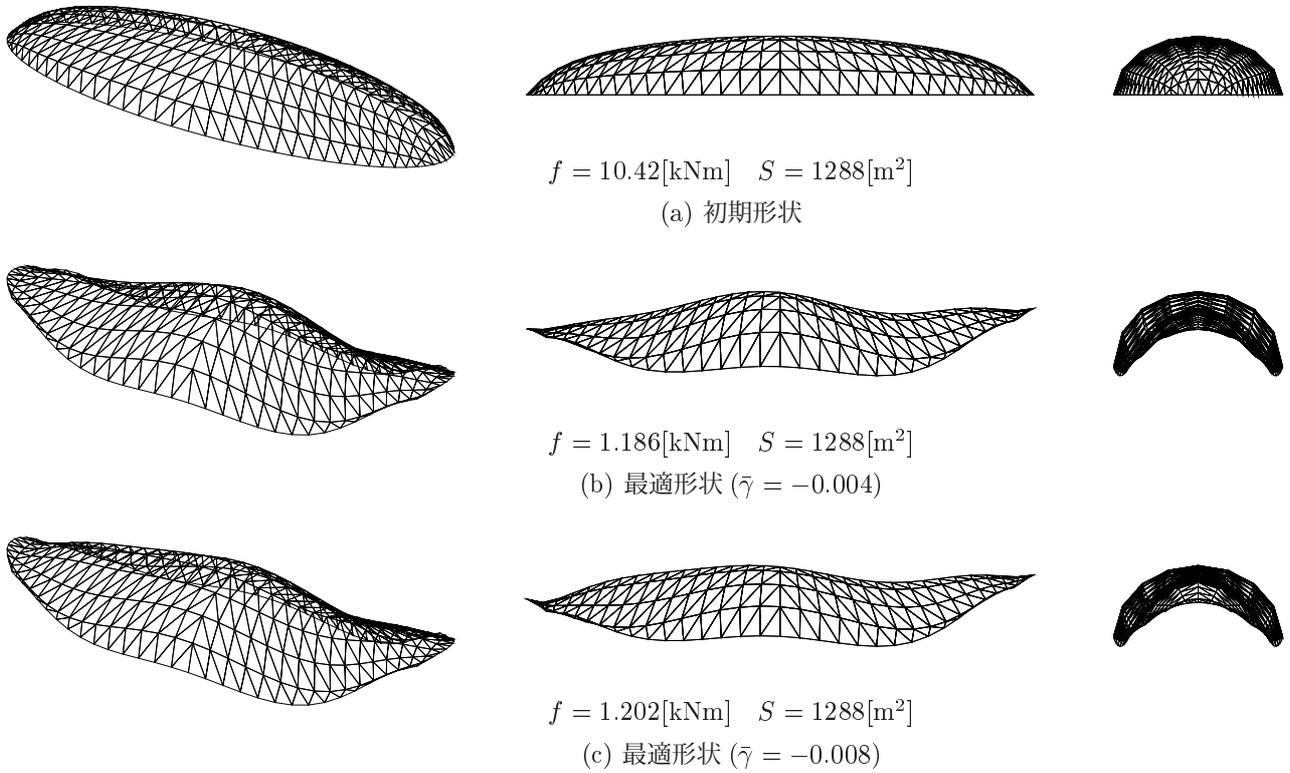


図 3.34 形状図

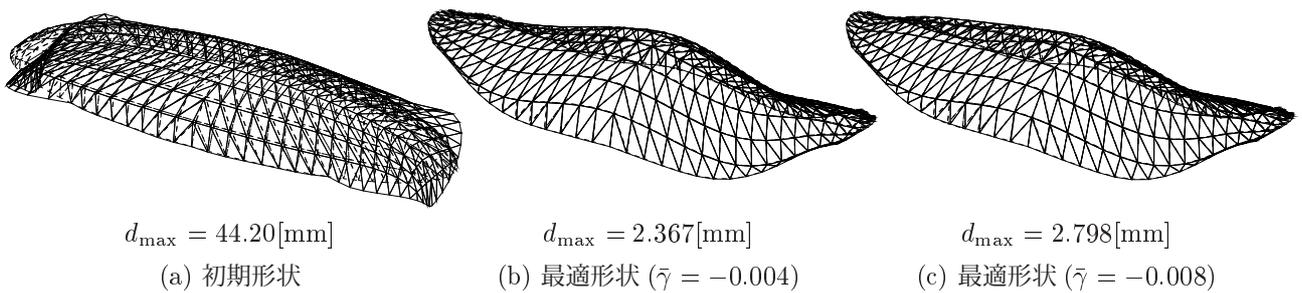
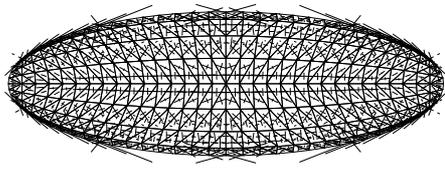


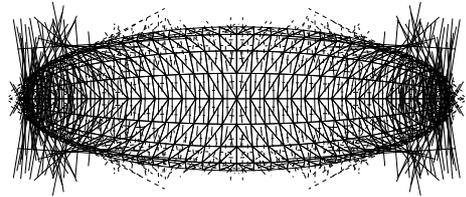
図 3.35 変形図 ($\times 100$)



$$\sigma_{\max}^c = 4.510[\text{N}/\text{mm}^2]$$

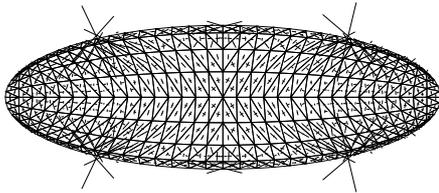
$$\sigma_{\max}^t = 2.087[\text{N}/\text{mm}^2]$$

(a) 初期形状



$$\sigma_{\max}^b = 6.203[\text{N}/\text{mm}^2]$$

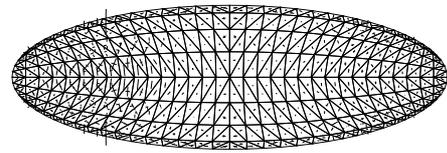
(a) 初期形状



$$\sigma_{\max}^c = 3.048[\text{N}/\text{mm}^2]$$

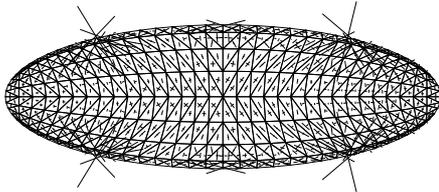
$$\sigma_{\max}^t = 1.118[\text{N}/\text{mm}^2]$$

(b) 最適形状 ($\bar{\gamma} = -0.004$)



$$\sigma_{\max}^b = 9.326 \times 10^{-1}[\text{N}/\text{mm}^2]$$

(b) 最適形状 ($\bar{\gamma} = -0.004$)

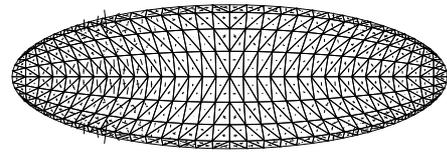


$$\sigma_{\max}^c = 3.082[\text{N}/\text{mm}^2]$$

$$\sigma_{\max}^t = 1.029[\text{N}/\text{mm}^2]$$

(c) 最適形状 ($\bar{\gamma} = -0.008$)

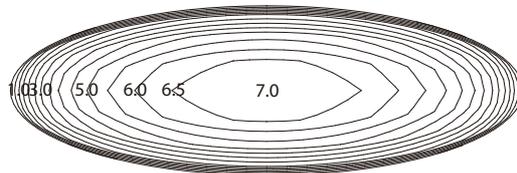
図 3.36 膜応力分布



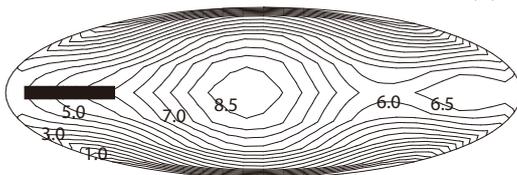
$$\sigma_{\max}^b = 8.487 \times 10^{-1}[\text{N}/\text{mm}^2]$$

(c) 最適形状 ($\bar{\gamma} = -0.008$)

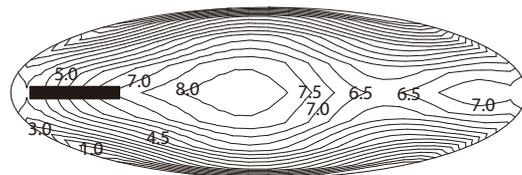
図 3.37 曲げ応力分布



(a) 初期形状



(b) 最適形状 ($\bar{\gamma} = -0.004$)



(b) 最適形状 ($\bar{\gamma} = -0.004$)

図 3.38 z 座標等高線図

3.5 三角形ベジエパッチにより形状記述される三角形平面を有するシェル

3.5.1 最適化モデル

3つ目の最適化モデルは、図 3.39 に示すような三角形平面を有するシェル構造物とする。ここで、支持条件は3隅をピン支持とし、応力集中を避けるために支点を切り欠いて各隅で2個ずつの支点を与える。シェル形状は裁断球殻とし、初期形状は次のような関数で与える。

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \quad (3.59)$$

ここで、支点を切り欠く前の頂点を含む平面の中央を座標の原点とし、スパン 30m、曲率半径 17.0625m ($x_0 = y_0 = 0$, $z_0 = 11.0625$, $r = 17.0625$) とする。形状は三角形パッチベジエ曲面により記述し、制御点は曲面全体に 5×5 の格子状に配置する。最適化の際の設計変数は、図に黒点で示した制御点の z 座標 q_z とする。設計変数の数は 15 である。弾性解析はフルモデル解析とし、要素分割は 253 要素とする。外力、材料定数、断面形状などは、3.2.10 節の最後に示した通りである。

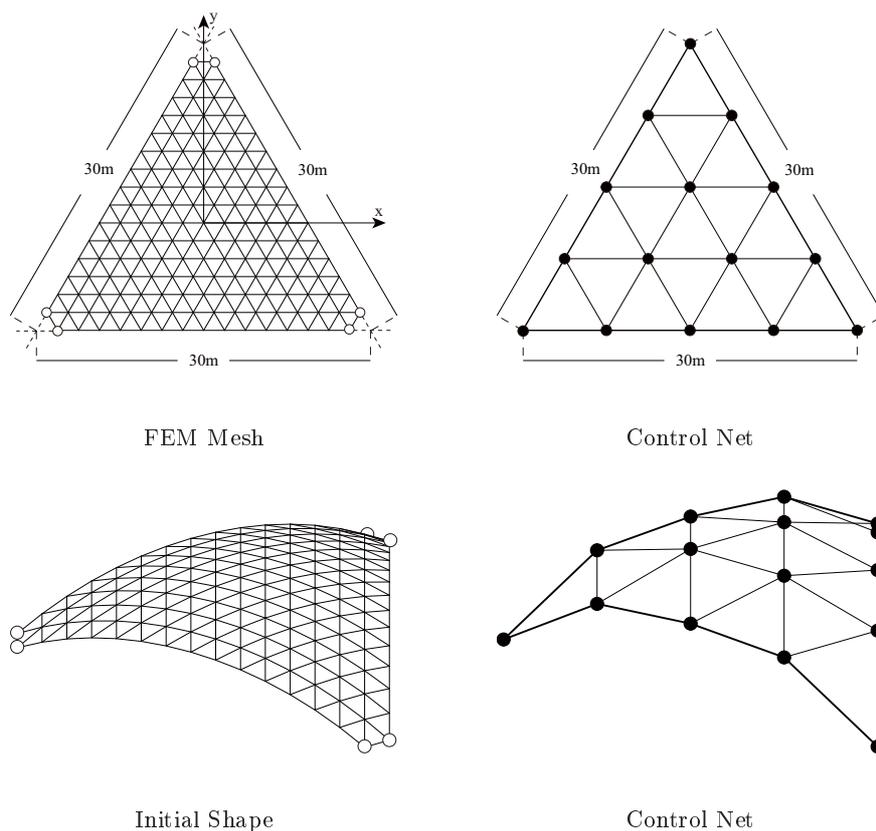


図 3.39 最適化モデル 3

3.5.2 例題1：代数不変量制約を与えない場合

最適化概要

次の最適化問題を考える。

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f(\mathbf{q}_z) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \\ \text{subject to} \quad & \begin{cases} S(\mathbf{q}_z) - S_0 \leq 0 \\ \mathbf{r}_z^*(\mathbf{q}_z) - \mathbf{r}_{z,0}^* = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.60)$$

この最適化問題は、問題 (3.49) と同様、支持点を不動とし、シェル中央面の面積を初期形状の値以下とする制約条件のもとでひずみエネルギーを最小化する問題である。

最適化結果と考察

最適性条件を満足し、最適化は終了した。本手法により得られた最適解曲面の形状を図 3.40(b) に示す。また、比較の対象として、初期解曲面の形状を図 3.40(a) に示す。各図で上方にアイソメトリック図を、下方には立面図をそれぞれ示す。初期形状および最適形状の、自重作用時の弾性変形の様子を図 3.41(a),(b) にそれぞれ示す。初期形状および最適形状のシェル中央面の膜応力、および曲げモーメントによる縁応力の分布図を図 3.42(a),(b) および図 3.43(a),(b) にそれぞれ示す。

図 3.40 を見ると、最適化をおこなうことで、側部のライズがカタナリー状に上昇していることが確認できる。目的関数およびシェル中央面の面積の値を見ると、最適形状は、初期形状と同じ体積を有しながらも、側部のライズをカタナリー状に上昇させることでひずみエネルギーの値を初期形状からおよそ 88 % 低減できていることがわかる。

図 3.41 を見ると、最適形状の自重作用時の弾性変位は、初期形状に比べ大幅に低減されていることがわかる。最大鉛直変位は初期形状からおよそ 94 % 低減されており、剛性が飛躍的に上昇している。

図 3.42 および図 3.43 を見ると、最適化をおこなうことで曲げ応力が非常に小さくなっていることが確認できる。初期形状において支持部が負担していた曲げ応力が抑制される代わりに、全体として膜応力によって外力に対し抵抗する力学的メカニズムに変化している。また、初期形状において支持部から側部にかけて生じていた引張力は、最適形状ではその代わりにシェル全面に圧縮力が生じ、それらは支持点に向かって滑らかに流れるように効率的に分布している。

得られた曲面は、1 つ目のモデルにおける式 (3.49) の最適形状と同様な特徴を有しており、平面形状に関わらず、隅角部をピン支持されたシェルにおいてひずみエネルギーを最小化した場合、同様な傾向があらわれると推測される。

以降、本最適化結果をもとにして、式 (3.60) に様々な代数不変量制約の導入を試みる。

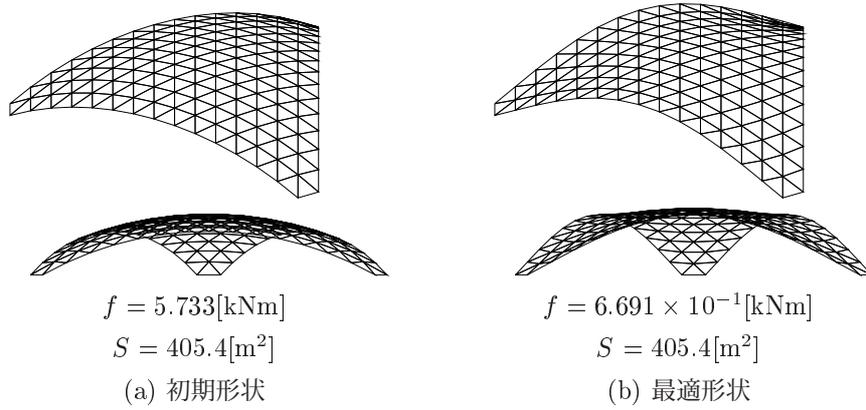


図 3.40 形状図

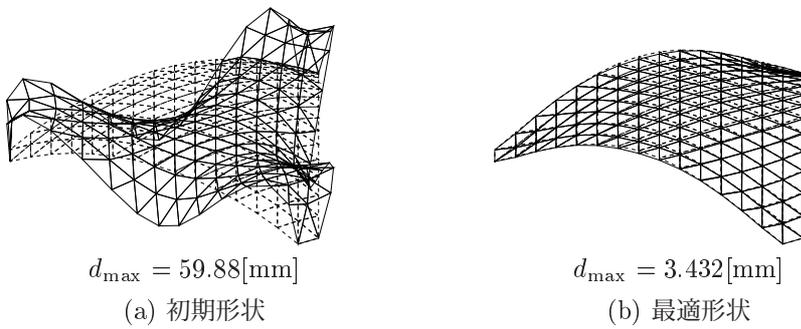


図 3.41 変形図 ($\times 100$)

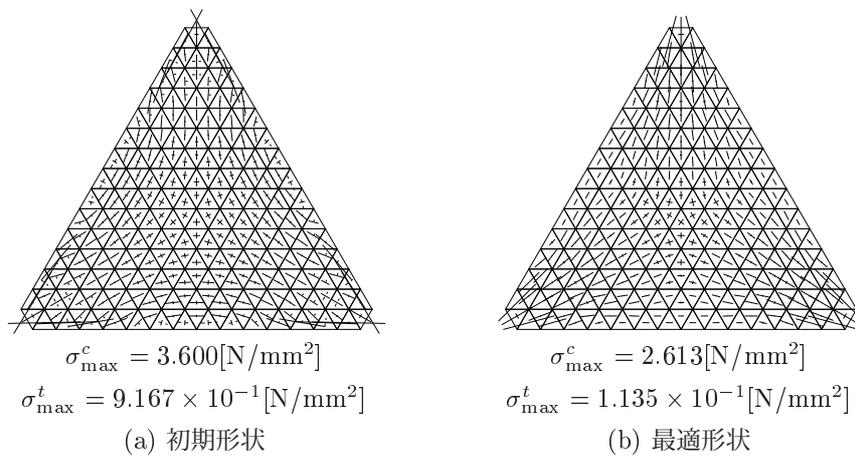


図 3.42 膜応力分布図

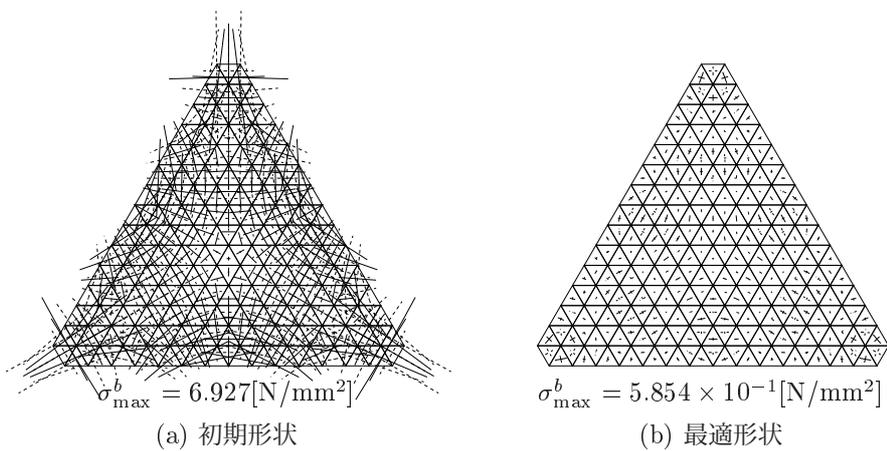


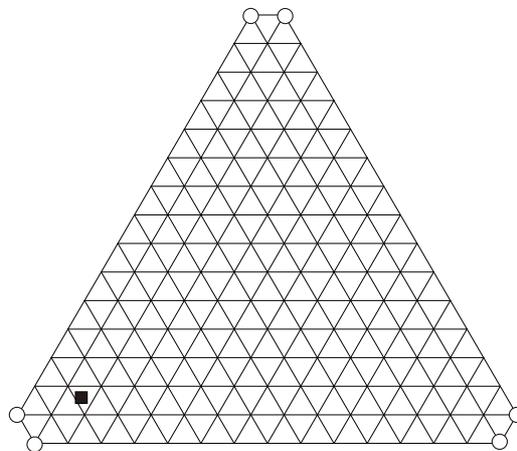
図 3.43 曲げ応力分布図

3.5.3 例題2: β 不変量制約を与えて凸らしさを制御する場合

最適化概要

次の最適化問題を考える。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(\mathbf{q}_z) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \\ & \text{subject to} && \begin{cases} S(\mathbf{q}_z) - S_0 \leq 0 \\ \mathbf{r}_z^*(\mathbf{q}_z) - \mathbf{r}_{z,0}^* = 0 \\ \beta_2^c(\mathbf{q}_z) > 0 \\ \beta_1^c(\mathbf{q}_z) \leq \bar{\beta} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.61)$$



■ : β 不変量制約を与える点

$$(u^c, v^c) = (0.10, 0.10)$$

β_1^c , β_2^c はそれぞれ、図の■点における β_1 , β_2 不変量である。この最適化問題は、問題 (3.60) に加えて、 $\bar{\beta} < 0$ のとき、制約点が凸面となるような β 不変量制約を導入している。

最適化結果と考察

$\bar{\beta} = -0.10$ および $\bar{\beta} = -0.20$ として最適化を実行したところ、ともに最適性条件を満足し、最適化は終了した。本手法により $\bar{\beta} = -0.10$ および $\bar{\beta} = -0.20$ として得られた最適解曲面の形状を図 3.44(b) および (c) にそれぞれ示す。比較の対象として、初期解曲面の形状を図 3.44(a) に示す。各図で上方にアイソメトリック図を、下方には立面図をそれぞれ示す。初期形状および最適形状の、自重作用時の弾性変形の様子を図 3.45(a)~(c) にそれぞれ示す。初期形状および最適形状のシェル中央面の膜応力、および曲げモーメントによる縁応力の分布図を図 3.46(a)~(c) および図 3.47(a)~(c) にそれぞれ示す。初期形状および最適形状の鉛直方向座標に関する等高線図を図 3.48(a)~(c) にそれぞれ示す。最適形状の等高線図 3.48(b), (c) において、 β 不変量制約を与えた点を黒点で示している。

図 3.44 を見ると、 $\bar{\beta} = -0.10$, $\bar{\beta} = -0.20$ の両方の場合において、最適化をおこなうことで側部のライズを上昇させつつも、 β 不変量制約を与えた点が凸面となるように形状に膨らみを生じていることが確認できる。図 3.48 の等高線図と合わせて考察すると、 β_1 の値が小さいほど形状の凸性が大きくなっていることが分かる。このことは、問題 (3.50) において $\bar{\beta}$ の値を変化させることで不変量制約を与えた点の凸らしさを自由にコントロールできることを示している。目的関数およびシェル中央面の面積の値を見ると、最適形状は、初期形状と同じ体積を有し、問題 (3.49) の最適形状には及ばないものの、不変量制約点に凸らしさを有しながらひずみエネルギーの値を大きく減少できている

ことがわかる。

図 3.45 を見ると、最適形状の自重作用時の弾性変位は、初期形状に比べ大幅に低減されており、代数不変量制約を満たしつつも高い剛性が得られていることが分かる。

図 3.46 および図 3.47 を見ると、最適形状は、不変量制約を与えた点に膨らみを生じつつも、問題 (3.60) の最適形状と同様に、曲げ応力、引張応力が小さい圧縮抵抗型の力学的メカニズムを有する形態へと移行していることが分かる。

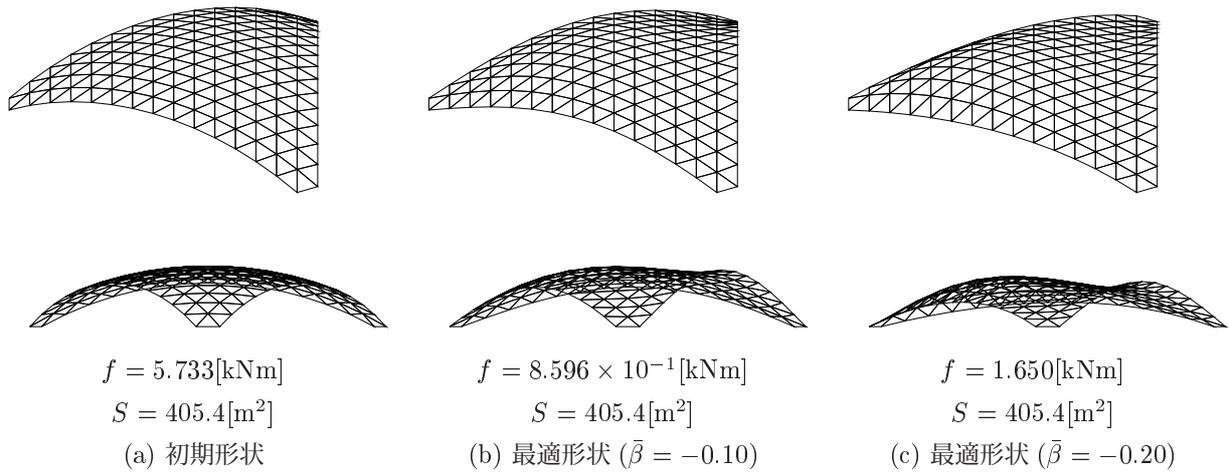


図 3.44 形状図

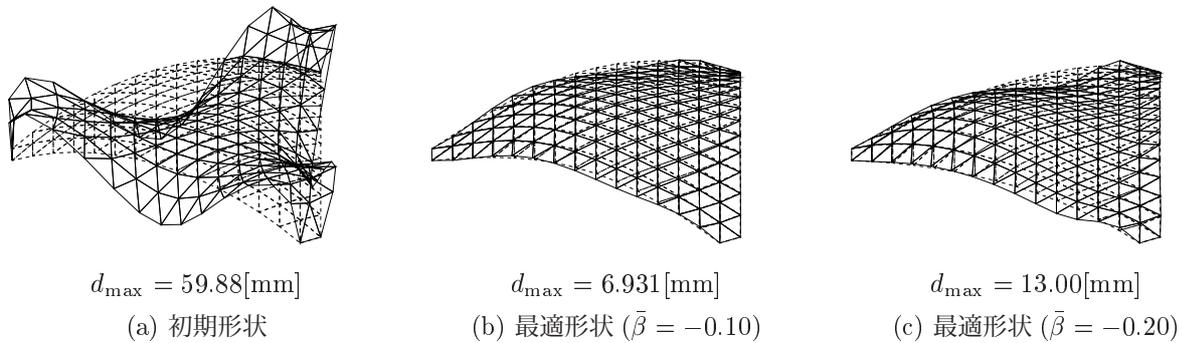


図 3.45 変形図 ($\times 100$)

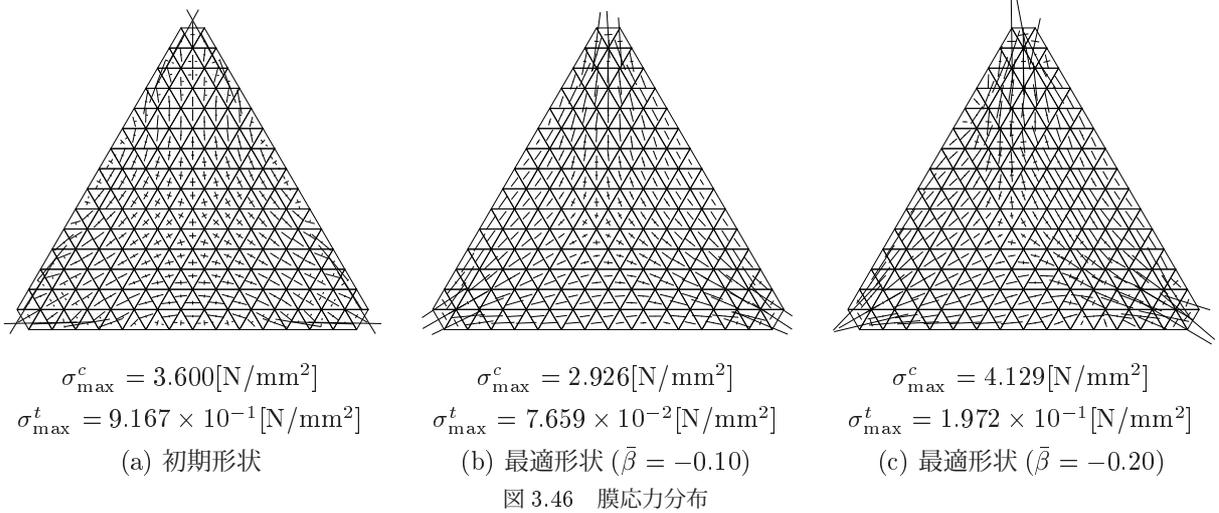


図 3.46 膜応力分布

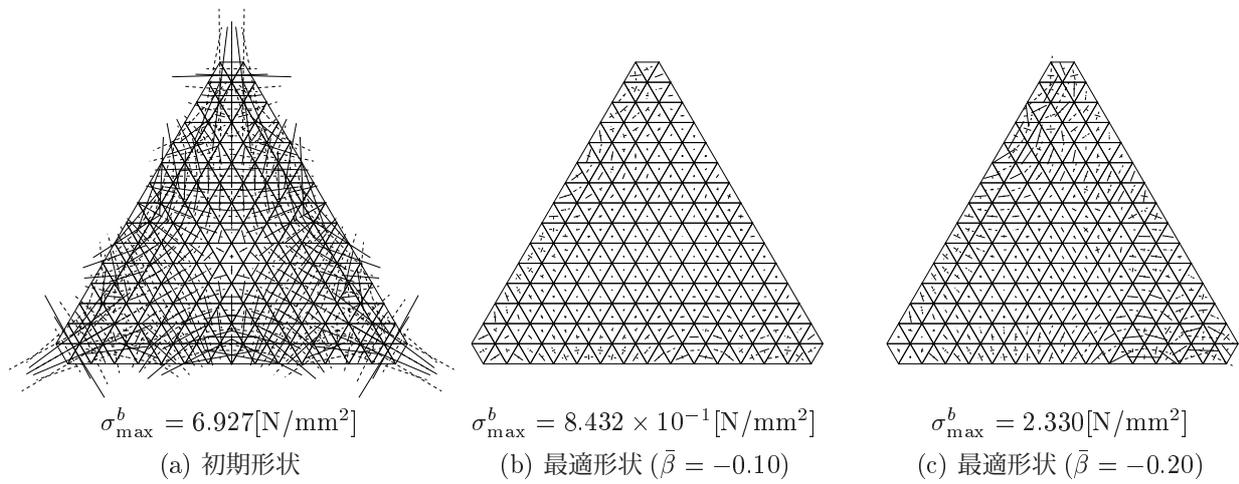


図 3.47 曲げ応力分布

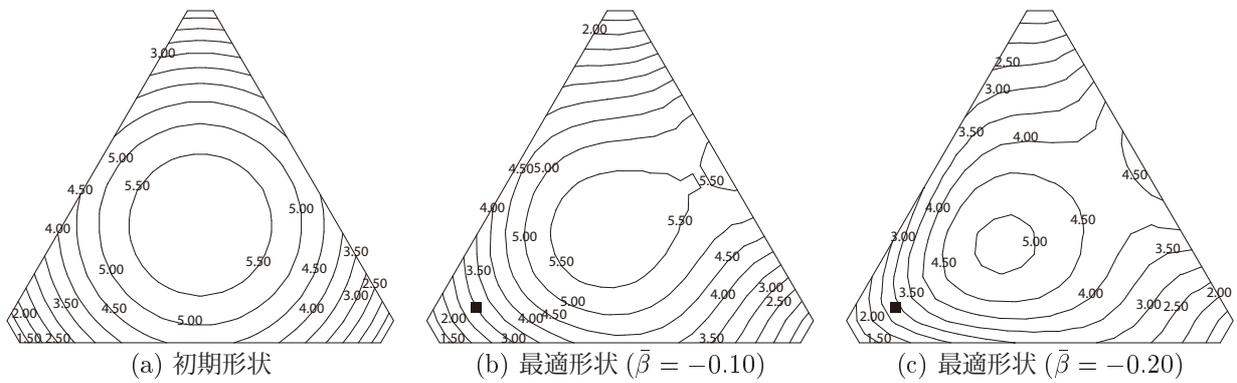


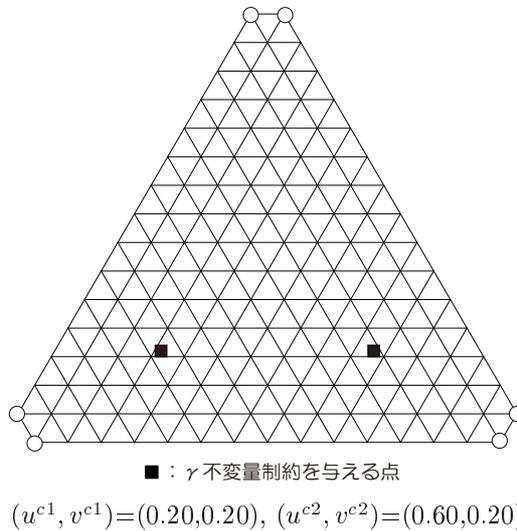
図 3.48 z 座標等高線図

3.5.4 例題3： γ 不変量制約を与えて谷らしさを制御する場合

最適化概要

次の最適化問題を考える。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(\mathbf{q}_z) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \\ & \text{subject to} && \begin{cases} S(\mathbf{q}_z) - S_0 \leq 0 \\ \mathbf{r}_z^*(\mathbf{q}_z) - \mathbf{r}_{z,0}^* = 0 \\ \gamma_2^{ci}(\mathbf{q}_z) = 0 \\ \gamma_3^{ci^2}(\mathbf{q}_z) - \gamma_1^{ci^2}(\mathbf{q}_z) > 0 \quad (i = 1, 2) \\ \gamma_3^{ci}(\mathbf{q}_z) \geq \bar{\gamma}^{ci} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.62)$$



$\gamma_1^{ci}, \gamma_1^i, \gamma_1^i$ はそれぞれ、図の■点における $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 不変量である。この最適化問題は、問題 (3.60) に加えて、 $\gamma^{ci} > 0$ ($i = 1, 2$) のとき、制約点が谷となるような γ 不変量制約を導入している。

最適化結果と考察

$\bar{\gamma}^{c1} = \bar{\gamma}^{c2} = 0.040$ および $\bar{\gamma}^{c1} = \bar{\gamma}^{c2} = 0.060$ として最適化を実行したところ、ともに最適性条件を満足し、最適化は終了した。本手法により $\bar{\gamma}^{c1} = \bar{\gamma}^{c2} = 0.040$ および $\bar{\gamma}^{c1} = \bar{\gamma}^{c2} = 0.060$ として得られた最適解曲面の形状を図 3.49(b) および (c) にそれぞれ示す。また、比較の対象として、初期解曲面の形状を図 3.49(a) に示す。各図で上方にアイソメトリック図を、下方には立面図をそれぞれ示す。初期形状および最適形状の、自重作用時の弾性変形の様子を図 3.50(a)~(c) にそれぞれ示す。初期形状および最適形状のシェル中央面の膜応力、および曲げモーメントによる縁応力の分布図を図 3.51(a)~(c) および図 3.52(a)~(c) にそれぞれ示す。初期形状および最適形状の鉛直方向座標に関する等高線図を図 3.53(a)~(c) にそれぞれ示す。最適形状の等高線図 3.53(b), (c) において、 γ 不変量制約を与えた点を黒点で示している。

図 3.49 を見ると、 $\bar{\gamma}^{c1} = \bar{\gamma}^{c2} = 0.040, \bar{\gamma}^{c1} = \bar{\gamma}^{c2} = 0.060$ の両方の場合において、最適化をおこなうことで γ 不変量制約を与えた点周辺において、シェル中央部から支持点にかけて谷となるように形状に筒状の窪みを生じていることが確認できる。図 3.53 の等高線図と合わせて考察すると、 γ_3 の値が大きいほど形状の谷らしさが大きくなっていることが分かる。このことは、問題 (3.62) において $\bar{\gamma}^{ci}$ の値を変化させることで不変量制約を与えた点の谷らしさ

を自由にコントロールできることを示している。目的関数およびシェル中央面の面積の値を見ると、最適形状は、初期形状と同じ体積を有し、問題 (3.49) の最適形状には及ばないものの、不変量制約点に谷らしさを有しながらひずみエネルギーの値を大きく減少できていることがわかる。

図 3.50 を見ると、 $\bar{\gamma}^{c1} = \bar{\gamma}^{c2} = 0.040$ とした場合の最適形状の自重作用時の弾性変位は、初期形状に比べ大幅に低減されており、代数不変量制約を満たしつつも高い剛性が得られていることが分かる。 $\bar{\gamma}^{c1} = \bar{\gamma}^{c2} = 0.060$ とした場合の最適形状は厳しい代数不変量制約を課したために $\bar{\gamma}^{c1} = \bar{\gamma}^{c2} = 0.040$ とした場合の最適形状と比べると多少の弾性変位が認められるものの、初期形状よりは大幅に低減されている。

図 3.51 および図 3.52 を見ると、最適形状は、不変量制約を与えた点に谷を生じつつも、問題 (3.60) の最適形状と同様に、曲げ応力、引張応力が小さい圧縮抵抗型の力学的メカニズムを有する形態へと移行していることが分かる。

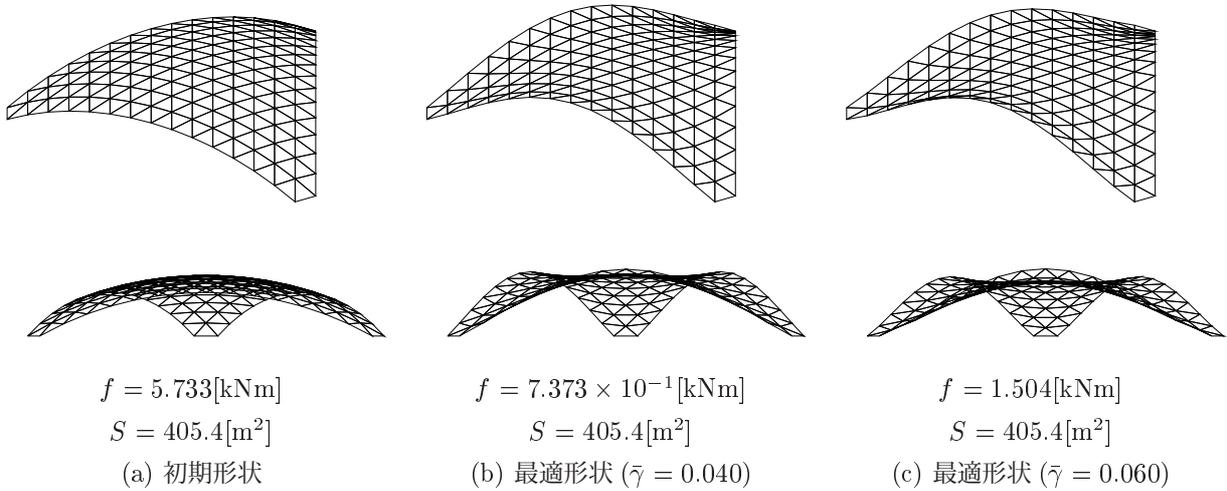
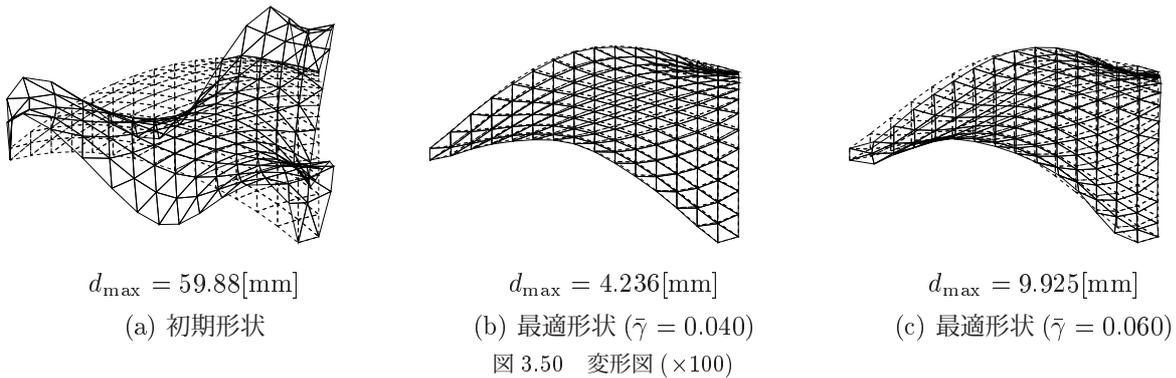


図 3.49 形状図

図 3.50 変形図 ($\times 100$)

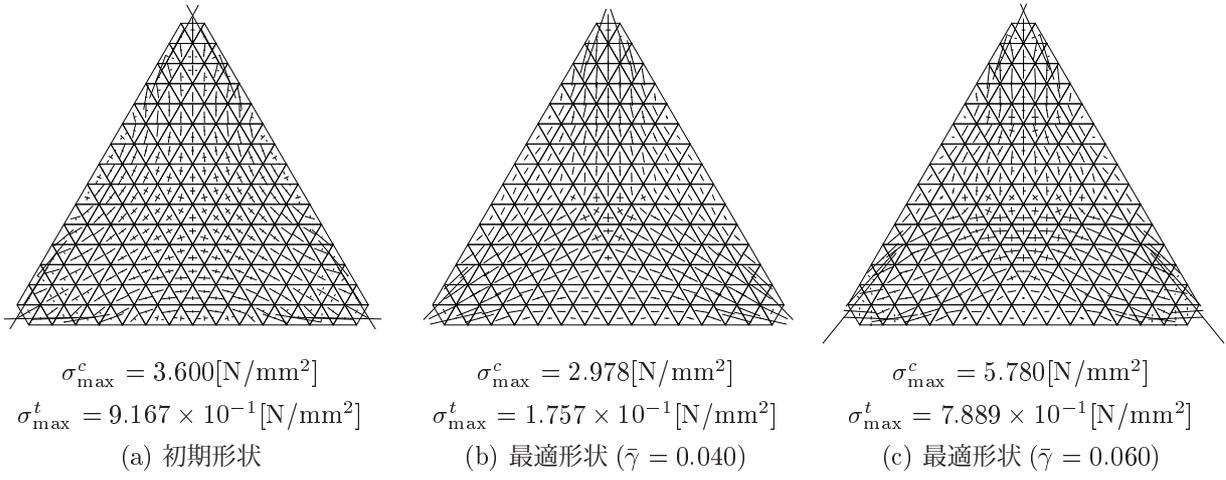


図 3.51 膜応力分布

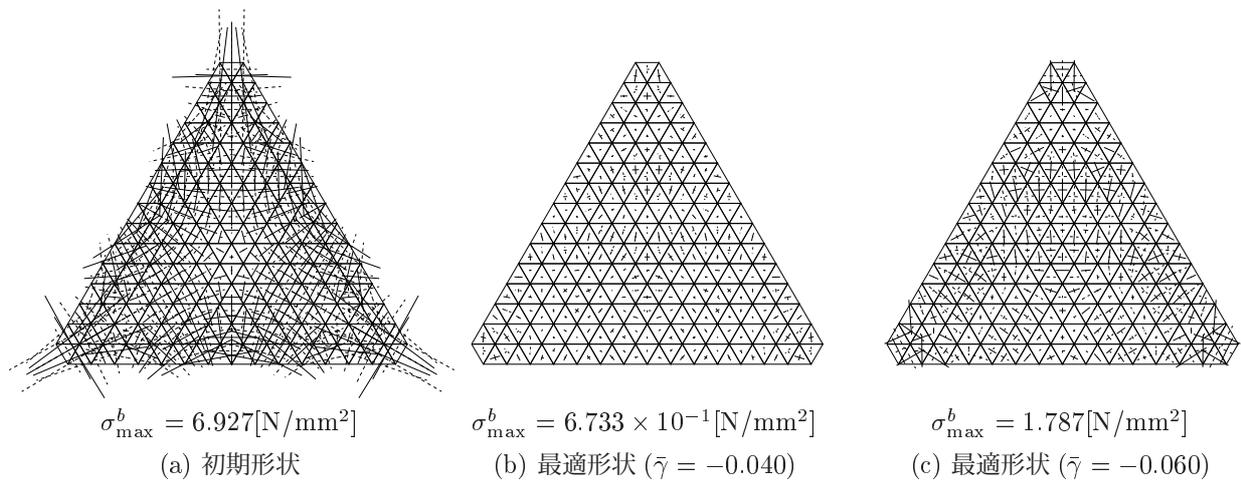


図 3.52 曲げ応力分布

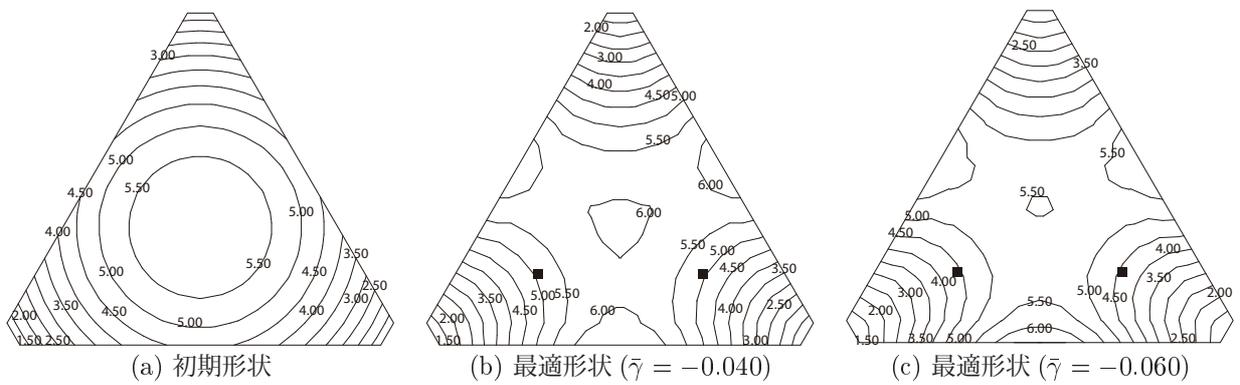


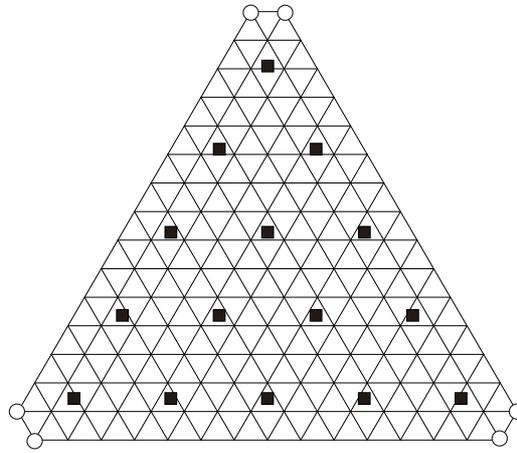
図 3.53 z 座標等高線図

3.5.5 例題4：球らしさを最大化する場合

最適化概要

次の最適化問題を考える。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \begin{cases} f(\mathbf{q}_z) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \\ g(\mathbf{q}_z) = \sum_{i=1}^{15} \alpha^{ci} \end{cases} \\ & \text{subject to} && \begin{cases} S(\mathbf{q}_z) - S_0 \leq 0 \\ \mathbf{r}_z^*(\mathbf{q}_z) - \mathbf{r}_{z,0}^* = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.63)$$



■ : α 不変量を計測する点

$$u^{ci}, v^{ci} \in [1/11, 3/11, 5/11, 7/11, 9/11], \quad (i = 1, 2, \dots, 15)$$

この最適化問題は、問題 (3.60) に加えて、新たに曲面の球らしさを最大化するような目的関数を付加した多目的最適化問題である。ここで、 α^{ci} は図の黒点における α 不変量である。問題 (3.52) 同様、ひずみエネルギーの最小化に加えて、曲面上の十分多くの点 (本最適化では図の 15 個の点) の α 不変量の合計を最小化することで、球らしさと剛性の双方を求めた曲面形状の創生を試みる。

多目的最適化問題の求解にあたり、付録 D.6.2 項で概説する制約法を用いる。次の 2 つの制約付き単一目的最適化問題を考える。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(\mathbf{q}_z) \\ & \text{subject to} && \begin{cases} S(\mathbf{q}_z) - S_0 \leq 0 \\ \mathbf{r}_z^*(\mathbf{q}_z) - \mathbf{r}_{z,0}^* = 0 \\ g(\mathbf{q}_z) - \bar{g} \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && g(\mathbf{q}_z) \\ & \text{subject to} && \begin{cases} S(\mathbf{q}_z) - S_0 \leq 0 \\ \mathbf{r}_z^*(\mathbf{q}_z) - \mathbf{r}_{z,0}^* = 0 \\ f(\mathbf{q}_z) - \bar{f} \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.65)$$

\bar{g} , \bar{f} の値を変化させて繰り返し最適化をおこなうことでパレート解群を求めることができる。

最適化結果と考察

ε 制約法により, \bar{g} , \bar{f} の値を変えて繰り返し最適化を実行したところ, 図 3.55 に示すようなパレート解群が得られた。各パレート解は, それぞれ最適性条件を完全に満足した。図 3.55 は, 縦軸に α 不変量の和を, 横軸にひずみエネルギーをとっている。合わせて, 得られたパレート解群の最大主応力および最大鉛直変位を図 3.56 に示す。図 3.56 は, 縦軸左に最大主応力を, 縦軸右に最大鉛直変位をとっている。

ここで, 図 3.55 において, $\bar{f} = 1.00$ とした解は球らしさを最大化した解ではない。 \bar{f} は 0 に限りなく近づけることができ, 面積 S を固定すれば, やがて図 3.54 に示す初期形状 (裁断球殻) となる。

本手法により得られたパレート解群のうち代表的なシェル形状を図 3.57(a)~(f) に示す。また, 比較の対象として, 初期解 (裁断球殻) の形状を図 3.54(a) に示す。各図で上方にアイソメトリック図を, 下方には立面図をそれぞれ示す。代表的なパレート解の自重作用時の弾性変形の様子を図 3.58(a)~(f) にそれぞれ示す。初期形状 (裁断球殻) の自重作用時の弾性変形の様子を図 3.54(b) に示す。ここで点線は荷重作用前の形状を, 実線は荷重作用時の変位を 100 倍にして表した形状を示している。

また, 代表的なパレート解のシェル中央面の膜応力, および曲げモーメントによる縁応力の分布図を図 3.59(a)~(f) および図 3.60(a)~(f) にそれぞれ示す。裁断球殻のシェル中央面の膜応力, および曲げモーメントによる縁応力の分布図を図 3.54(c) および図 3.54(d) にそれぞれ示す。

また, 代表的なパレート解の鉛直方向座標に関する等高線図を図 3.61(a)~(f) にそれぞれ示す。裁断球殻の鉛直方向座標に関する等高線図を図 3.54(e) に示す。

図 3.57 を見ると, ひずみエネルギー最小解から $g(\mathbf{q})$ の値が小さくなるにつれて, 曲面形状が球へと近づいていることが分かる。図 3.61 の等高線図と合わせて考察すると, その経過が良く分かる。問題 (3.54) において $\bar{f} = 1.000$ としたときの最適形状は, 裁断球殻のシェル形状 3.16(a) および等高線図 (e) と近似しており, かなり球らしさが高められていると言える。最適化モデルのスパンは 30m であるため, 節点単位で見た場合には形状の相違は数十センチ単位と比較的大きいが, マクロに見ると類似した形状を有するにもかかわらず, ひずみエネルギーの値は裁断球殻と比べてはるかに小さく, わずかな形状の違いが剛性に大きく影響を及ぼすことが分かる。

図 3.58 を見ると, 最大鉛直変位は $\bar{g} = 4.000 \times 10^{-3}$ の解までは大きく抑えられているが, 以降, 増加傾向にある。図 3.56 と合わせて考察すると, ひずみエネルギーがおおよそ $8.000 \times 10^{-1} \text{kNm}$ となる解までは, 球らしさを高めても, 力学性状に大きな変化は見られないが, ひずみエネルギーが $8.000 \times 10^{-1} \text{kNm}$ を超えたあたりから曲げ応力が増加し, 剛性も低下傾向にあることが分かる。

図 3.4 および図 3.5 を見ると, ひずみエネルギー最小解に見られる全体として膜応力によって外力に対し抵抗する力学的メカニズムが, 今回提示したパレート解群に共通してみられることが確認できる。しかしながら, 先ほど述べたように, ひずみエネルギーの値が $8.000 \times 10^{-1} \text{kNm}$ を上回る解以降, 球らしさを高めるとともに, そのような力学形態は失われていくと考えられる。

初期形状 (裁断球殻) の剛性は必ずしも高くない。実務において, シェル形状を球形にしたいという意匠的, あるいは建築計画的な要求に対して, 本手法によりパレート解を提示することは剛性と球らしさの双方を勘案する上で有効であると考えられる。

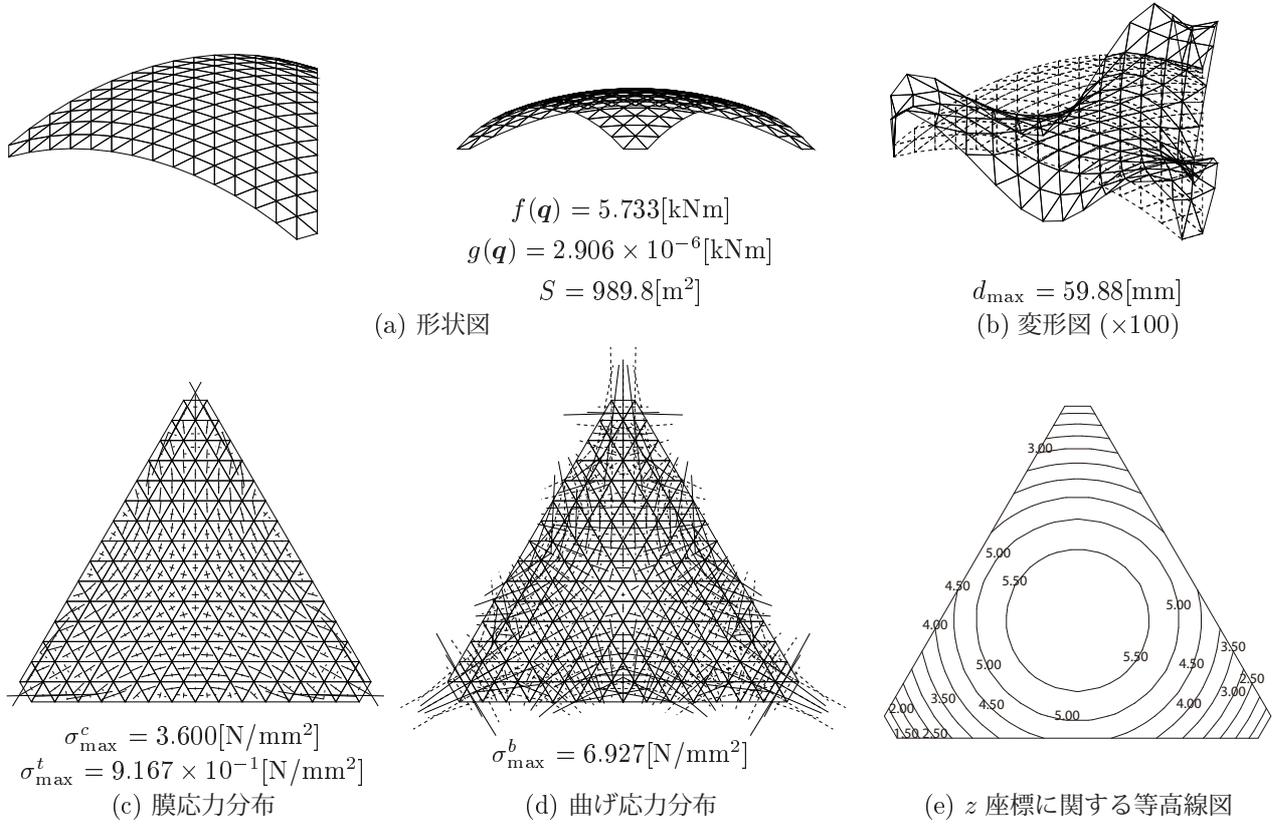


図 3.54 $S = 989.8$ とした場合の裁断球形シェルの力学性状

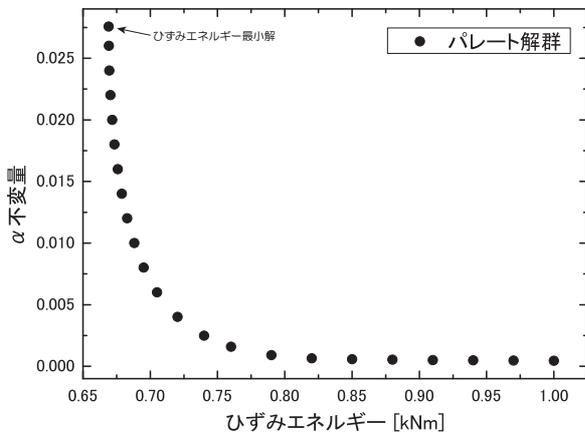


図 3.55 パレート解群の存在位置

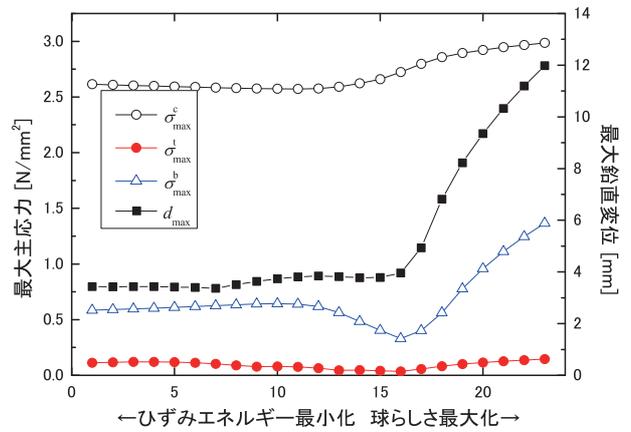
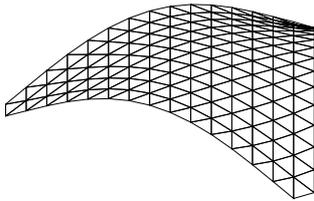


図 3.56 パレート解群の力学性能

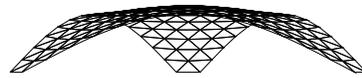
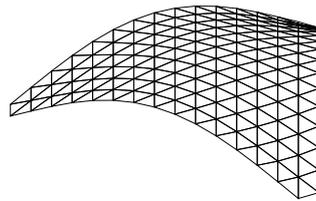


$$f = 6.691 \times 10^{-1} [\text{kNm}]$$

$$g = 2.756 \times 10^{-2}$$

$$S = 405.4 [\text{m}^2]$$

(a) 最適形状 (ひずみエネルギー最小解)

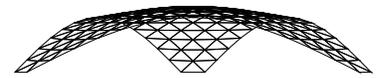
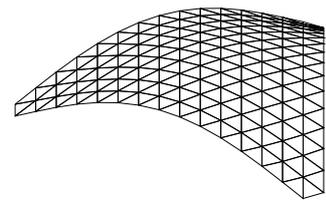


$$f = 6.717 \times 10^{-1} [\text{kNm}]$$

$$g = 2.000 \times 10^{-2}$$

$$S = 405.4 [\text{m}^2]$$

(b) 最適形状 ($\bar{g} = 2.000 \times 10^{-2}$)

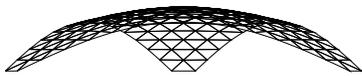
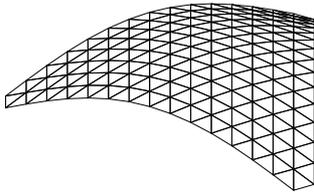


$$f = 6.829 \times 10^{-1} [\text{kNm}]$$

$$g = 1.200 \times 10^{-2}$$

$$S = 405.4 [\text{m}^2]$$

(c) 最適形状 ($\bar{g} = 1.200 \times 10^{-2}$)

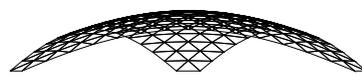
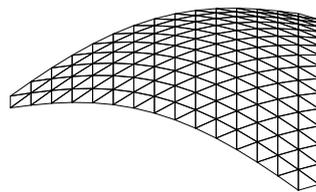


$$f = 7.203 \times 10^{-1} [\text{kNm}]$$

$$g = 4.000 \times 10^{-3}$$

$$S = 405.4 [\text{m}^2]$$

(d) 最適形状 ($\bar{g} = 4.000 \times 10^{-3}$)

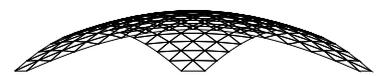
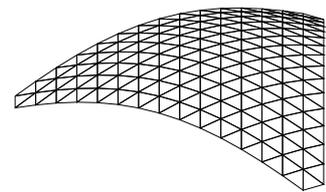


$$f = 8.500 \times 10^{-1} [\text{kNm}]$$

$$g = 5.794 \times 10^{-4}$$

$$S = 405.4 [\text{m}^2]$$

(e) 最適形状 ($\bar{f} = 8.500 \times 10^{-1}$)



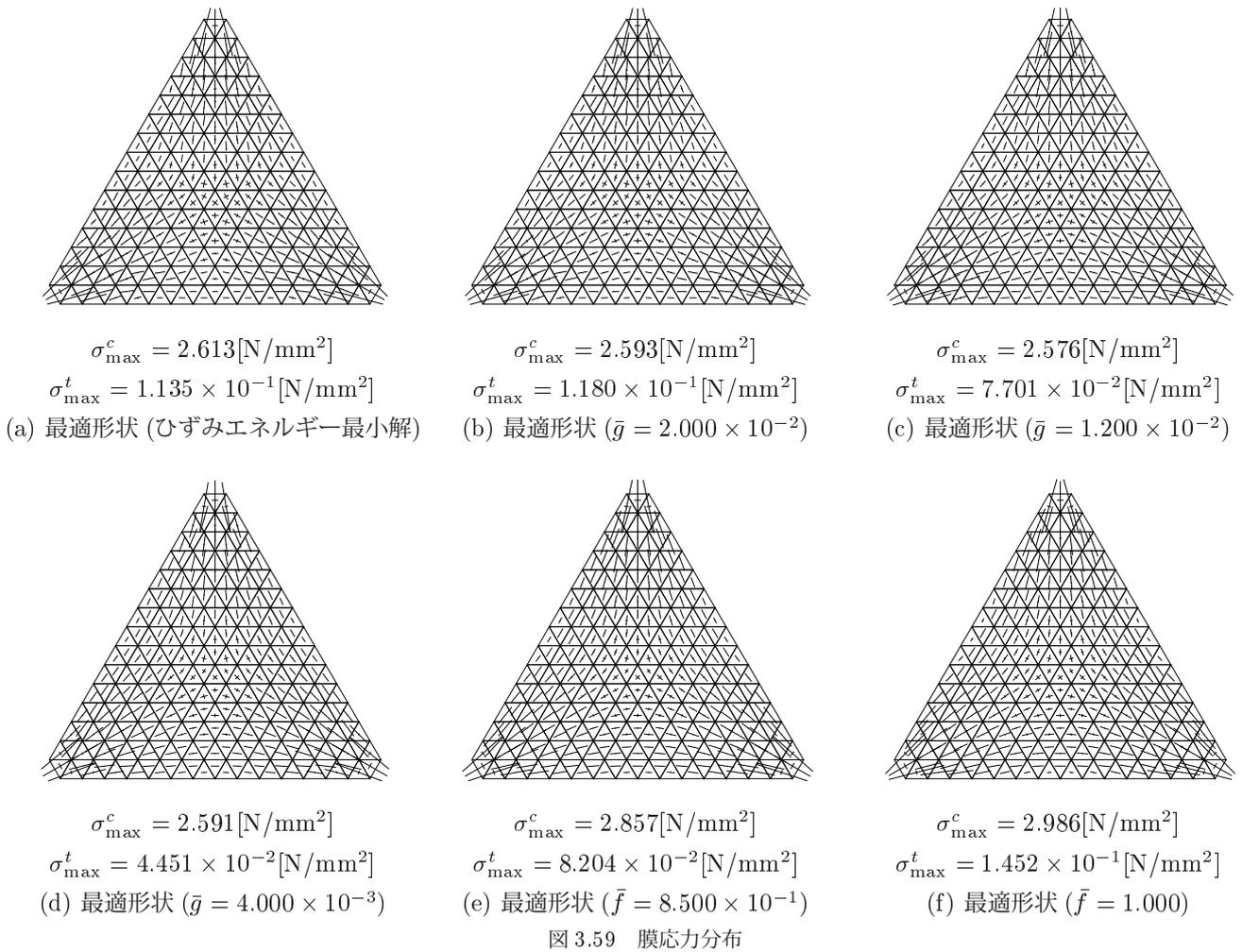
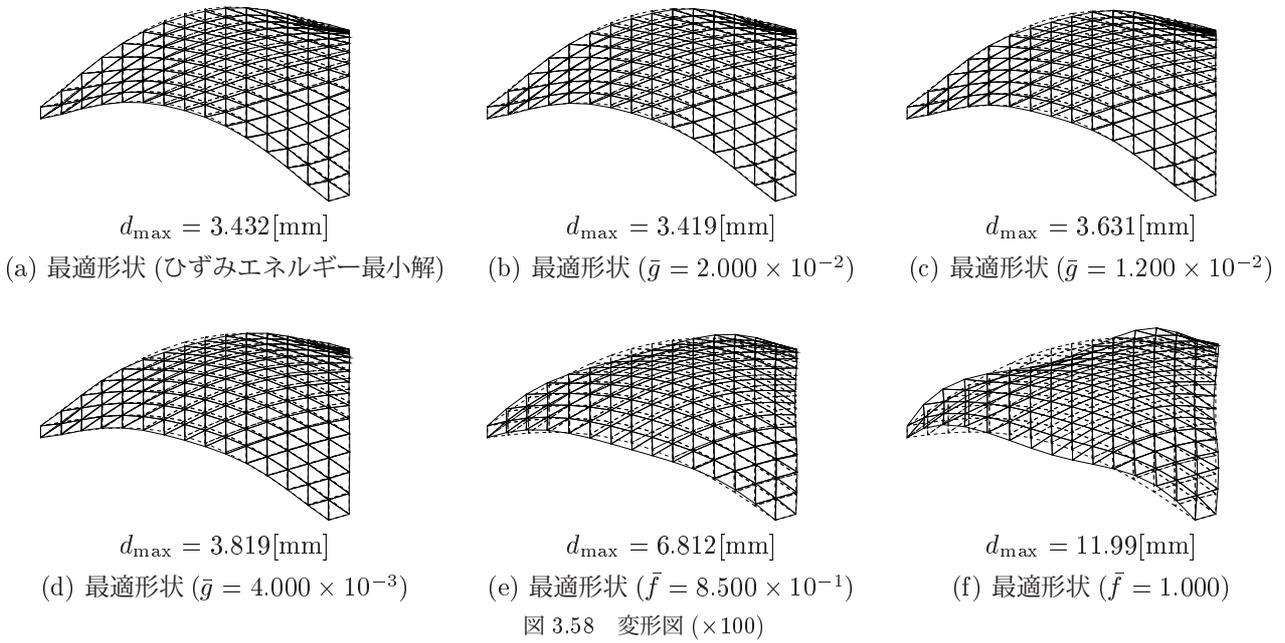
$$f = 1.000 [\text{kNm}]$$

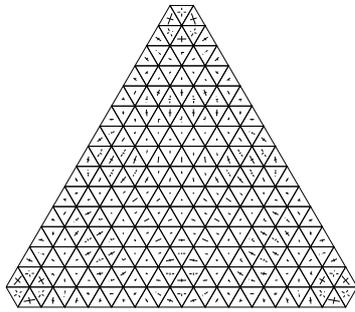
$$g = 4.519 \times 10^{-4}$$

$$S = 405.4 [\text{m}^2]$$

(f) 最適形状 ($\bar{f} = 1.000$)

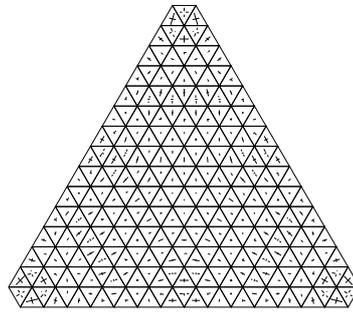
図 3.57 形状図





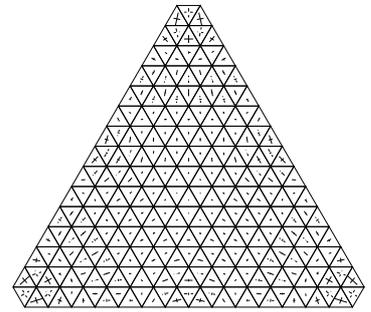
$$\sigma_{\max}^b = 5.854 \times 10^{-1} [\text{N/mm}^2]$$

(a) 最適形状 (ひずみエネルギー最小解)



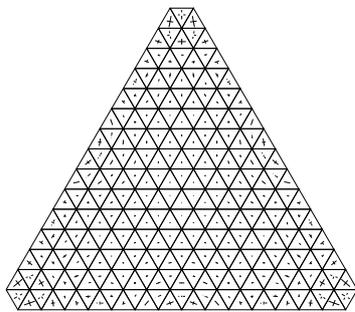
$$\sigma_{\max}^b = 6.108 \times 10^{-1} [\text{N/mm}^2]$$

(b) 最適形状 ($\bar{g} = 2.000 \times 10^{-2}$)



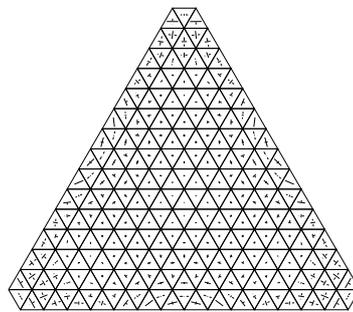
$$\sigma_{\max}^b = 6.409 \times 10^{-1} [\text{N/mm}^2]$$

(c) 最適形状 ($\bar{g} = 1.200 \times 10^{-2}$)



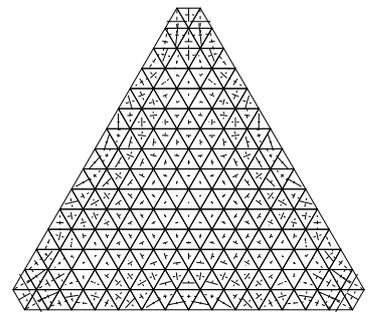
$$\sigma_{\max}^b = 5.462 \times 10^{-1} [\text{N/mm}^2]$$

(d) 最適形状 ($\bar{g} = 4.000 \times 10^{-3}$)



$$\sigma_{\max}^b = 5.616 \times 10^{-1} [\text{N/mm}^2]$$

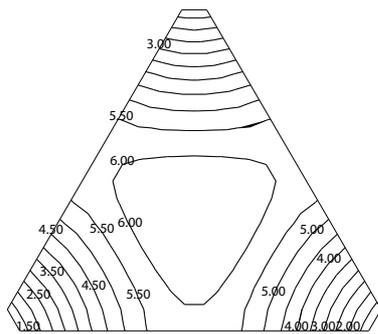
(e) 最適形状 ($\bar{f} = 8.500 \times 10^{-1}$)



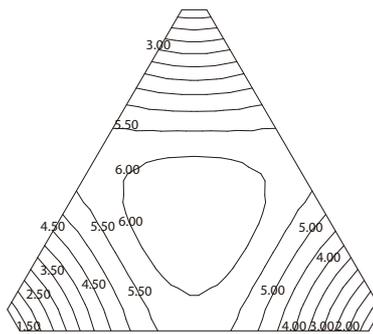
$$\sigma_{\max}^b = 1.367 [\text{N/mm}^2]$$

(f) 最適形状 ($\bar{f} = 1.000$)

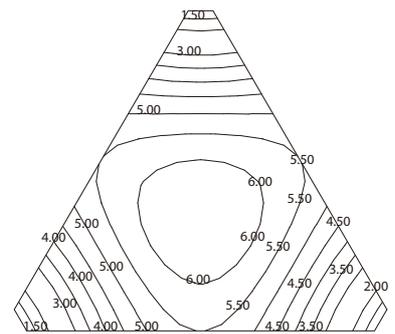
図 3.60 曲げ応力分布



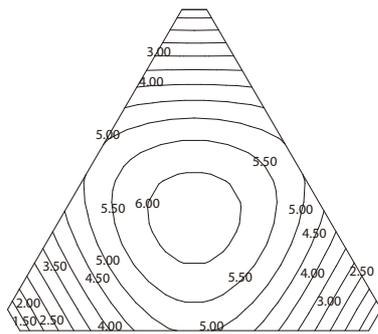
(a) 最適形状 (ひずみエネルギー最小解)



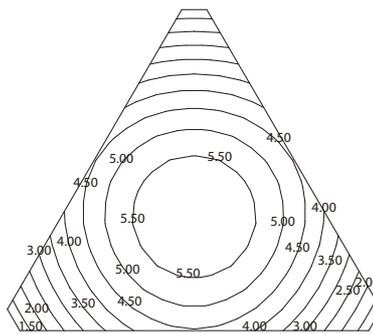
(b) 最適形状 ($\bar{g} = 2.000 \times 10^{-2}$)



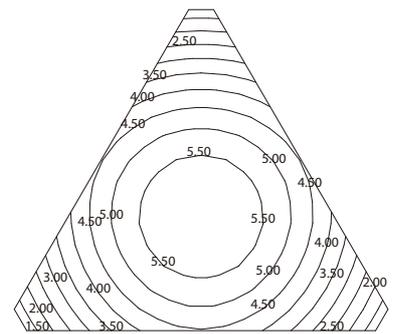
(c) 最適形状 ($\bar{g} = 1.200 \times 10^{-2}$)



(d) 最適形状 ($\bar{g} = 4.000 \times 10^{-3}$)



(e) 最適形状 ($\bar{f} = 8.500 \times 10^{-1}$)



(f) 最適形状 ($\bar{f} = 1.000$)

図 3.61 z 座標に関する等高線図

3.6 三角形ベジエパッチにより形状記述される球形平面を有するシェル

3.6.1 最適化モデル

4つ目の最適化モデルは、図3.62に示すような球形平面を有するシェル構造物とする。支持条件は図の黒点を固定支持とする。シェル形状は裁断球殻とし、初期形状は次のような関数で与える。

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \quad (3.66)$$

ここで、支点を含む平面の中央を座標の原点とし、スパン45m、曲率半径30m ($x_0 = y_0 = 0, z_0 = 40.6971, r = 30$)とする。形状記述は三角形パッチベジエ曲面によりおこなうが、1/6領域のみの記述とし、その他の節点は補間した1/6領域の節点をもとに対称性から生成するものとする。制御点は曲面の1/6領域全体に5×5の格子状に配置する。各ベジエパッチは隣り合う辺上の制御点を共有する。最適化の際の設計変数は、支持点を不動とするために支持点上の制御点を除いた制御点のz座標 q_z (図の黒点)とする。設計変数の数は13である。ここで、ベジエパッチは1/6領域で閉じているため、境界面においては曲面の傾きや曲率の連続性は必ずしも保たれない。対称性を考慮し1/2の部分を弾性解析の対象とし、対称面での法線方向の変位を全てゼロ、さらに対称面の面外への回転をゼロとする。要素分割は432要素とする。外力、材料定数、断面形状などは、3.2.10節の最後に示した通りである。

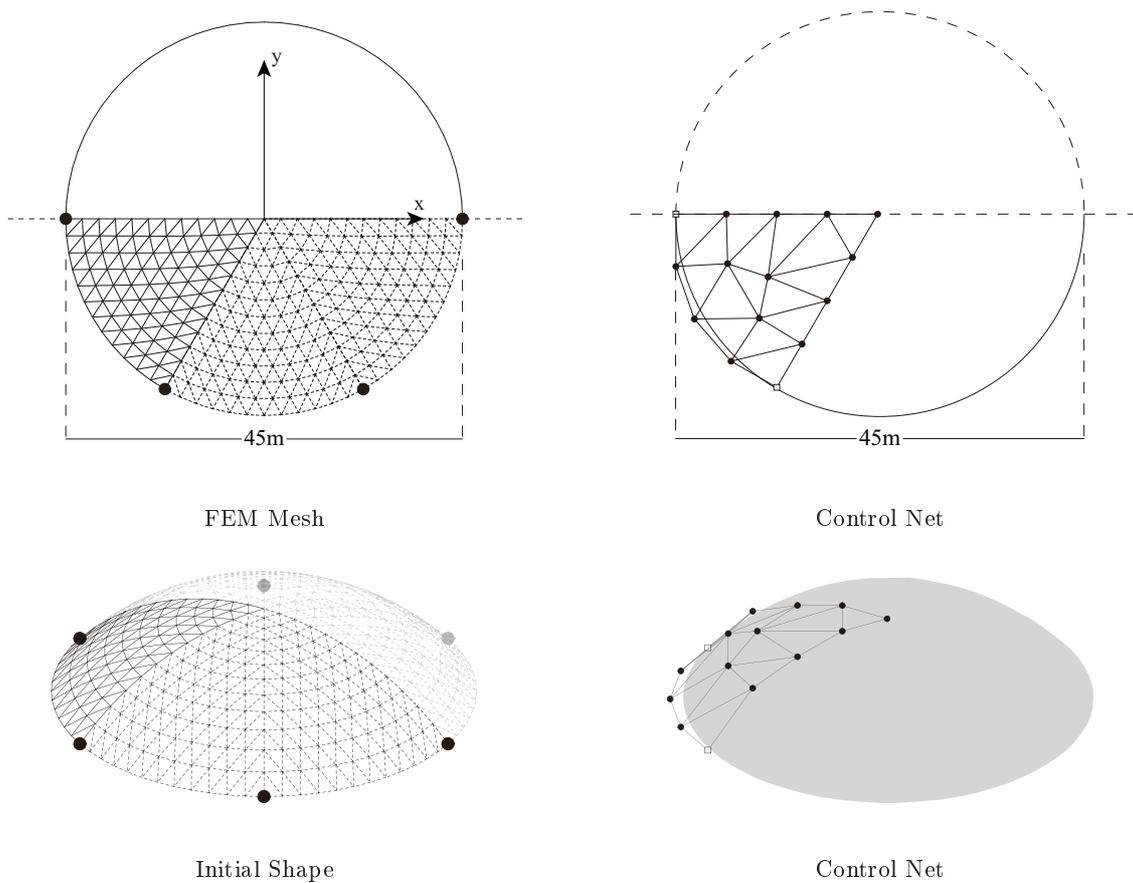


図3.62 最適化モデル4

3.6.2 例題 1：代数不変量制約を与えない場合

最適化概要

次の最適化問題を考える。

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f(\mathbf{q}_z) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \\ \text{subject to} \quad & \begin{cases} S(\mathbf{q}_z) - S_0 \leq 0 \\ \mathbf{r}_z^*(\mathbf{q}_z) - \mathbf{r}_{z,0} = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.67)$$

この最適化問題は、支持点を不動とし、シェル中央面の面積を初期形状の値以下とする制約条件のもとでひずみエネルギーを最小化する問題である。

最適化結果と考察

最適性条件を満足し、最適化は終了した。本手法により得られた最適解曲面の形状を図 3.63(b) に示す。また、比較の対象として、初期解曲面の形状を図 3.63(a) に示す。各図で上方にアイソメトリック図を、下方には立面図をそれぞれ示す。初期形状および最適形状の、自重作用時の弾性変形の様子を図 3.64(a), (b) にそれぞれ示す。初期形状および最適形状のシェル中央面の膜応力、および曲げモーメントによる縁応力の分布図を図 3.65(a), (b) および図 3.66(a), (b) にそれぞれ示す。

図 3.63 を見ると、最適化をおこなうことで、支持点間のライズがカタナリー状に上昇していることが確認できる。目的関数およびシェル中央面の面積の値を見ると、最適形状は、初期形状と同じ体積を有しながらも、支持点間のライズをカタナリー状に上昇させることでひずみエネルギーの値を初期形状からおよそ 66 % 低減されていることがわかる。

図 3.64 を見ると、最適形状の自重作用時の弾性変位は、初期形状に比べ大幅に低減されていることが分かる。最大鉛直変位は初期形状からおよそ 91 % 低減されており、剛性が飛躍的に上昇している。

図 3.65 および図 3.66 を見ると、最適化をおこなうことで曲げ応力が非常に小さくなっていることが確認できる。初期形状において支持部が負担していた曲げ応力が抑制される代わりに、全体として膜応力によって外力に対し抵抗する力学的メカニズムに変化している。また、膜応力においては、力の流れに大きな変化はなく、主として圧縮力が支配的となっている。

以降、本最適化結果をもとにして、式 (3.67) に様々な代数不変量制約の導入を試みる。

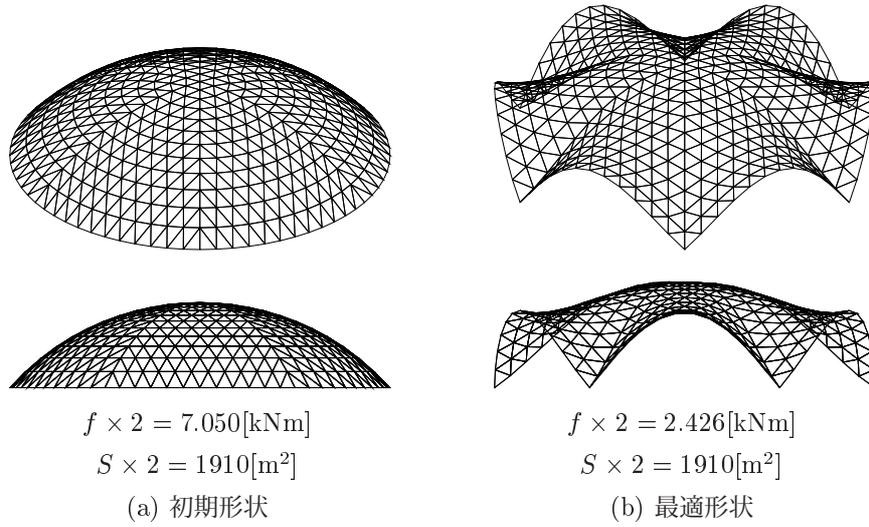


図 3.63 形状図

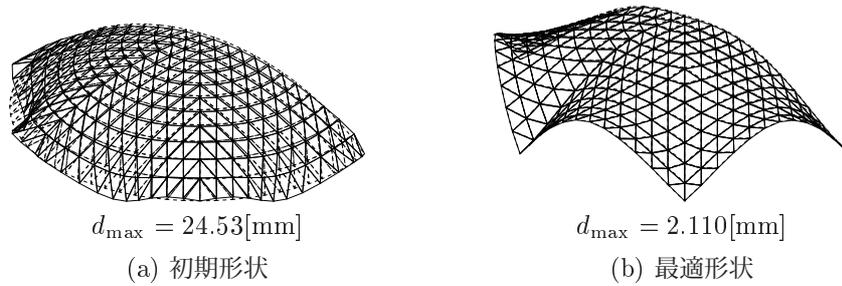


図 3.64 変形図 (×100)

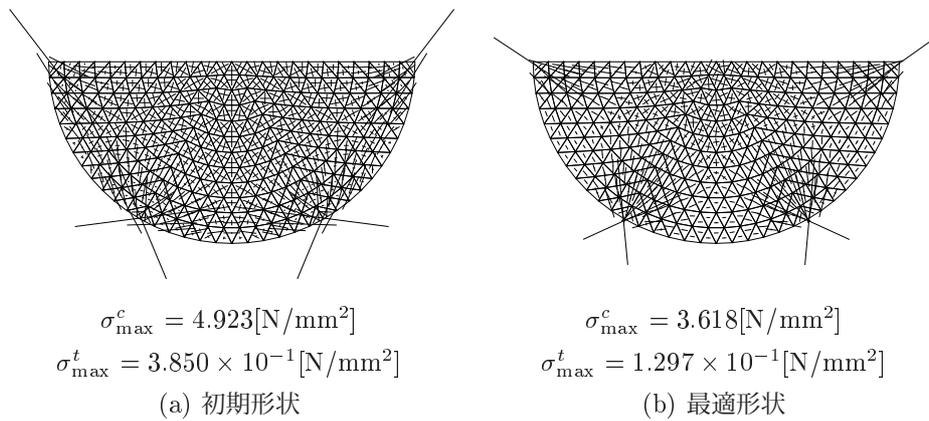


図 3.65 膜応力分布図

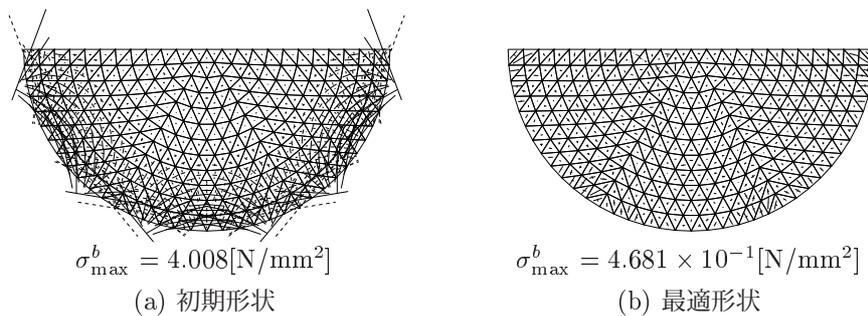


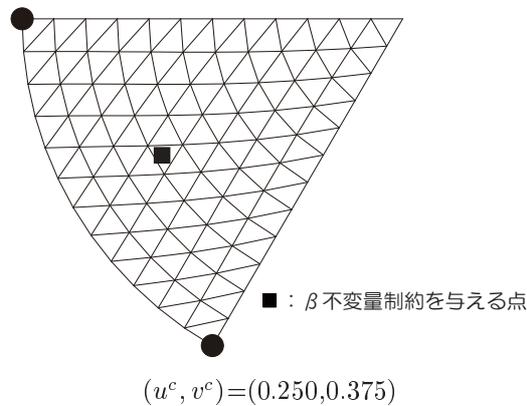
図 3.66 曲げ応力分布図

3.6.3 例題 2 : β 不変量制約を与えて凸らしさを制御する場合

最適化概要

次の最適化問題を考える。

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f(\mathbf{q}_z) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \\ \text{subject to} \quad & \begin{cases} S(\mathbf{q}_z) - S_0 \leq 0 \\ \mathbf{r}_z^*(\mathbf{q}_z) - \mathbf{r}_{z,0}^* = 0 \\ \beta_2^c(\mathbf{q}_z) > 0 \\ \beta_1^c(\mathbf{q}_z) \leq \bar{\beta} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.68)$$



β_1^c , β_2^c はそれぞれ、図の■点における β_1 , β_2 不変量である。この最適化問題は、問題 (3.67) に加えて、 $\bar{\beta} < 0$ のとき、制約点が凸面となるような β 不変量制約を導入している。

最適化結果と考察

$\bar{\beta} = -0.20$ および $\bar{\beta} = -0.30$ として最適化を実行したところ、ともに最適性条件を満足し、最適化は終了した。本手法により $\bar{\beta} = -0.20$ および $\bar{\beta} = -0.30$ として得られた最適解曲面の形状を図 3.67(b) および (c) にそれぞれ示す。また、比較の対象として、初期解曲面の形状を図 3.67(a) に示す。各図で上方にアイソメトリック図を、下方には立面図をそれぞれ示す。初期形状および最適形状の、自重作用時の弾性変形の様子を図 3.68(a)~(c) にそれぞれ示す。初期形状および最適形状のシェル中央面の膜応力、および曲げモーメントによる縁応力の分布図を図 3.69(a)~(c) および図 3.70(a)~(c) にそれぞれ示す。初期形状および最適形状の鉛直方向座標に関する等高線図を図 3.71(a)~(c) にそれぞれ示す。最適形状の等高線図 3.71(b), (c) において、 β 不変量制約を与えた点を黒点で示している。

図 3.67 を見ると、 $\bar{\beta} = -0.20$, $\bar{\beta} = -0.30$ の両方の場合において、最適化をおこなうことで支持点間のライズを上昇させつつも、 β 不変量制約を与えた点が凸面となるように形状に膨らみを生じていることが確認できる。図 3.71 の等高線図と合わせて考察すると、 β_1 の値が小さいほど形状の凸性が大きくなっていることが分かる。このことは、問題 (3.50) において $\bar{\beta}$ の値を変化させることで不変量制約を与えた点の凸らしさを自由にコントロールできることを示している。目的関数およびシェル中央面の面積の値を見ると、 $\bar{\beta} = -0.20$ としたときの最適形状は、初期形状と同じ体積を有し、問題 (3.49) の最適形状には及ばないものの、不変量制約点に凸らしさを有しながらひずみエネルギーの値を大きく減少できていることがわかる。 $\bar{\beta} = -0.30$ としたときの最適形状については、凸らしさをかなり高めたため、ひずみエネルギーはやや大きい値をとっているが、初期形状よりは低減されている。

図 3.68 を見ると、最適形状の自重作用時の弾性変位は、初期形状に比べ大幅に低減されており、代数不変量制約を

満たしつつも高い剛性が得られていることが分かる。

図 3.69 および図 3.70 を見ると、最適形状は、不変量制約を与えた点に膨らみを生じつつも、問題 (3.67) の最適形状と同様に、曲げ応力の小さい圧縮抵抗型の力学的メカニズムを有する形態へと移行していることが分かる。

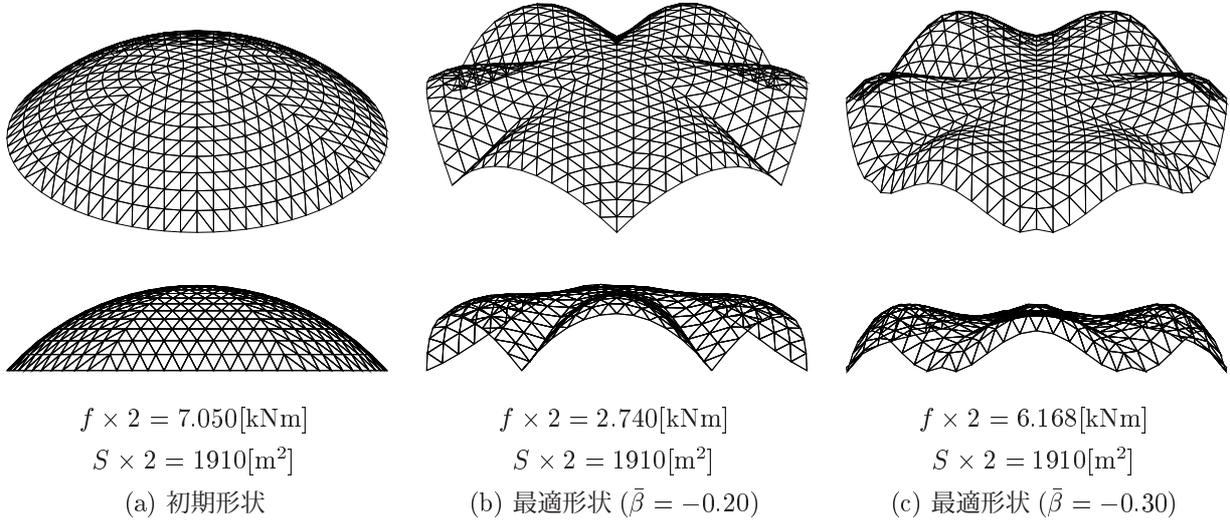


図 3.67 形状図

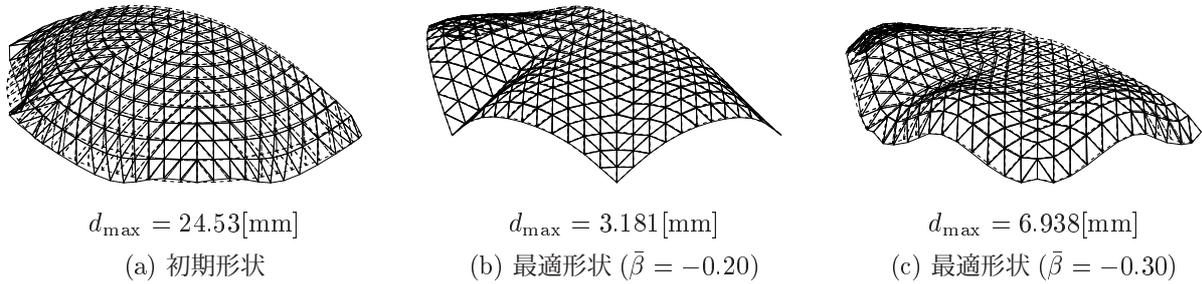
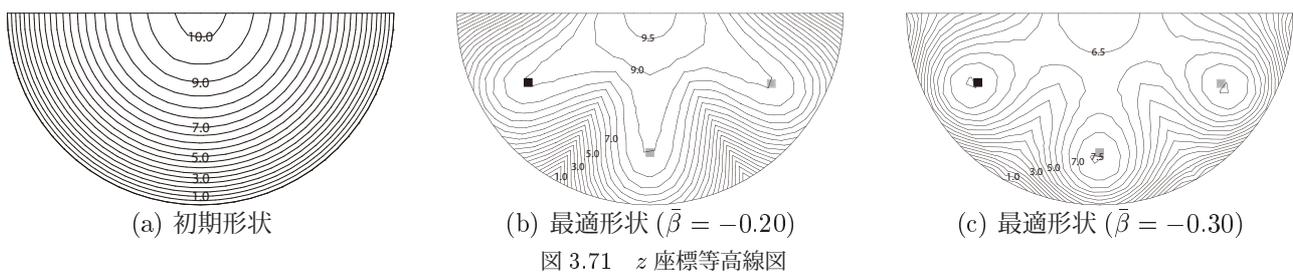
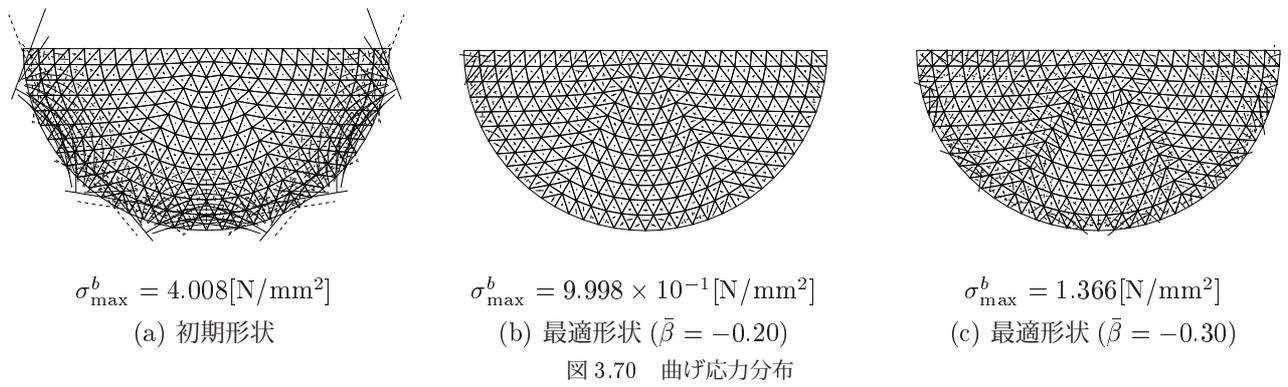
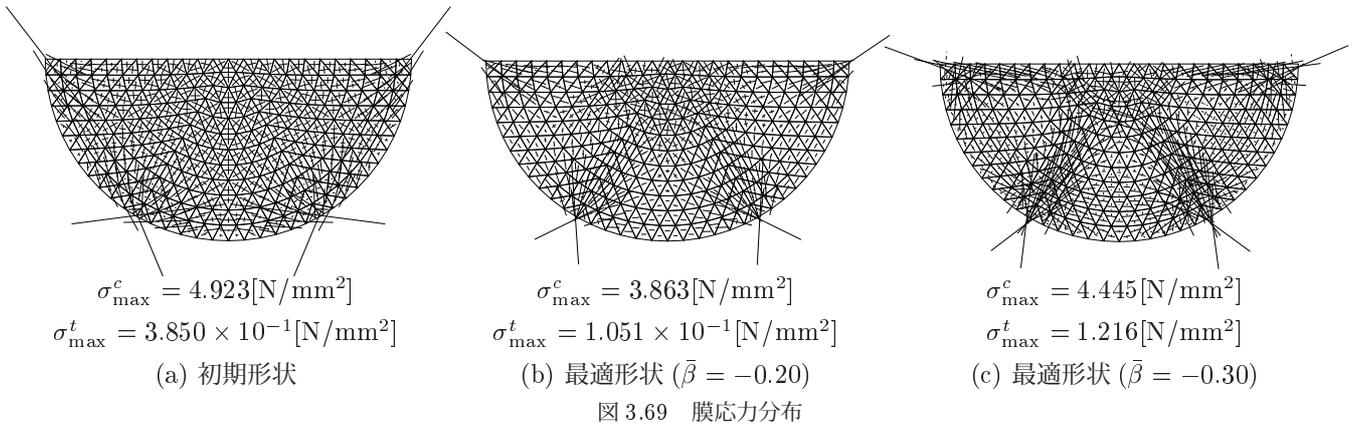


図 3.68 変形図 ($\times 100$)

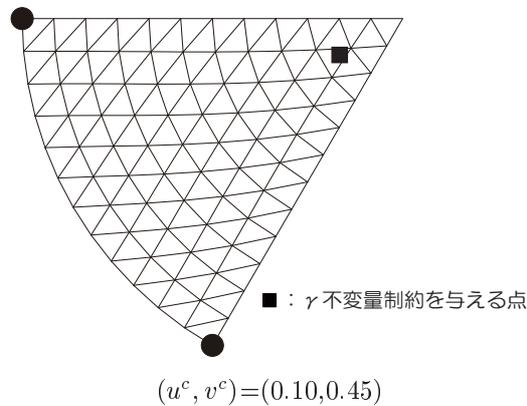


3.6.4 例題3: γ 不変量制約を与えて谷らしさを制御する場合

最適化概要

次の最適化問題を考える。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(\mathbf{q}_z) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \\ & \text{subject to} && \begin{cases} S(\mathbf{q}_z) - S_0 \leq 0 \\ \mathbf{r}_z^*(\mathbf{q}_z) - \mathbf{r}_{z,0}^* = 0 \\ \gamma_2^c(\mathbf{q}_z) = 0 \\ \gamma_3^{c^2}(\mathbf{q}_z) - \gamma_1^{c^2}(\mathbf{q}_z) > 0 \\ \gamma_3^c(\mathbf{q}_z) \geq \bar{\gamma}^c \end{cases} \end{aligned} \quad (3.69)$$



$\gamma_1^c, \gamma_1^c, \gamma_1^c$ はそれぞれ、図の■点における $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 不変量である。この最適化問題は、問題 (3.67) に加えて、 $\bar{\gamma}^c > 0$ のとき、制約点が谷となるような γ 不変量制約を導入している。

最適化結果と考察

$\bar{\gamma}^c = 0.05$ および $\bar{\gamma}^c = 0.100$ として最適化を実行したところ、ともに最適性条件を満足し、最適化は終了した。本手法により $\bar{\gamma}^c = 0.050$ および $\bar{\gamma}^c = 0.100$ として得られた最適解曲面の形状を図 3.72(b) および (c) にそれぞれ示す。また、比較の対象として、初期解曲面の形状を図 3.72(a) に示す。各図で上方にアイソメトリック図を、下方には立面図をそれぞれ示す。初期形状および最適形状の、自重作用時の弾性変形の様子を図 3.73(a)~(c) にそれぞれ示す。初期形状および最適形状のシェル中央面の膜応力、および曲げモーメントによる縁応力の分布図を図 3.74(a)~(c) および図 3.75(a)~(c) にそれぞれ示す。初期形状および最適形状の鉛直方向座標に関する等高線図を図 3.76(a)~(c) にそれぞれ示す。最適形状の等高線図 3.76(b), (c) において、 γ 不変量制約を与えた点を黒点で示している。

図 3.72 を見ると、 $\bar{\gamma}^c = 0.050$, $\bar{\gamma}^c = 0.100$ の両方の場合において、最適化をおこなうことで γ 不変量制約を与えた点の両脇にリブのようなものが形成され、それらのリブに挟まれる形で制約点周辺が谷となるように形状に筒状の窪みを生じていることが確認できる。図 3.76 の等高線図と合わせて考察すると、 γ_3 の値が大きいかほど谷の勾配が増加し、形状の谷らしさが大きくなっていることが分かる。このことは、問題 (3.69) において $\bar{\gamma}^c$ の値を変化させることで不変量制約を与えた点の谷らしさを自由にコントロールできることを示している。目的関数およびシェル中央面の面積の値を見ると、最適形状は、初期形状と同じ体積を有し、問題 (3.49) の最適形状には及ばないものの、不変量制約点に谷らしさを有しながらひずみエネルギーの値を大きく減少できていることがわかる。

図 3.73 を見ると、最適形状の自重作用時の弾性変位は、初期形状に比べ大幅に低減されており、代数不変量制約を

満たしつつも高い剛性が得られていることが分かる。

図 3.74 および図 3.75 を見ると、最適形状は、不変量制約を与えた点に谷を生じつつも、問題 (3.67) の最適形状と同様に、曲げ応力、引張応力が小さい圧縮抵抗型の力学的メカニズムを有する形態へと移行していることが分かる。

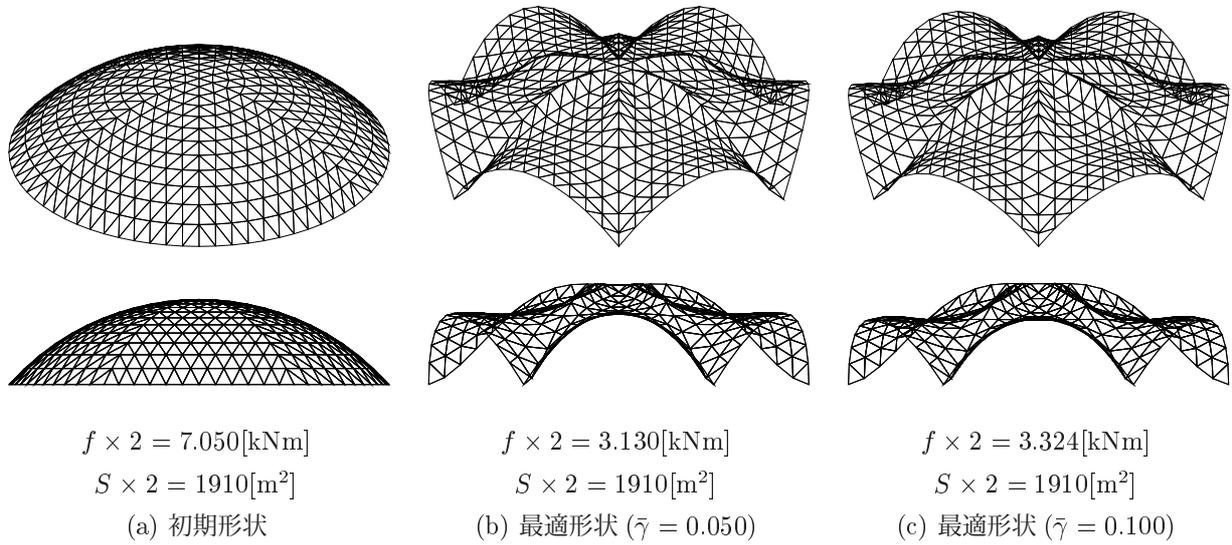


図 3.72 形状図

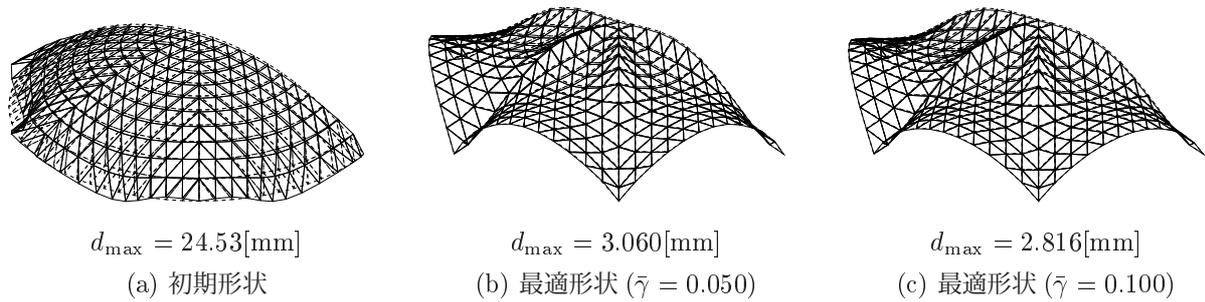


図 3.73 変形図 ($\times 100$)

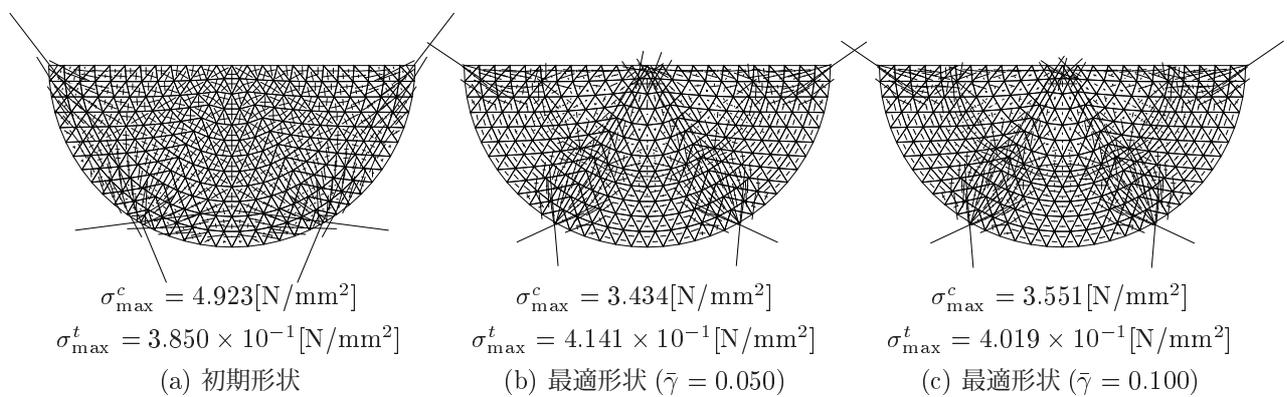
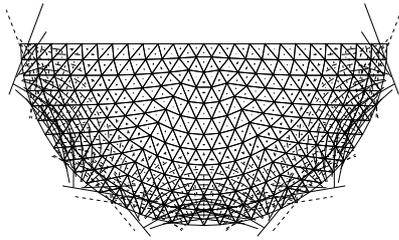
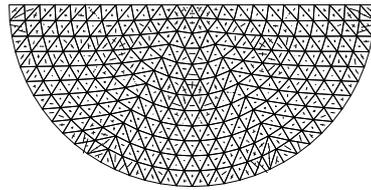


図 3.74 膜応力分布



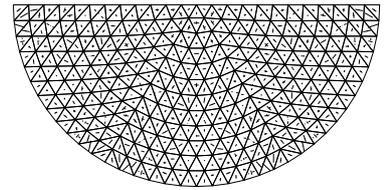
$$\sigma_{\max}^b = 4.008[\text{N}/\text{mm}^2]$$

(a) 初期形状



$$\sigma_{\max}^b = 5.354 \times 10^{-1}[\text{N}/\text{mm}^2]$$

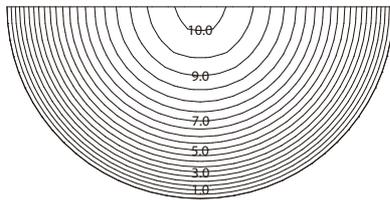
(b) 最適形状 ($\bar{\gamma} = -0.040$)



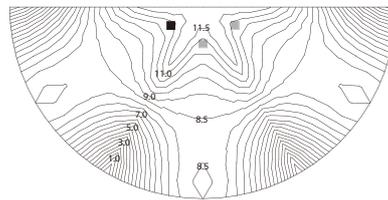
$$\sigma_{\max}^b = 3.818[\text{N}/\text{mm}^2]$$

(c) 最適形状 ($\bar{\gamma} = -0.060$)

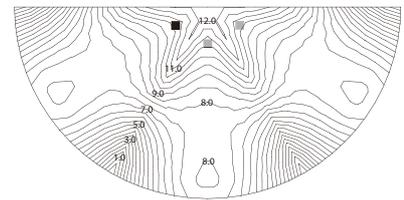
図 3.75 曲げ応力分布



(a) 初期形状



(b) 最適形状 ($\bar{\gamma} = -0.040$)



(c) 最適形状 ($\bar{\gamma} = -0.060$)

図 3.76 z 座標等高線図

3.7 3章の結論

本章では、連続体シェル構造の幾何学的な特性を評価する指標として代数不変量を採用し、最適化問題の制約条件に組み込むことで、意匠性や建築計画を考慮することを目的とした形状最適化手法を提案し、様々な最適化例を通じて手法の有効性を検証した。

まず、曲面の形状表現の自由度を損なうことなく最適化の際の未知量の数を低減させるため、ベジエ曲面により曲面形状を表現し、問題設定をおこなった。最適化モデルは、様々な平面形状に幅広く本手法を適用するために、テンソル積ベジエ曲面で形状表現されたものと、三角形パッチベジエ曲面により形状表現されたものをそれぞれ複数取り扱った。本章における連続体シェル構造の形状最適化問題は、体積制約下においてひずみエネルギーを最小化するという純粋な構造最適化問題を基本とし、これに代数不変量制約を導入することで幾何学的特性を考慮しようというものである。得られた主要な結果は以下のようにまとめられる。

- 1) 連続体シェルに対してひずみエネルギーを最小化すると、平面形状、境界条件の違いに関わらず剛性を大きく向上させることができ、同時に最大主応力や最大鉛直変位といった他の力学量を低減できる。
- 2) 曲面の数箇所で点支持された連続体シェルでは、平面形状によらず、支持点間のライズをカタナリー状に上昇させることでひずみエネルギーを抑制する。
- 3) β 不変量の値を制御することで、シェル曲面の局所的な凹凸の程度をコントロールすることができる。
- 4) γ 不変量の値を制御することで、シェル曲面の局所的な山谷の程度をコントロールすることができる。
- 5) α 不変量の値を制御することで、シェル曲面の球らしさをコントロールすることができる。

1), 2) の結果については、既往の研究である程度示されているが、本研究のように多様な最適化モデルを対象としたことで、ひずみエネルギー最小化という剛性を高める手法の汎用性が示されたと言える。3), 4), 5) に示したように、曲面の代数不変量を制約条件に導入することで、曲面形状の特徴量の操作が可能となった。

今回は、ケーススタディとして簡単な最適化モデルに対して無作為に設定した任意の点において代数不変量制約を導入したが、実際の設計において本手法を適用することを想定した場合、見た目の美しさや、内部空間の確保などといった構造物に要求される非力学的要求に応じて制約条件等の設定を適切に施す必要がある。また、4つ目の解析モデルのように、1つの曲面を複数のベジエパッチのつなぎ合わせによって表現する場合は、境界部分での傾きや曲率の連続性は保証されないため、それらの連続性が求められる場合には、制御点の位置や境界部の曲率に制約を与える必要がある。

力学的合理性を大きく失うことなく曲面形状の凹凸や山谷、球らしさといった幾何学的特性をコントロールできれば、複雑な境界形状および曲面形状を有するシェル構造物を設計する際に、構造物に要求される様々な非力学的性能を考慮する上で有効に寄与すると考えられる。設計の初期段階において意匠性や建築計画を対話的に評価しつつ曲面形状を決定する上で、代数不変量が有効な指標になると考えられる。

第4章

ひずみエネルギーと展開可能性を考慮した連続体シェルの形状最適化

4.1 概説

本章では、連続体シェル構造物に対して、ひずみエネルギーを目的関数とし、第2.5節で概説した可展条件を制約条件に導入した単一目的最適化問題を定式化し、双方を考慮したシェル形状を最適化によって求める。3章同様、ひずみエネルギーを最小化し、シェルの総体積を制約することに加えて、施工性の指標として曲面の展開可能性に着目し、曲面を施工性に優れた可展面で形成されるように可展条件を制約条件に導入することで、建築構造物に要求される様々な要求を同時に考慮することを目的とする。可展面である曲面は、錐や筒、線織面の一部といった限られた種類しか存在せず、曲面全体を可展面とすることは形状表現の自由度が大きく損なわれることとなる。そこで本研究では、曲面をいくつかの区分領域に分割し、区分領域がそれぞれ独立に可展面となるような問題を考え、可展面のつなぎ合わせにより表現される形態の創生を試みる。シェルの曲面形状はベジエ曲面により表現する。

第4.2節では、曲面の区分領域分割について述べる。

第4.3節では、区分領域がテンソル積ベジエ曲面により形状記述される連続体シェルに対して、可展条件制約を導入した形状最適化問題を定式化し、それらを解くことで得られた解の幾何学的特性および力学的特性について考察する。

第4.4～4.6節では、区分領域が三角形パッチベジエ曲面により形状記述される連続体シェルに対して、可展条件制約を導入した形状最適化問題を定式化し、それらを解くことで得られた解の特徴について考察する。

第4.7節では、本章で提案した形状最適化手法により得られた結論を述べる。

第4.8節では、実際に模型を製作することで、最適化で得られた最適曲面と同様の曲面が平面から製作可能であることを示す。

本章での最適化問題での共通事項は以下のとおりである。

- 応力算定は有限要素法による線形静的解析によりおこなう。
- 有限要素は三角形平面シェル要素*1を用いる。
- 材料は鋼材とし、ヤング率を 21GPa、ポアソン比を 0.17 とする。
- 外力は自重として単位体積重量 24kN/m³ を作用させる。
- シェル厚は一様に 0.1m とする。
- 最適化問題の定式化に際し、変位の自由度を n 、節点変位ベクトルを $\mathbf{d} \in R^n$ 、線形弾性剛性マトリクスを $\mathbf{K} \in R^{n \times n}$ 、シェル中央面の総面積を S 、支点の z 座標を r_z^* で表わす。
- 初期形状の値を下添え字の 0 で表わす。

本章で目的関数あるいは制約条件関数とする数学的指標は、ひずみエネルギー、シェルの面積、 β_2 不変量であり、それらすべての感度解析については前章までにすでに定式化済みであるので、そちらを参照されたい。

4.2 区分領域の設定

可展面である曲面は、錐や筒、線織面の一部といった限られた種類しか存在しないため、曲面全体を可展面とする形状表現の自由度が大きく損なわれることとなる。また、支持点を不動とした場合には、そもそもその点を動かさなければ可展面を形成できないといった状況も予想される。そこで本研究では、曲面をいくつかの区分領域に分割し、区分領域がそれぞれ独立に可展面となるような問題を考え、可展面のつなぎ合わせにより表現される形態(区分的可展面)の創生を試みる。そのために、区分領域に分けられた曲面をそれぞれ独立にベジエ曲面により離散化し、隣同士のベジエパッチは境界部において制御点を共有するような形状表現をおこなうこととする。なお、可展面は単純な曲面であり、任意の可展面はベジエ曲面により(ベジエ曲面の次数の範囲で)容易に記述することが可能である^{42,43)}。

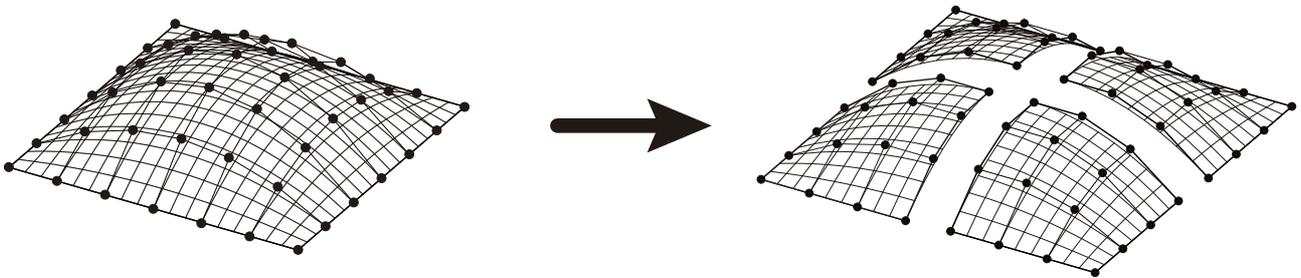


図 4.1 曲面を区分領域に分割し、それぞれ独立にベジエ曲面で記述した例

次節以降、幾何学的制約を考慮した様々な最適化問題を定式化し、その最適化結果を示す。最適化結果の表記での共通事項は以下のとおりである。

- 変形図の点線は荷重作用前の形状を、実線は荷重作用時の変位を 50~100 倍にして表した形状を示している。
- 変形図中の d_{\max} として示した値は各節点の鉛直方向変位のうち最大の値を表す。
- 膜応力分布図において、実線、点線はそれぞれ各要素図心における圧縮応力、引張応力を表し、線の長さは主応力の大きさを表す。
- 膜応力分布図中の σ_{\max}^t は各要素図心における引張応力の最大値、 σ_{\max}^c は圧縮応力の最大値である。
- 曲げ応力分布図中の σ_{\max}^b は各要素図心の曲げモーメントによる縁応力の絶対値のうち最大の値を表している。

*1 面内変形要素には定ひずみ要素を、面外変形要素には Zienkiewicz らの非適合三角形要素を採用する。

4.3 1/4 領域ベジエパッチにより形状記述される正方形平面を有するシェル

4.3.1 最適化モデル

1つ目の最適化モデルは、3章におけるモデル1と同様であり、形状記述もモデル1と同様にテンソル積ベジエ曲面によりおこなう。ただし、制御点は曲面の1/4領域に 4×4 の格子状に配置し、4つのベジエパッチを連結させて全体の曲面形状を表現することとする。最適化の際の設計変数は、1/4領域ベジエパッチを形成する制御点(図の黒点)の z 座標 q_z とする。残りの制御点(図の白点)は対称性を考慮して生成する。各ベジエパッチは隣り合う辺上の制御点を共有する。設計変数の個数は16である。ここで、ベジエパッチは1/4領域で閉じているため、境界面においては曲面の曲率の連続性は必ずしも保たれない。弾性解析についても対称性を考慮し1/4の部分を弾性解析の対象とし、対称面での法線方向の変位を全てゼロ、さらに対称面の面外への回転をゼロとする。要素分割は161要素とする。外力、材料定数、断面形状などは、4.1節の最後に示した通りである。

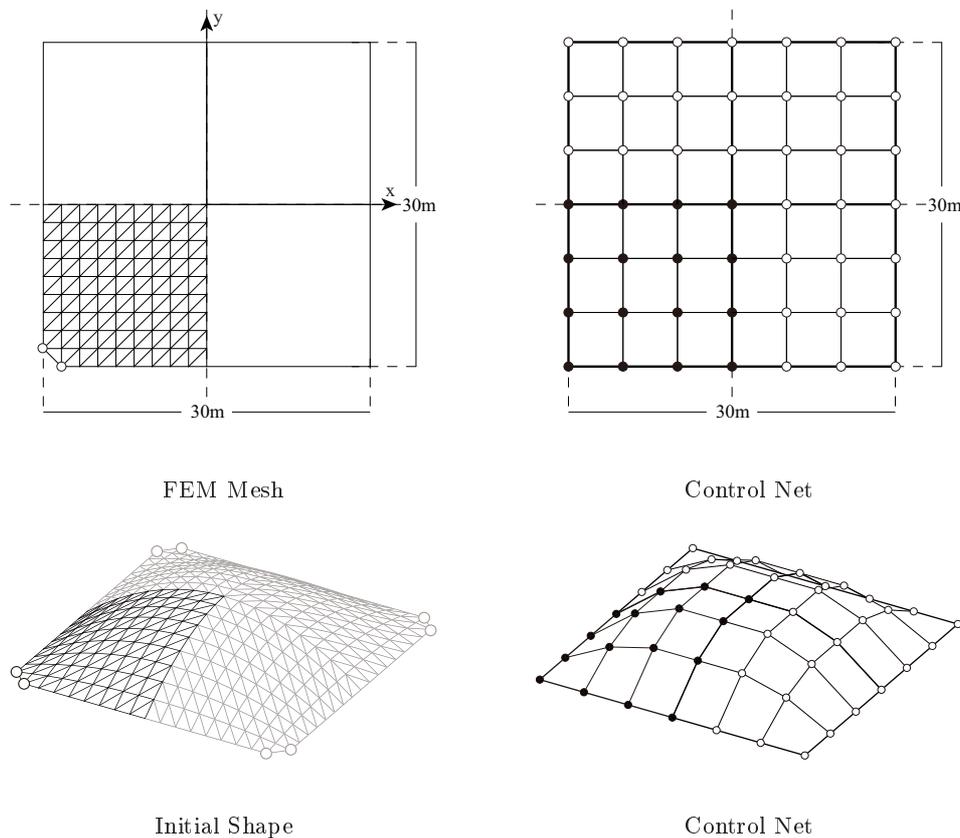


図 4.2 最適化モデル 1

4.3.2 例題1：代数不変量制約を与えない場合

最適化概要

次の最適化問題を考える。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(\mathbf{q}_z) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \\ & \text{subject to} && \begin{cases} S(\mathbf{q}_z) - S_0 \leq 0 \\ \mathbf{r}_z^*(\mathbf{q}_z) - \mathbf{r}_{z,0}^* = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.1)$$

この最適化問題は、支持点を不動とし、シェル中央面の面積を初期形状の値以下とする制約条件のもとでひずみエネルギーを最小化する問題である。なお、最適化モデルはシェル厚を一樣としているため、面積制約は体積制約と同義であり、極めてライズの大きい非現実的な形状が得られることを防ぎ、さらに、設計変数の許容領域を限定して解の収束性を高めるとともに、材料コストを抑えるという意味で経済的指標の役割も果たす。

最適化結果と考察

最適性条件を満足し、最適化は終了した。本手法により得られた最適解曲面の形状を図4.3(b)に示す。また、比較の対象として、初期解曲面の形状を図4.3(a)に示す。各図で上方にアイソメトリック図を、下方には立面図をそれぞれ示す。初期形状および最適形状の、自重作用時の弾性変形の様子を図4.4(a),(b)にそれぞれ示す。初期形状および最適形状のシェル中央面の膜応力、および曲げモーメントによる縁応力の分布図を図4.5(a),(b)および図4.6(a),(b)にそれぞれ示す。

図4.3を見ると、1/4領域のベジエパッチにより形状表現をおこなった最適解は、領域全体をベジエ曲面により表現した時の最適解の形状図3.2とほぼ同じ形状をしていることがわかる。

図4.4を見ると、最適形状の自重作用時の変位は、初期形状に比べ大幅に低減されていることがわかる。最大鉛直変位は初期形状からおよそ96%低減されており、剛性が飛躍的に上昇している。この結果は、ひずみエネルギーの力学的評価指標としての有効性を示すものである。

図4.5および図4.6を見ると、最適化をおこなうことで曲げ応力が非常に小さくなっていることが確認できる。初期形状において支持部が負担していた曲げ応力が抑制される代わりに、全体として膜応力によって外力に対し抵抗する力学的メカニズムに変化している。また、初期形状において支持部から側部にかけて生じていた引張力は、最適形状ではその代わりにシェル全面に圧縮力が生じ、それらは支持点に向かって滑らかに流れるように効率的に分布している。

以上、シェル形状、力学性状ともに、問題(3.49)とほぼ同等の最適化結果が得られた。したがって、ベジエパッチを1/4領域で区分的に分割し、対称性を考慮して設計変数を減らした場合でも、十分に優れた力学性能を有する最適形状が得られることが確認された。

以降、本最適化結果をもとにして、式(4.1)に可展条件制約の導入を試みる。

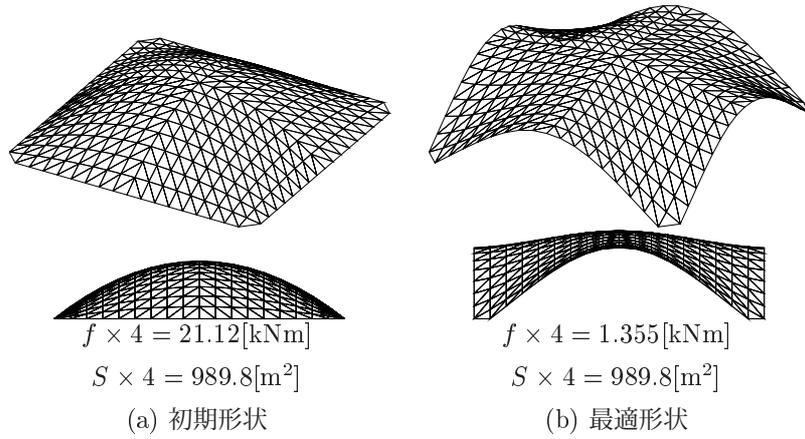


図 4.3 形状図

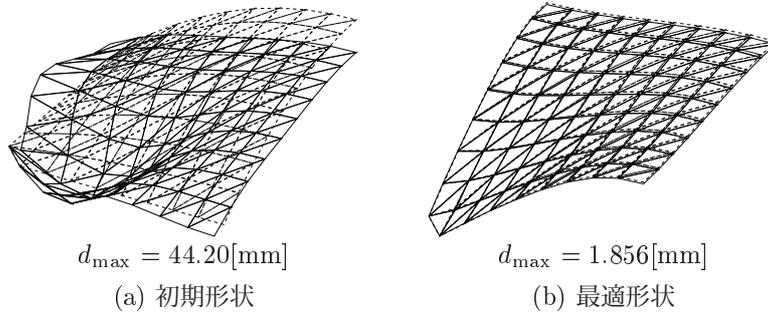


図 4.4 変形図 (×100)

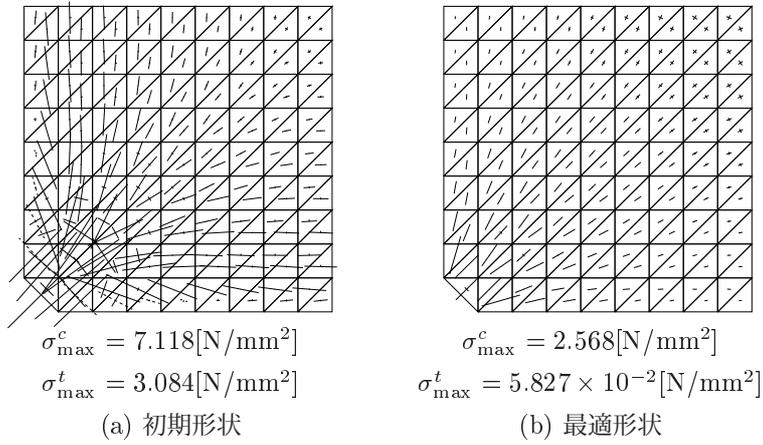


図 4.5 膜応力分布図

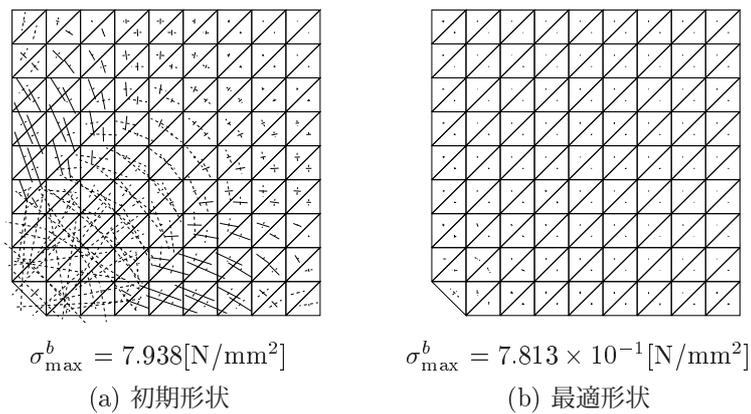


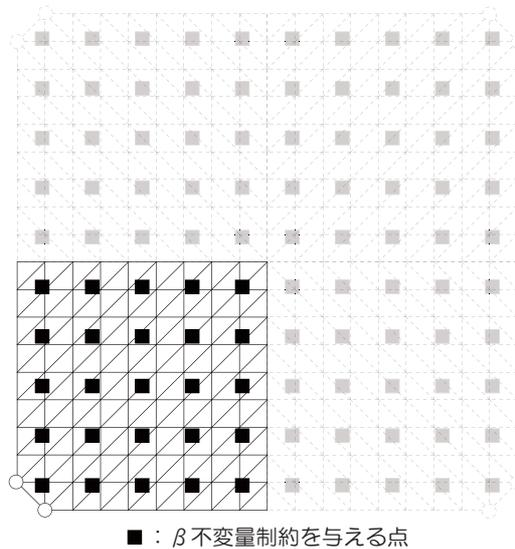
図 4.6 曲げ応力分布図

4.3.3 例題2：可展条件を導入する場合

最適化概要

次の最適化問題を考える。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(\mathbf{q}_z) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \\ & \text{subject to} && \begin{cases} S(\mathbf{q}_z) - S_0 \leq 0 \\ \mathbf{r}_z^*(\mathbf{q}_z) - \mathbf{r}_{z,0}^* = 0 \\ \beta_2^{ci}(\mathbf{q}_z) = 0 \\ (i=1, \dots, 25) \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2)$$



$$s^{ci}, t^{ci} \in [0.10, 0.30, 0.50, 0.70, 0.90], \quad (i = 1, \dots, 25)$$

この最適化問題は、問題(4.1)に加えて、曲面の1/4領域が可展面となるような β 不変量制約を導入している。 β 不変量制約の導入数については、ベジエ曲面の制御点が 4×4 の格子状に配置されていること踏まえ、それよりも多く 5×5 の格子状に全体に均一に導入した。

最適化結果と考察

最適性条件を満足し、最適化は終了した。本手法により得られた最適解曲面の形状を図4.7(b)に示す。また、比較の対象として、初期解曲面の形状を図4.7(a)に示す。各図で上方にアイソメトリック図を、下方には立面図をそれぞれ示す。初期形状および最適形状の、自重作用時の弾性変形の様子を図4.8(a),(b)にそれぞれ示す。初期形状および最適形状のシェル中央面の膜応力、および曲げモーメントによる縁応力の分布図を図4.9(a),(b)および図4.10(a),(b)にそれぞれ示す。

また、初期形状および最適形状の鉛直方向座標に関する等高線図を図4.11(a),(b)にそれぞれ示す。

最後に、曲面形状の3次元データから、初期形状および最適形状について、展開図が作成可能な場合には、図4.12にその展開図を示した。

図4.7を見ると、最適解は、側部のサイズが上昇し、ひずみエネルギーは初期解からおよそ86%減少していることがわかる。

図4.8を見ると、最適形状の自重作用時の変位は、初期形状に比べ低減されているが、単一にひずみエネルギーを

減少させた問題 (4.1) の最適解と比較すると大きく変形が発生する結果となった。最大鉛直変位は初期形状からおおよそ 78 % 低減されており、剛性は高められているものの、4 つの四角形に区分分割した領域をそれぞれ可展面とする厳しい幾何学的制約条件により、力学的合理性を劇的に改善するには至っていない。

図 4.9 および図 4.10 を見ると、問題 (4.1) の最適解と比較すると若干の曲げ応力の発生を許しているものの、全体として膜応力によって外力に対し抵抗する力学的メカニズムを有していることがわかる。

β_2 不変量は、制約を与えた 25 の点において 0 となっているだけで、その他の点において 0 となる保証はない。しかしながら、図 4.11 を見ると、等高線は概ね平行な直線となっており、可展面が実現できていることがうかがえる。その証拠として、図 4.12(b) に示すように最適形状の展開図を作成することができた。なお、初期形状は可展面ではないため、展開図を作成することはできない。すなわち、十分に多くの点で β_2 不変量を 0 に制約することにより、曲面全体でガウス曲率がほぼ 0 となる曲面が得られることが確認された。ガウス曲率を 0 に制約する点の個数は、理論的には多ければ多いほど厳密な可展面が得られるが、その反面最適解への収束性は低下する。ベジエ曲面の次数は制御点の数に依存するので、制御点の数より多く制約点を与えてやれば、本最適化のように曲面全体でガウス曲率の値をほぼ 0 に抑えることができる。この結果を踏まえ、以降の最適化においても、可展条件として導入する β 不変量制約は、制御点の個数を上回る数を曲面全体に格子状に導入することとする。

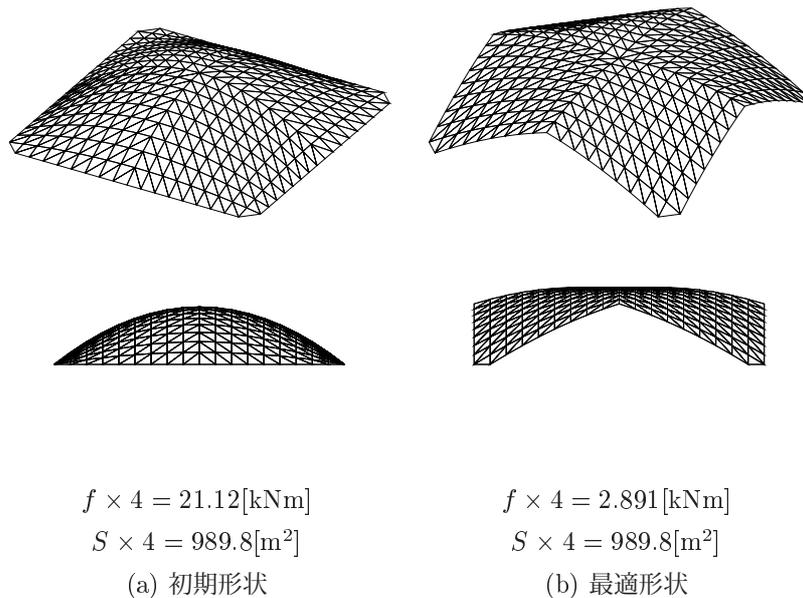


図 4.7 形状図

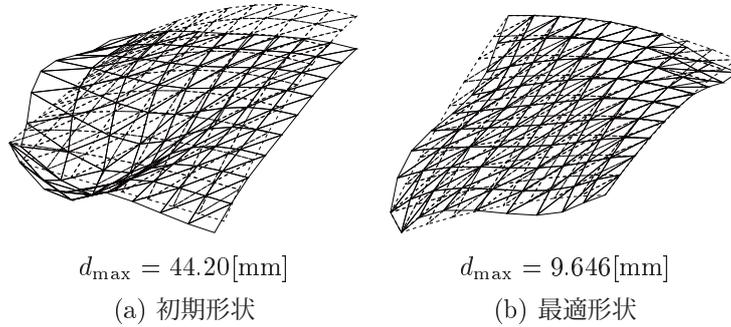
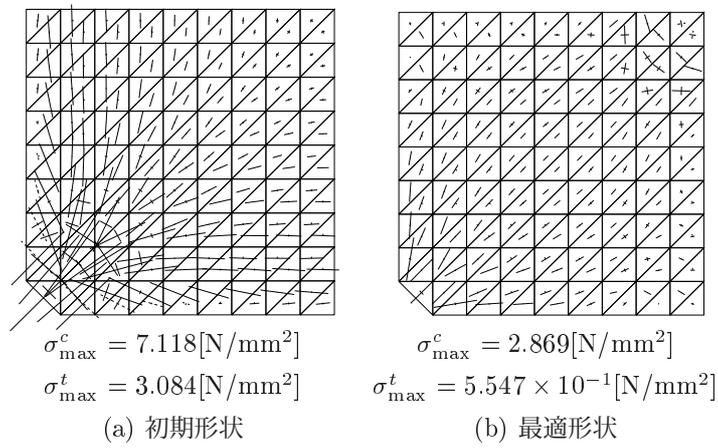
図 4.8 変形図 ($\times 100$)

図 4.9 膜応力分布図

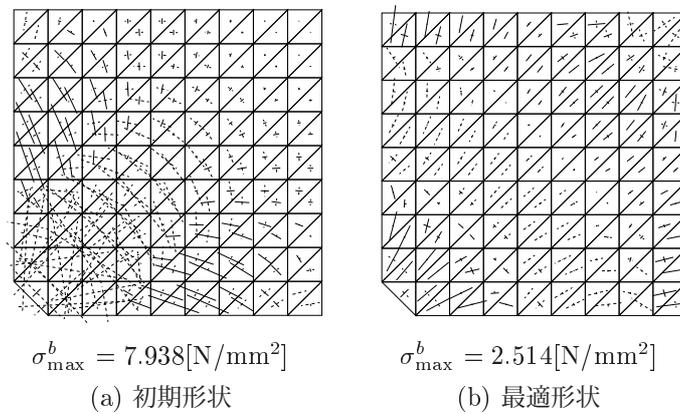


図 4.10 曲げ応力分布図

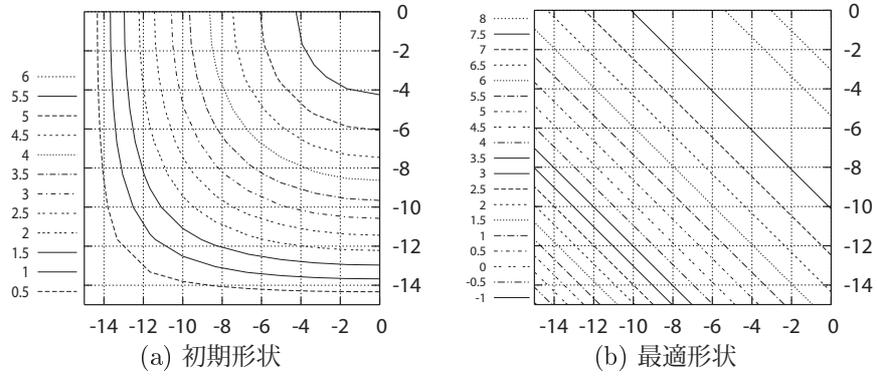
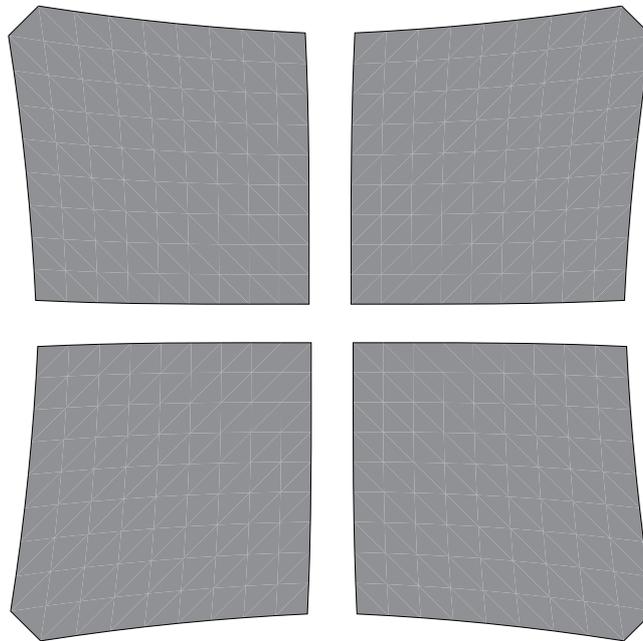


図 4.11 z 座標に関する等高線図

展開図作成不可

(a) 初期形状



(b) 最適形状

図 4.12 展開図

4.4 三角形ベジエパッチの連結により形状記述される異形平面を有するシェル1

4.4.1 最適化モデル

2つ目の最適化モデルは、図に示すような三角形平面を複数組み合わせた異形平面を有するシェル構造物とする。ここで、支持条件は端部すべてをピン支持とし、平面形状で鋭角となっている頂点3つを固定支持とする。初期形状は次のような双2次関数で与える。

$$z = h(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) \quad (4.3)$$

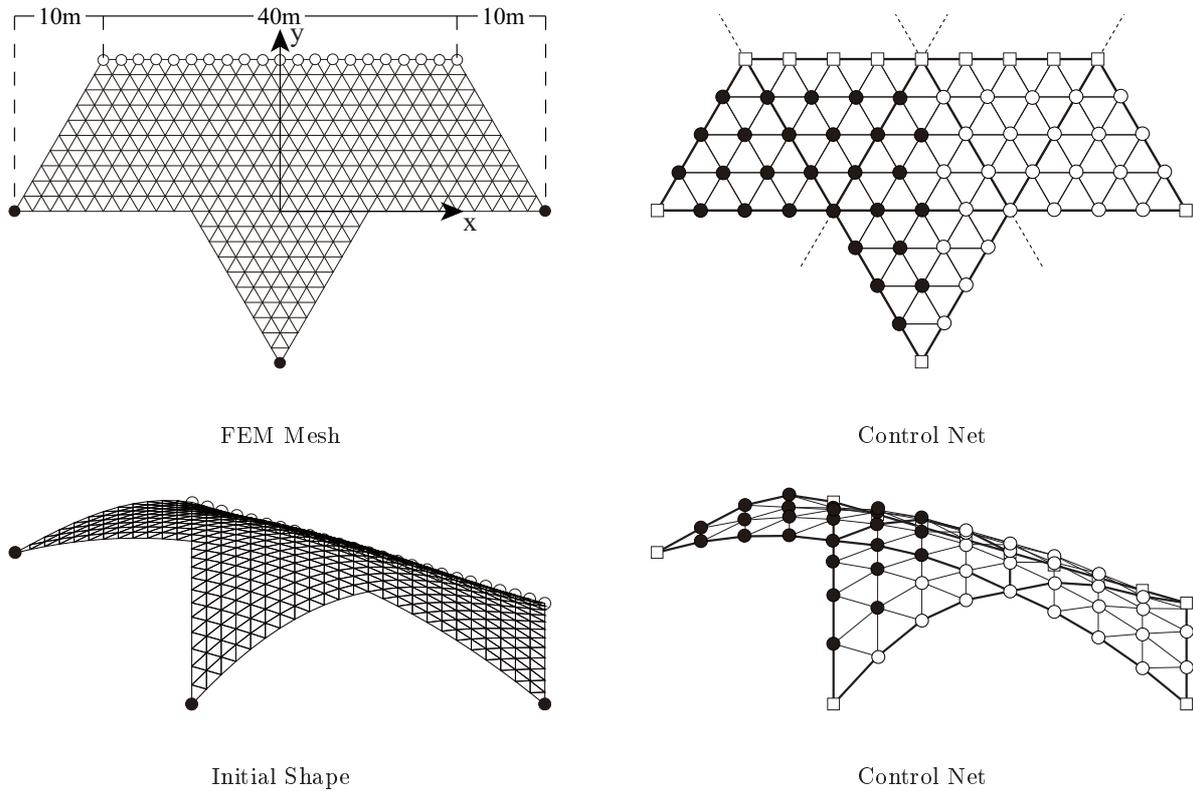


図 4.13 最適化モデル 2

ここで、支点を含む平面の中央を座標の原点とし、スパン 60m, ライズ 8m ($a = 30, b = 10\sqrt{3}, h = 6/a^2b^2$) とする。形状記述は三角形パッチベジエ曲面によりおこなう。ただし、6つのベジエパッチを連結させて全体の曲面形状を表現することとし、各ベジエパッチにおいて制御点は曲面の $1/6$ 領域に 5×5 の格子状に配置する。各ベジエパッチは隣り合う辺上の制御点を共有する。最適化の際の設計変数は、支持点を不動とするために支持点上の制御点を除いた、 $1/2$ 領域の制御点 (図の黒点) の z 座標 q_z とする。残りの制御点是对称性を考慮して生成する。そのため、設計変数の個数は 28 である。ここで、ベジエパッチは $1/6$ 領域で閉じているため、境界面においては曲面の曲率の連続性は必ずしも保たれない。弾性解析はフルモデル解析とし、要素分割は 864 要素とする。外力、材料定数、断面形状などは、4.1 節の最後に示した通りである。

4.4.2 例題 1：代数不変量制約を与えない場合

最適化概要

次の最適化問題を考える。

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f(\mathbf{q}_z) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \\ \text{subject to} \quad & S(\mathbf{q}_z) - S_0 \leq 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

この最適化問題は、支持点を不動とし、シェル中央面の面積を初期形状の値以下とする制約条件のもとでひずみエネルギーを最小化する問題である。支持点の不動条件はあらかじめ設計変数を選好することで考慮されている。なお、最適化モデルはシェル厚を一樣としているため、面積制約は体積制約と同義であり、極めてライズの大きい非現実的な形状が得られることを防ぎ、さらに、設計変数の許容領域を限定して解の収束性を高めるとともに、材料コストを抑えるという意味で経済的指標の役割も果たす。

最適化結果と考察

最適性条件を満足し、最適化は終了した。本手法により得られた最適解曲面の形状を図 4.14(b) に示す。また、比較の対象として、初期解曲面の形状を図 4.14(a) に示す。各図で上段にアイソメトリック図を、中断および下段には立面図をそれぞれ示す。

また、初期形状および最適形状の、自重作用時の弾性変形の様子を図 4.15(a),(b) にそれぞれ示す。

また、初期形状および最適形状のシェル中央面の膜応力、および曲げモーメントによる縁応力の分布図を図 4.16(a),(b) および図 4.17(a),(b) にそれぞれ示す。

図 4.14 を見ると、1/6 領域ごとのベジエパッチの連結により形状表現をおこなった最適解は、曲面上におけるベジエパッチのつなぎ目部分の曲率の連続性は保証されないが、十分滑らかな曲面形状を有していることがわかる。3 つの固定支持点間のライズはカテナリー状に上昇しており、ひずみエネルギーの値は初期形状からおおよそ 89 % 低減されている。

図 4.15 を見ると、最適形状の自重作用時の変位は、初期形状に比べ大幅に低減されていることがわかる。最大鉛直変位は初期形状からおおよそ 89 % 低減されており、剛性が飛躍的に上昇している。

図 4.16 および図 4.17 を見ると、最適化をおこなうことで曲げ応力が非常に小さくなっていることが確認できる。初期形状においてピン支持とした辺の端部に生じていた引張力は、最適形状において消失しており、代わりにシェル内部に一樣に圧縮力が生じ、それらは固定支持とした 3 つの節点に向かって増大しながら滑らかに流れるように効率的に分布している。

以上、シェル形状、力学性状ともに、問題 (3.49) において得られたような圧縮抵抗型の力学的メカニズムを有する最適形状が得られた。したがって、このような異形平面を有するシェルに対して、ベジエパッチを 1/6 領域で区分的に分割し、対称性を考慮して設計変数を減らした場合でも、十分に優れた力学性能を有する最適形状が得られることが確認された。

以降、本最適化結果をもとにして、式 (4.4) に可展条件制約の導入を試みる。

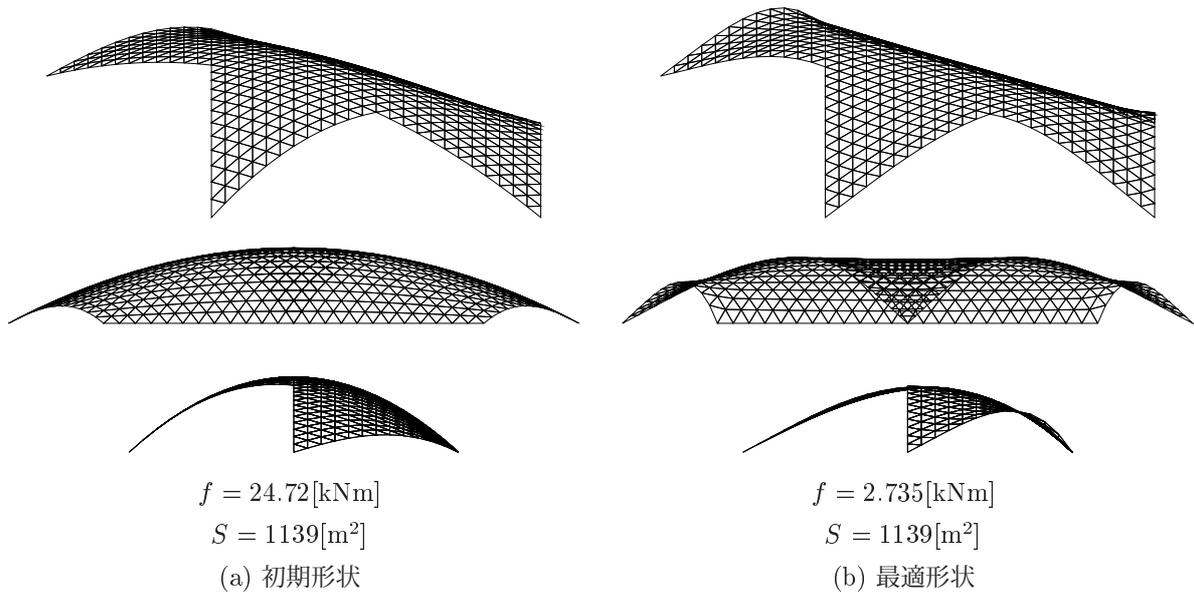


図 4.14 形状図

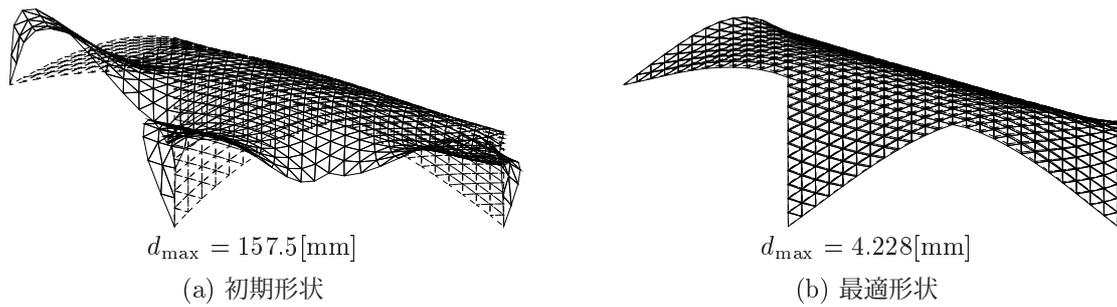
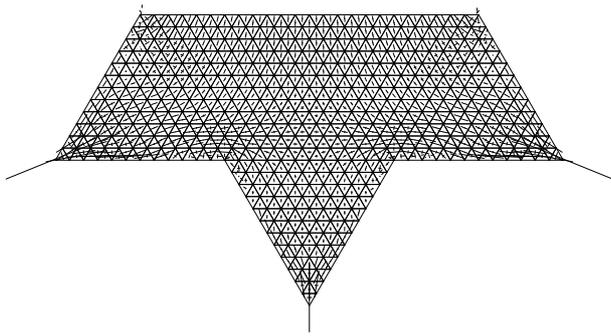


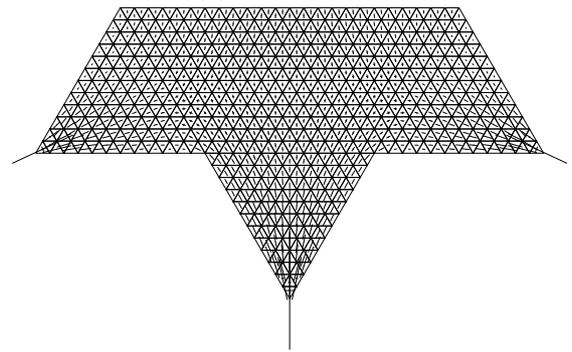
図 4.15 変形図 (×50)



$$\sigma_{\max}^c = 14.47[\text{N}/\text{mm}^2]$$

$$\sigma_{\max}^t = 4.337[\text{N}/\text{mm}^2]$$

(a) 初期形状

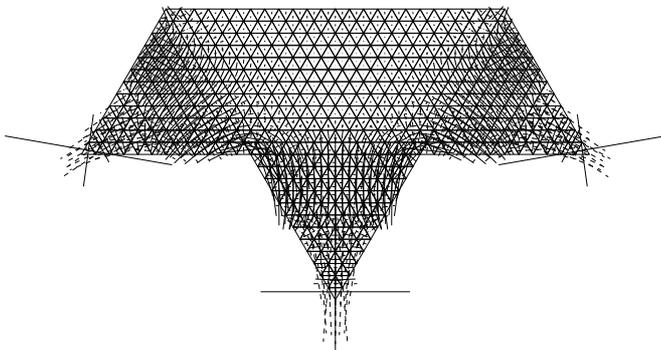


$$\sigma_{\max}^c = 14.10[\text{N}/\text{mm}^2]$$

$$\sigma_{\max}^t = 4.112 \times 10^{-1}[\text{N}/\text{mm}^2]$$

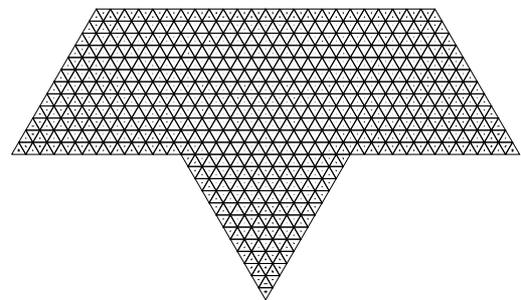
(b) 最適形状

図 4.16 膜応力分布図



$$\sigma_{\max}^b = 23.98[\text{N}/\text{mm}^2]$$

(a) 初期形状



$$\sigma_{\max}^b = 4.279 \times 10^{-1}[\text{N}/\text{mm}^2]$$

(b) 最適形状

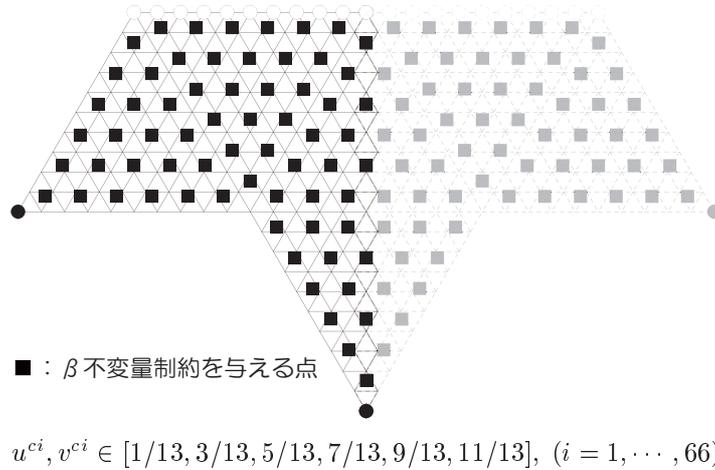
図 4.17 曲げ応力分布図

4.4.3 例題2：可展条件を導入する場合

最適化概要

次の最適化問題を考える。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(\mathbf{q}_z) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \\ & \text{subject to} && \begin{cases} S(\mathbf{q}_z) - S_0 \leq 0 \\ \beta_2^{ci}(\mathbf{q}_z) = 0 \\ (i=1, \dots, 66) \end{cases} \end{aligned} \quad (4.5)$$



この最適化問題は、問題 (4.4) に加えて、曲面の $1/6$ 領域がそれぞれ可展面となるような β 不変量制約を導入している。

最適化結果と考察

最適性条件を満足し、最適化は終了した。本手法により得られた最適解曲面の形状を図 4.18(b) に示す。また、比較の対象として、初期解曲面の形状を図 4.18(a) に示す。各図で上方にアイソメトリック図を、下方には立面図をそれぞれ示す。

また、初期形状および最適形状の、自重作用時の弾性変形の様子を図 4.19(a),(b) にそれぞれ示す。

また、初期形状および最適形状のシェル中央面の膜応力、および曲げモーメントによる縁応力の分布図を図 4.20(a),(b) および図 4.21(a),(b) にそれぞれ示す。

また、初期形状および最適形状の鉛直方向座標に関する等高線図を図 4.22(a),(b) にそれぞれ示す。

最後に、曲面形状の 3 次元データから、初期形状および最適形状について、展開図が作成可能な場合には、図 4.23 にその展開図を示した。

図 4.18 を見ると、最適解は、問題 (4.4) の最適解と同様に、固定支持点間のライズが上昇し、ひずみエネルギーは初期解から大幅に低減されていることが確認できる。

図 4.19 を見ると、最適形状の自重作用時の変位は、単一にひずみエネルギーを減少させた問題 (4.4) の最適解には及ばないものの、初期形状に比べ大幅に低減されていることがわかる。最大鉛直変位は初期形状からおよそ 78 % 低減されており、剛性が大きく上昇していることが数値的にも見てとれる。

図 4.20 および図 4.21 を見ると、初期形状と比べて最適形状は曲げ応力が非常に小さくなっており、これまでの最適化モデルにおける結果と同様に全体として膜応力によって外力に対し抵抗する力学的メカニズムに変化している。

最適化モデル1における可展面は、ひずみエネルギー最小解と比べ剛性のはっきりとした低下がみられたが、本モデルにおいては、可展条件制約という厳しい制約条件下においても、問題(4.4)の最適解とほぼ同様の力学性状を示す解が得られることが確認された。これは、区分領域の分割を三角形とした方が可展面を容易に形成でき、形状表現の自由度が高いためと考えられる。これを踏まえ、以降の最適化モデルでは、区分領域は三角形に分割することとする。

β_2 不変量は、制約を与えた点において0となっているだけで、その他の点において0となる保証はない。しかしながら、図4.20を見ると、等高線は概ね平行な直線となっており、可展面が実現できていることがうかがえる。実際、図4.23(b)のように、最適形状においては展開図を作成することができた。なお、初期形状は可展面ではないため、展開図を作成することはできない。先ほどのモデルと同様、十分に多くの点で β_2 不変量を0に制約することにより、曲面全体でガウス曲率がほぼ0となる曲面が得られることが確認された。

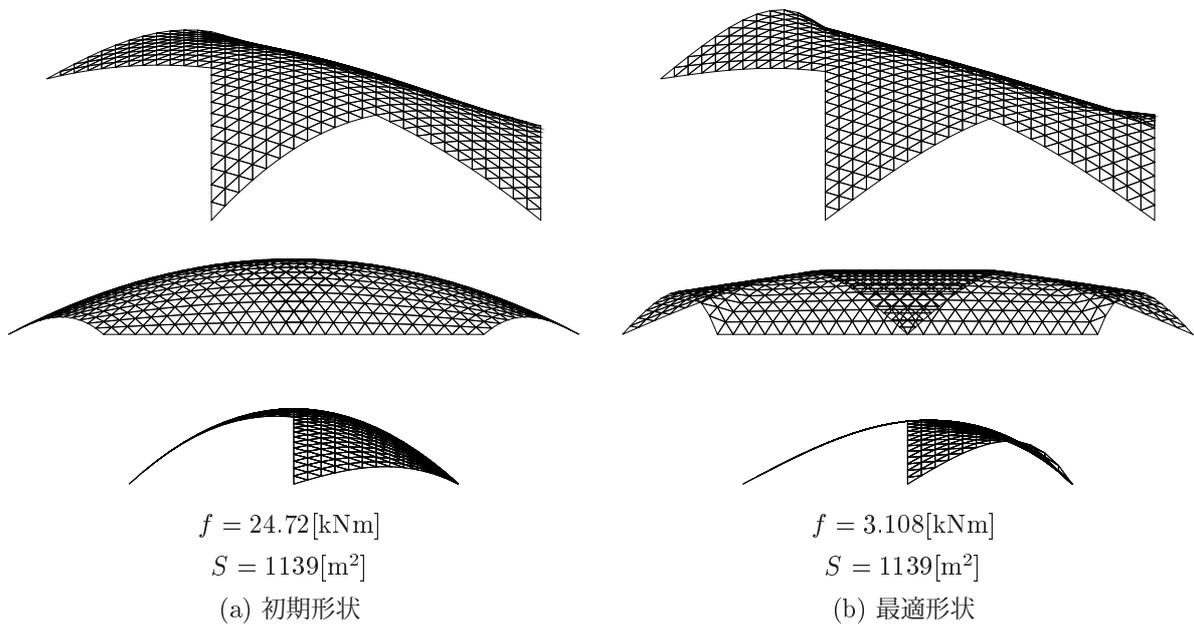


図 4.18 形状図

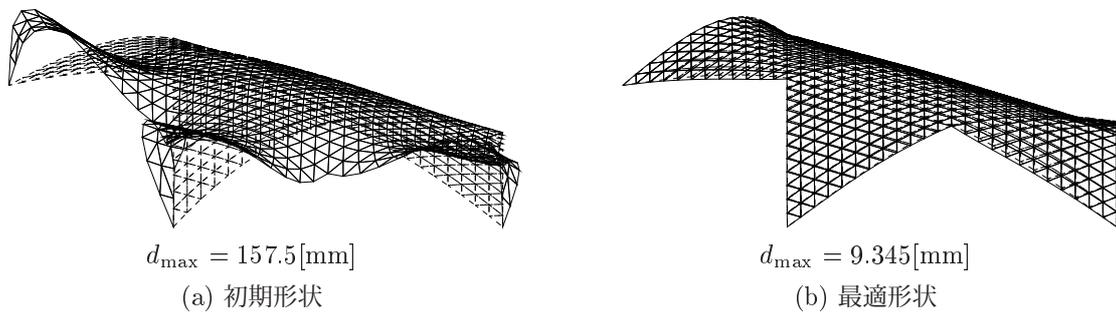
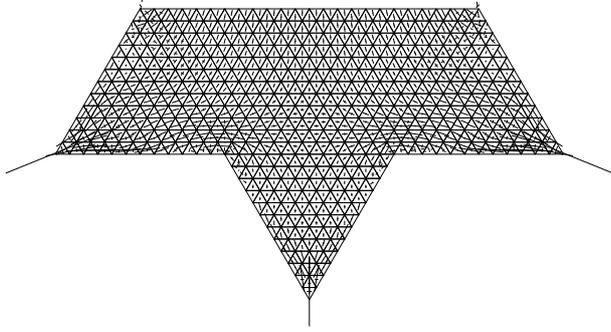


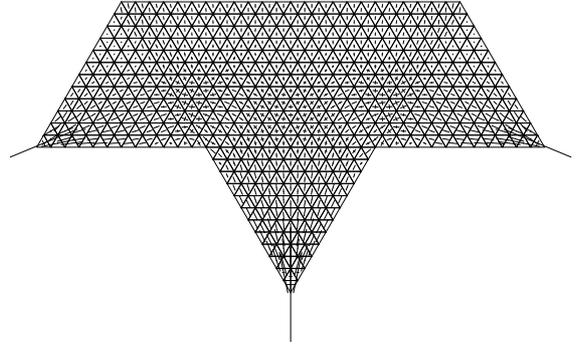
図 4.19 変形図 (×50)



$$\sigma_{\max}^c = 14.47[\text{N}/\text{mm}^2]$$

$$\sigma_{\max}^t = 4.337[\text{N}/\text{mm}^2]$$

(a) 初期形状

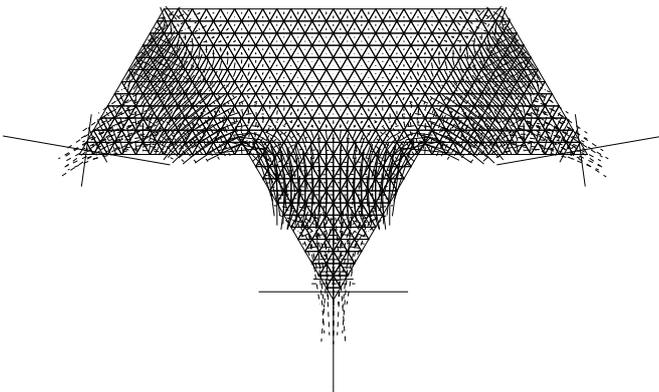


$$\sigma_{\max}^c = 13.62[\text{N}/\text{mm}^2]$$

$$\sigma_{\max}^t = 5.764 \times 10^{-1}[\text{N}/\text{mm}^2]$$

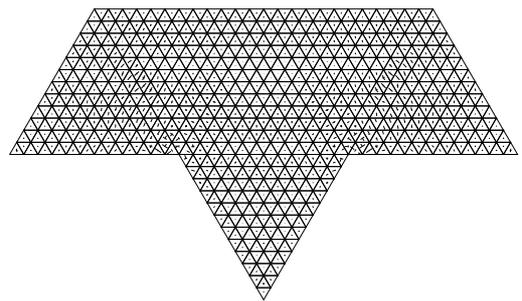
(b) 最適形状

図 4.20 膜応力分布図



$$\sigma_{\max}^b = 23.98[\text{N}/\text{mm}^2]$$

(a) 初期形状



$$\sigma_{\max}^b = 1.657[\text{N}/\text{mm}^2]$$

(b) 最適形状

図 4.21 曲げ応力分布図

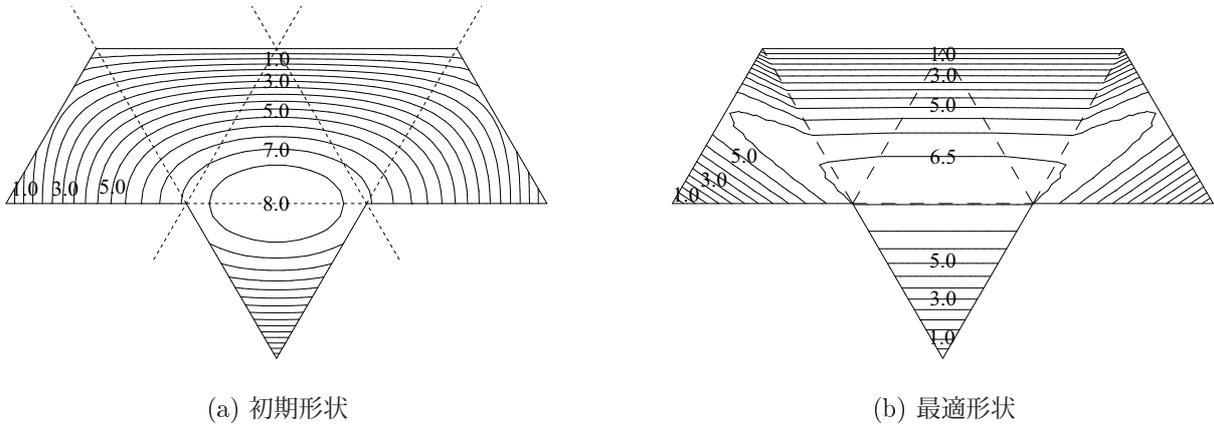


図 4.22 z 座標に関する等高線図

展開図作成不可

(a) 初期形状

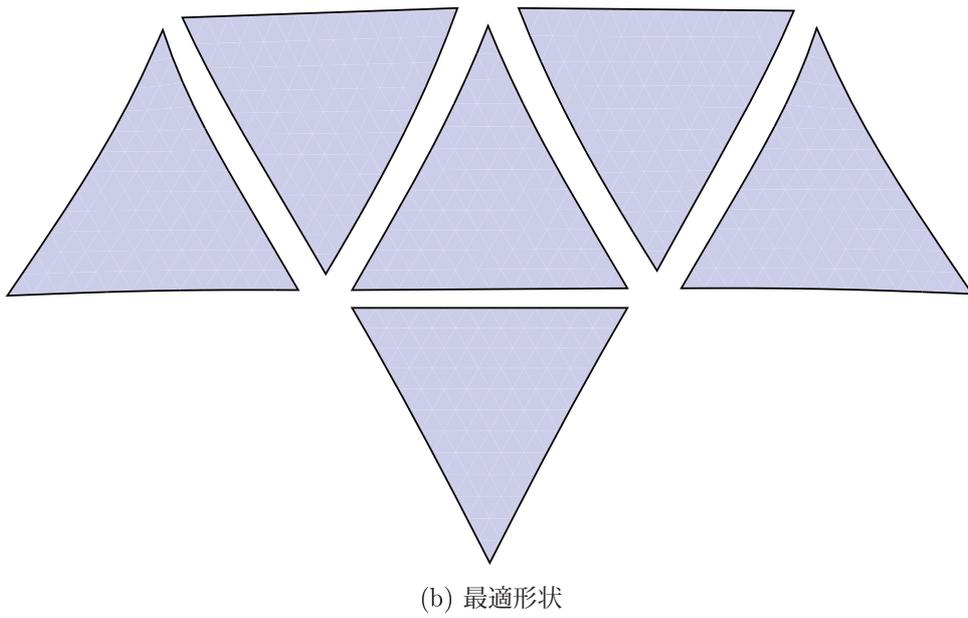


図 4.23 展開図

4.5 三角形ベジエパッチの連結により形状記述される異形平面を有するシェル2

4.5.1 最適化モデル

3つ目の最適化モデルは、図に示すような三角形平面を複数組み合わせた異形平面を有するシェル構造物とする。ここで、支持条件は図に黒点で示した3ヶ所を固定支持とする。初期形状は次のような双2次関数で与える。

$$z = h(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) \quad (4.6)$$

ここで、支点を含む平面の中央を座標の原点とし、スパン60m、ライズ8m ($a = 30, b = 10\sqrt{3}, h = 6/a^2b^2$) とする。形状記述は三角形パッチベジエ曲面によりおこなう。ただし、5個のベジエパッチを連結させて全体の1/2の曲面形状を表現することとし、各ベジエパッチにおいて制御点は曲面の1/5領域に5×5の格子状に配置する。各ベジエパッチは隣り合う辺上の制御点を共有する。最適化の際の設計変数は、支持点を不動とするために支持点上の制御点を除き、対称性を考慮し、1/2領域の制御点(図の黒点)のz座標 q_z とする。残りの制御点是对称性を考慮して生成する。そのため、設計変数の個数は52である。ここで、ベジエパッチは1/5領域で閉じているため、境界面においては曲面の曲率の連続性は必ずしも保たれない。弾性解析についても対称性を考慮し1/2の部分弾性解析の対象とし、対称面での法線方向の変位を全てゼロ、さらに対称面の面外への回転をゼロとする。要素分割は720要素とする。外力、材料定数、断面形状などは、4.1節の最後に示した通りである。

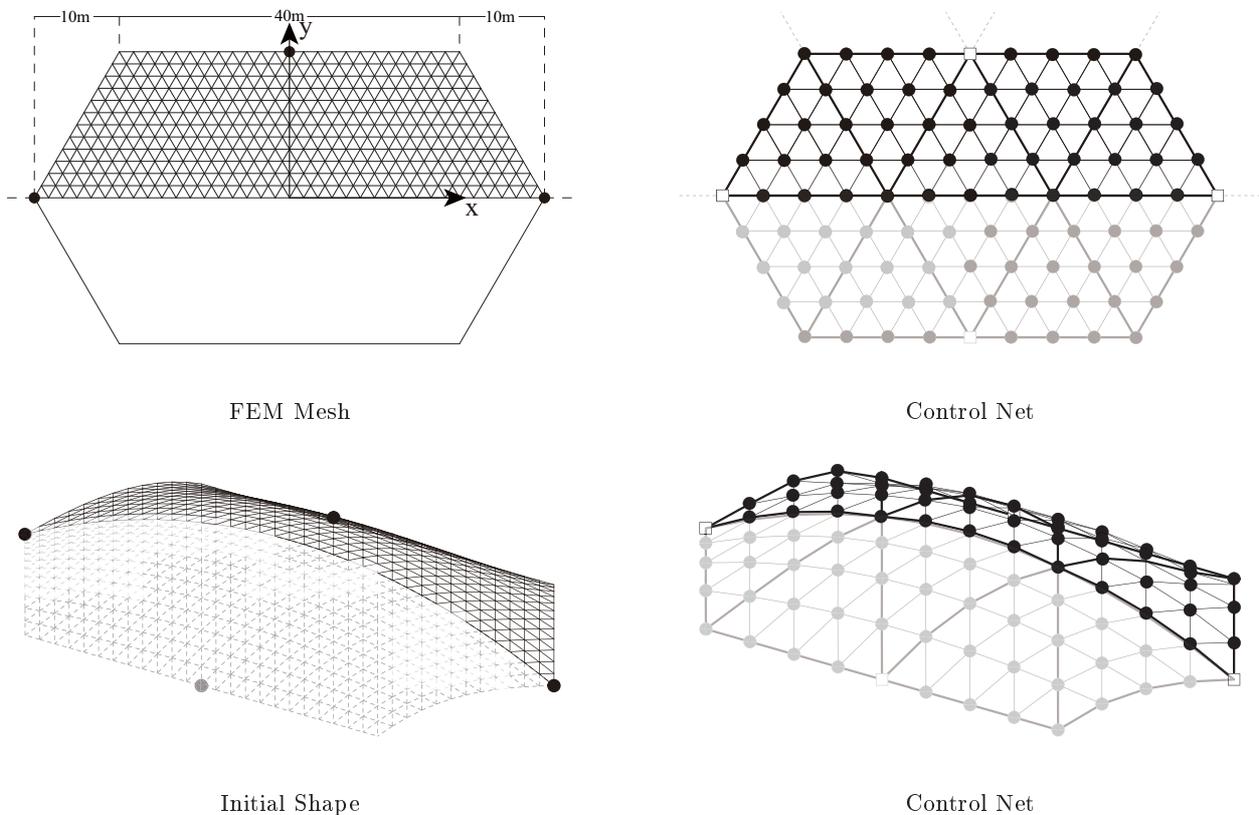


図 4.24 最適化モデル 2

4.5.2 例題 1：代数不変量制約を与えない場合

最適化概要

次の最適化問題を考える。

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f(\mathbf{q}_z) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \\ \text{subject to} \quad & S(\mathbf{q}_z) - S_0 \leq 0 \end{aligned} \quad (4.7)$$

この最適化問題は、支持点を不動とし、シェル中央面の面積を初期形状の値以下とする制約条件のもとでひずみエネルギーを最小化する問題である。支持点の不動条件はあらかじめ設計変数を選好することで考慮されている。なお、最適化モデルはシェル厚を一樣としているため、面積制約は体積制約と同義であり、極めてライズの大きい非現実的な形状が得られることを防ぎ、さらに、設計変数の許容領域を限定して解の収束性を高めるとともに、材料コストを抑えるという意味で経済的指標の役割も果たす。

最適化結果と考察

最適性条件を満足し、最適化は終了した。本手法により得られた最適解曲面の形状を図 4.25(b) に示す。また、比較の対象として、初期解曲面の形状を図 4.25(a) に示す。各図で上方にアイソメトリック図を、下方には立面図をそれぞれ示す。また、弾性解析は対称性を考慮し、1/2 部分を対象としたため、目的関数および制約条件関数の値は 1/2 部分での値であるため、それぞれを 2 倍した値を図中に記した。

また、初期形状および最適形状の、自重作用時の弾性変形の様子を図 4.26(a),(b) にそれぞれ示す。

また、初期形状および最適形状のシェル中央面の膜応力、および曲げモーメントによる縁応力の分布図を図 4.27(a),(b) および図 4.28(a),(b) にそれぞれ示す。

図 4.25 を見ると、1/5 領域ごとのベジエパッチの連結により形状表現をおこなった最適解は、曲面上におけるベジエパッチのつなぎ目部分の曲率の連続性は保証されないが、十分滑らかな曲面形状を有していることがわかる。支持点間のライズはカタナリー状に上昇しており、ひずみエネルギーの値は初期形状からおよそ 79 % 低減されている。

図 4.26 を見ると、最適形状の自重作用時の変位は、初期形状に比べ大幅に低減されていることがわかる。最大鉛直変位は初期形状からおよそ 92 % 低減されており、剛性が飛躍的に上昇している。

図 4.27 および図 4.28 を見ると、最適化をおこなうことで曲げ応力が非常に小さくなっていることが確認できる。初期形状において支持部が負担していた曲げ応力が抑制される代わりに、全体として膜応力によって外力に対し抵抗する力学的メカニズムに変化している。また、初期形状において辺の中央にある支持点の周りに生じていた引張力は、最適形状では消失し、その代わりにシェル全面に圧縮力が生じ、それらは支持点に向かって滑らかに流れるように効率的に分布している。

以上、シェル形状、力学性状ともに、問題 (3.49) において得られたような圧縮抵抗型の力学的メカニズムを有する最適形状が得られた。したがって、ベジエパッチを 1/5 領域で区分的に分割した場合でも、十分に優れた力学性能を有する最適形状が得られることが確認された。

以降、本最適化結果をもとにして、式 (4.7) に可展条件制約の導入を試みる。

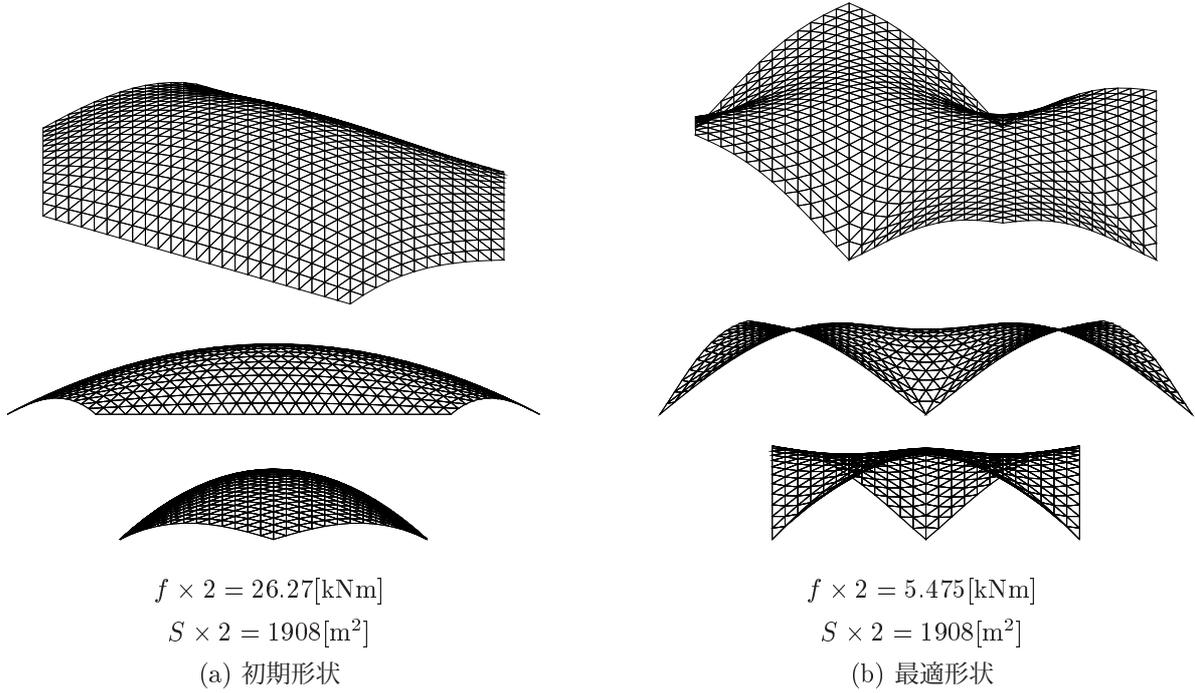


図 4.25 形状図

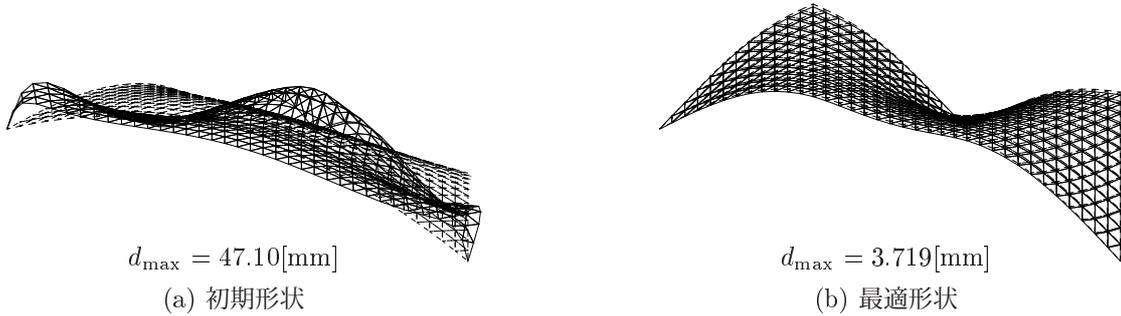


図 4.26 変形図 ($\times 100$)

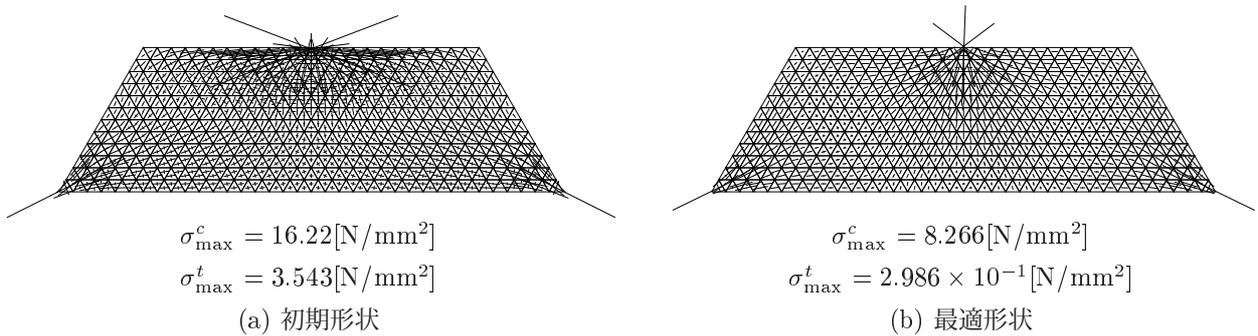


図 4.27 膜応力分布図

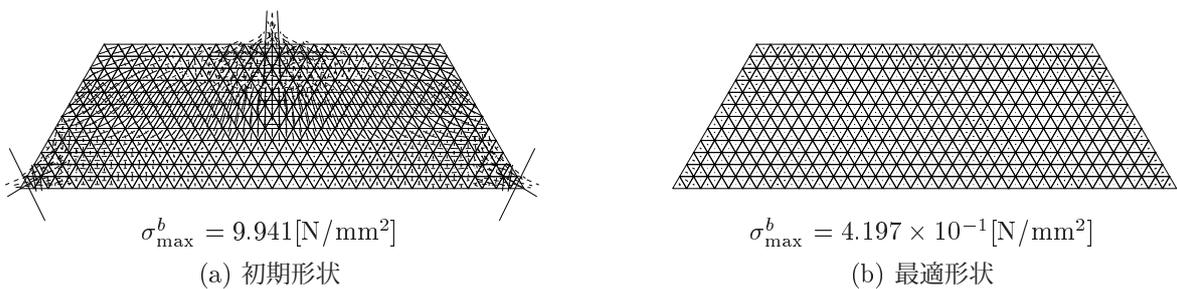


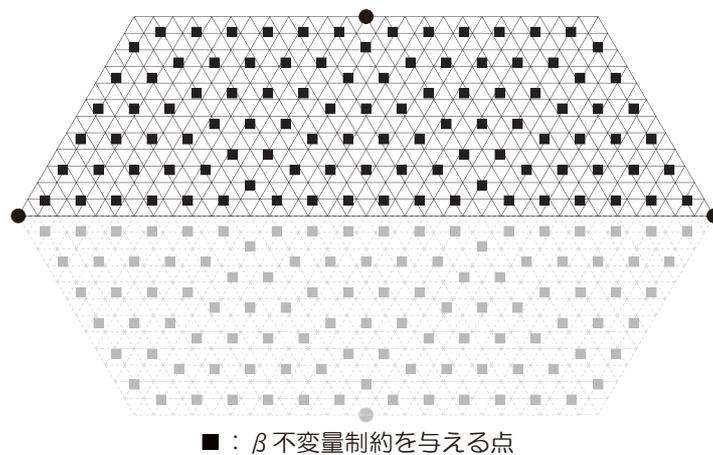
図 4.28 曲げ応力分布図

4.5.3 例題 2：可展条件を導入する場合

最適化概要

次の最適化問題を考える。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(\mathbf{q}_z) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \\ & \text{subject to} && \begin{cases} S(\mathbf{q}_z) - S_0 \leq 0 \\ \beta_2^i(\mathbf{q}_z) = 0 \\ (i=1, \dots, 21 \times 5) \end{cases} \end{aligned} \quad (4.8)$$



$$u^{ci}, v^{ci} \in [1/13, 3/13, 5/13, 7/13, 9/13, 11/13], (i = 1, \dots, 21 \times 5)$$

この最適化問題は、問題 (4.7) に加えて、曲面の 1/6 領域がそれぞれ可展面となるような β 不変量制約を導入している。

最適化結果と考察

最適性条件を満足し、最適化は終了した。本手法により得られた最適解曲面の形状を図 4.29(b) に示す。また、比較の対象として、初期解曲面の形状を図 4.29(a) に示す。各図で上方にアイソメトリック図を、下方には立面図をそれぞれ示す。また、弾性解析は対称性を考慮し、1/2 部分を対象としたため、目的関数および制約条件関数の値は 1/2 部分での値であるため、それぞれを 2 倍した値を図中に記した。

また、初期形状および最適形状の、自重作用時の弾性変形の様子を図 4.30(a),(b) にそれぞれ示す。

また、初期形状および最適形状のシェル中央面の膜応力、および曲げモーメントによる縁応力の分布図を図 4.31(a),(b) および図 4.32(a),(b) にそれぞれ示す。

また、初期形状および最適形状の鉛直方向座標に関する等高線図を図 4.33(a),(b) にそれぞれ示す。

最後に、曲面形状の 3 次元データから、初期形状および最適形状について、展開図が作成可能な場合には、図 4.34 にその展開図を示した。

図 4.29 を見ると、最適解は、問題 (4.4) の最適解と同様に、支持点間のライズが上昇し、ひずみエネルギーは初期解からおおよそ 86 % 低減できていることがわかる。

図 4.30 を見ると、最適形状の自重作用時の変位は、単一にひずみエネルギーを減少させた問題 (4.7) の最適解に匹敵するほど小さく、初期形状に比べ大幅に低減されていることがわかる。最大鉛直変位は初期形状からおおよそ 90 % 低減されており、剛性が上昇している。

図 4.31 および図 4.32 を見ると、初期形状と比べて最適形状は曲げ応力が非常に小さくなっており、全体として膜応力によって外力に対し抵抗する力学的メカニズムに変化している。曲げ応力、膜応力分布ともに問題 (4.7) の最適解と類似した傾向にある。可展条件制約という厳しい制約条件下においても、問題 (4.7) の最適解とほぼ同様の力学性状を示していることが確認された。

β_2 不変量は、制約を与えた点において 0 となっているだけで、その他の点において 0 となる保証はない。しかしながら、図 4.31 を見ると、等高線は概ね直線となっており、可展面が実現できていることがうかがえる。実際、図 4.34(b) のように、最適形状においては展開図を作成することができた。なお、初期形状は可展面ではないため、展開図を作成することはできない。さきほどのモデルと同様、十分に多くの点で β_2 不変量を 0 に制約することにより、曲面全体でガウス曲率がほぼ 0 となる曲面が得られることが確認された。

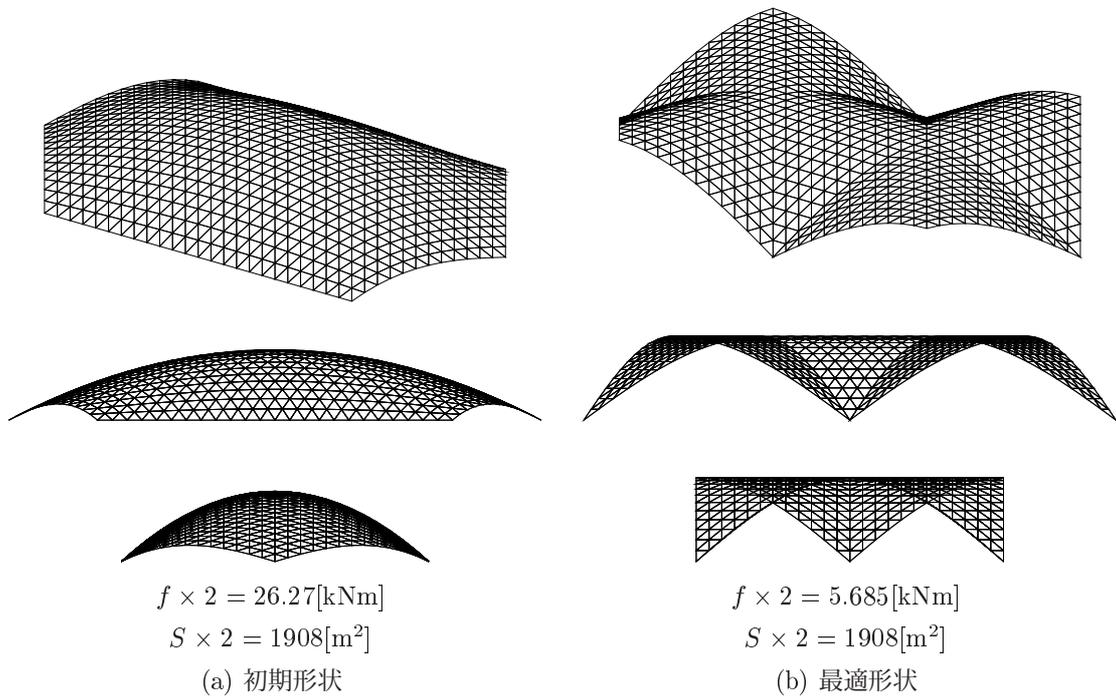
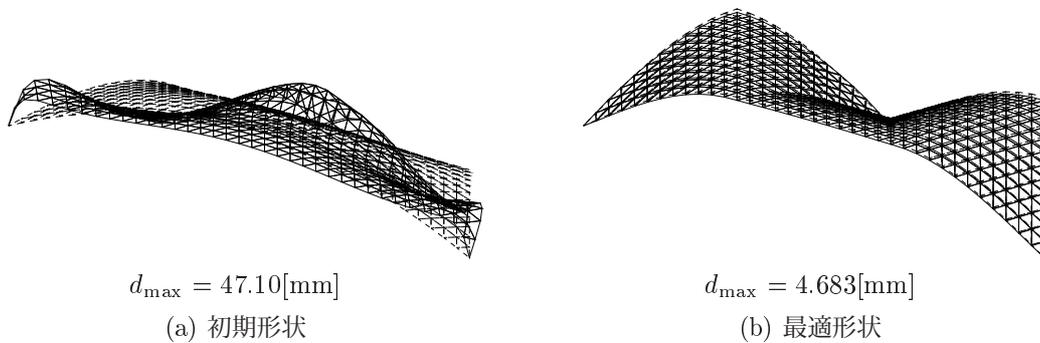


図 4.29 形状図

図 4.30 変形図 ($\times 100$)

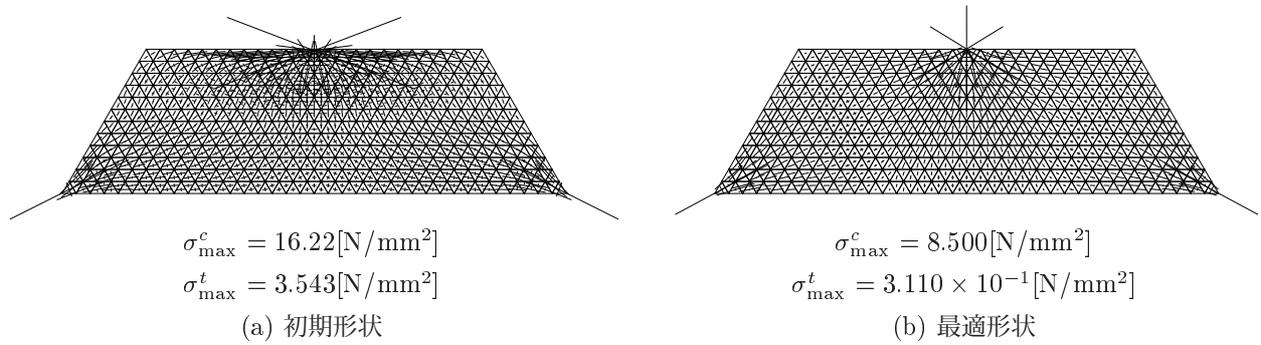


図 4.31 膜応力分布図

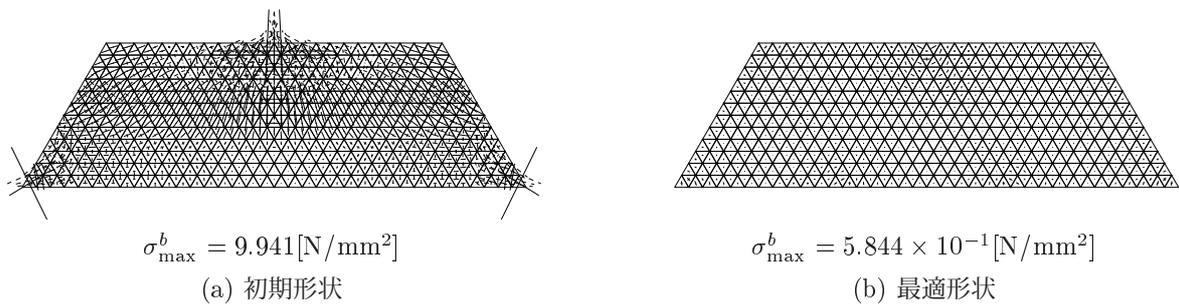


図 4.32 曲げ応力分布図

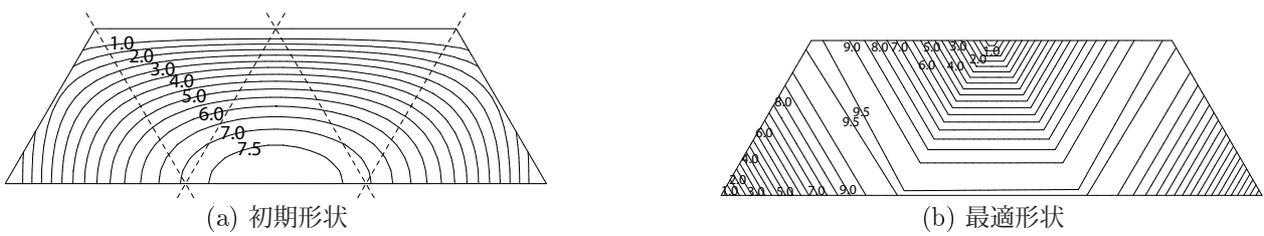
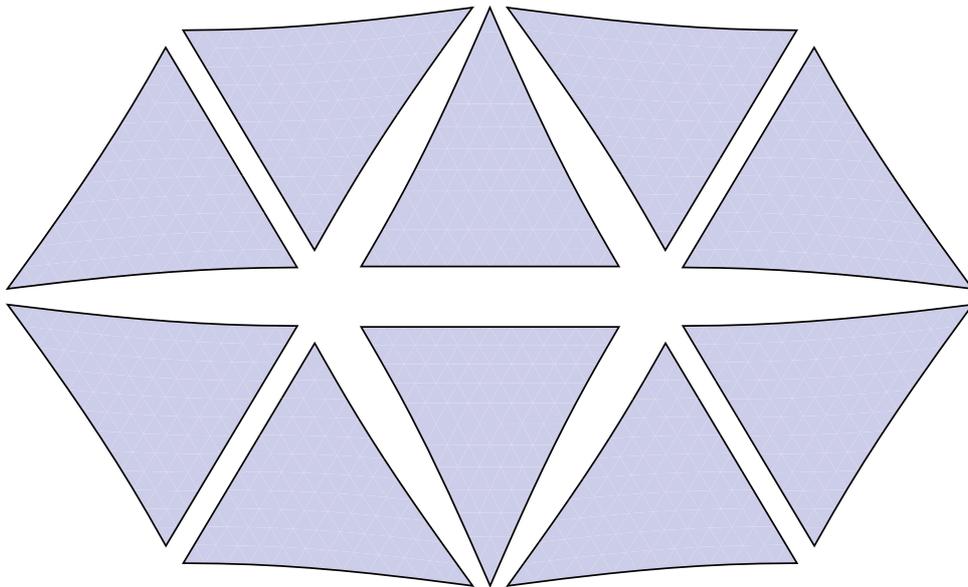


図 4.33 z 座標に関する等高線図

展開図作成不可

(a) 初期形状



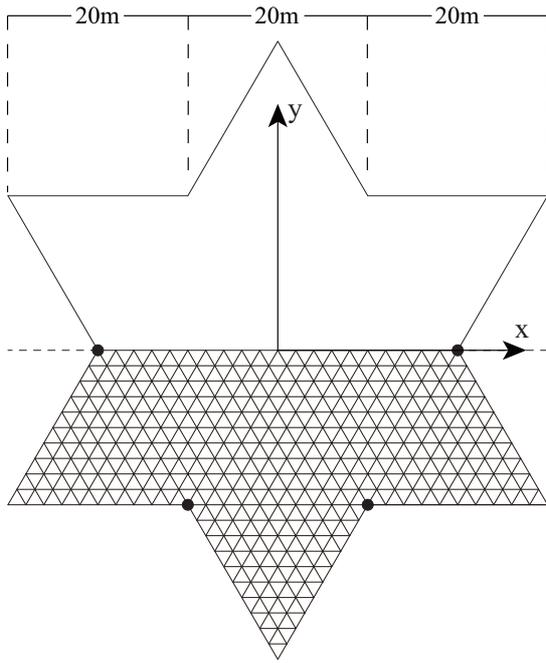
(b) 最適形状

図 4.34 展開図

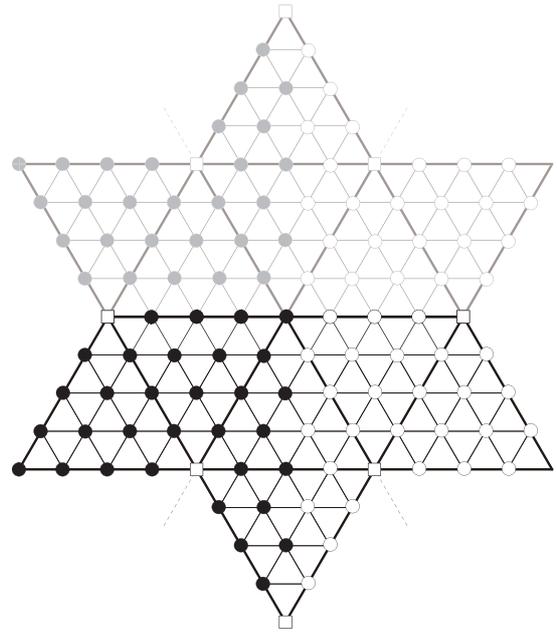
4.6 三角形ベジエパッチの連結により形状記述される異形平面を有するシェル 3

4.6.1 最適化モデル

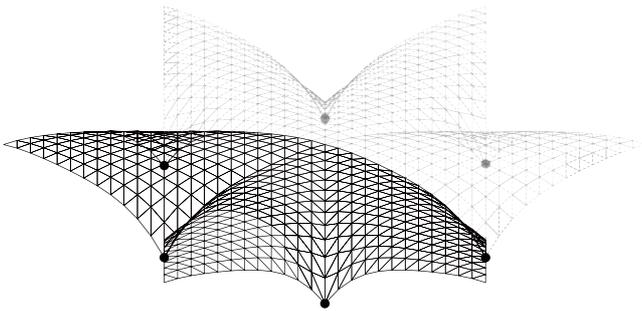
4つ目の最適化モデルは、図に示すような三角形平面を複数組み合わせた異形平面を有するシェル構造物とする。ここで、支持条件は平面形状で鈍角となっている頂点を固定支持とする。初期形状は円筒シェルを6つ組み合わせた形状とする。ここで、各円筒シェルの曲率半径は10.5mとした。形状記述は三角形パッチベジエ曲面によりおこなう。ただし、6個のベジエパッチを連結させて全体の1/2の曲面形状を表現することとし、各ベジエパッチにおいて制御点は曲面の1/6領域に5×5の格子状に配置する。各ベジエパッチは隣り合う辺上の制御点を共有する。最適化の際の設計変数は、支持点を不動とするために支持点上の制御点を除き、かつ対称性を考慮し1/4領域の制御点(図の黒点)の z 座標 q_z とする。残りの制御点は対称性を考慮して生成する。そのため、設計変数の個数は32である。ここで、ベジエパッチは1/6領域で閉じているため、境界面においては曲面の曲率の連続性は必ずしも保たれない。弾性解析については対称性を考慮し1/2の部分弾性解析の対象とし、対称面での法線方向の変位を全てゼロ、さらに対称面の面外への回転をゼロとする。要素分割は864要素とする。外力、材料定数、断面形状などは、4.1節の最後に示した通りである。



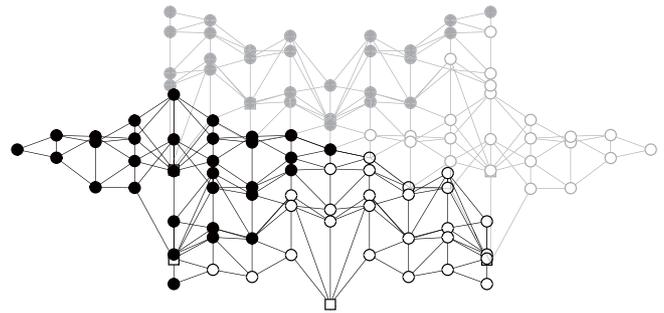
FEM Mesh



Control Net



Initial Shape



Control Net

図 4.35 最適化モデル 2

4.6.2 例題 1：代数不変量制約を与えない場合

最適化概要

次の最適化問題を考える。

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f(\mathbf{q}_z) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \\ \text{subject to} \quad & S(\mathbf{q}_z) - S_0 \leq 0 \end{aligned} \tag{4.9}$$

この最適化問題は、支持点を不動とし、シェル中央面の面積を初期形状の値以下とする制約条件のもとでひずみエネルギーを最小化する問題である。支持点の不動条件はあらかじめ設計変数を選好することで考慮されている。なお、最適化モデルはシェル厚を一樣としているため、面積制約は体積制約と同義であり、極めてライズの大きい非現実的な形状が得られることを防ぎ、さらに、設計変数の許容領域を限定して解の収束性を高めるとともに、材料コストを抑えるという意味で経済的指標の役割も果たす。

最適化結果と考察

最適性条件を満足し、最適化は終了した。本手法により得られた最適解曲面の形状を図 4.36(b) に示す。また、比較の対象として、初期解曲面の形状を図 4.36(a) に示す。各図で上方にアイソメトリック図を、下方には立面図をそれぞれ示す。また、弾性解析は対称性を考慮し、1/2 部分を対象としたため、目的関数および制約条件関数の値は 1/2 部分での値であるため、それぞれを 2 倍した値を図中に記した。

また、初期形状および最適形状の、自重作用時の弾性変形の様子を図 4.37(a),(b) にそれぞれ示す。

また、初期形状および最適形状のシェル中央面の膜応力、および曲げモーメントによる縁応力の分布図を図 4.38(a),(b) および図 4.39(a),(b) にそれぞれ示す。

図 4.36 を見ると、1/6 領域ごとのベジエパッチの連結により形状表現をおこなった最適解は、曲面上におけるベジエパッチのつなぎ目部分の曲率の連続性は保証されないが、十分滑らかな曲面形状を有していることがわかる。半円状に結ばれていた支持点間の形状は、カテナリーアーチへと変化し、ひずみエネルギーは初期形状からおよそ 90 % 低減されている。

図 4.37 を見ると、最適形状の自重作用時の変位は、初期形状に比べ大幅に低減されていることがわかる。最大鉛直変位は初期形状からおよそ 93 % 低減されており、剛性が飛躍的に上昇している。

図 4.38 および図 4.39 を見ると、最適化をおこなうことで曲げ応力が非常に小さくなっていることが確認できる。初期形状において支持部が負担していた曲げ応力が抑制される代わりに、全体として膜応力によって外力に対し抵抗する力学的メカニズムに変化している。また、初期形状において生じていた引張力は、最適形状において消失し、圧縮力が支配的となっている。

以上、シェル形状、力学性状ともに、問題 (3.49) において得られたような圧縮抵抗型の力学的メカニズムを有する最適形状が得られた。したがって、ベジエパッチを 1/6 領域で区分的に分割し、対称性を考慮して設計変数を減らした場合でも、十分に優れた力学性能を有する最適形状が得られることが確認された。

以降、本最適化結果をもとにして、式 (4.9) に可展条件制約の導入を試みる。

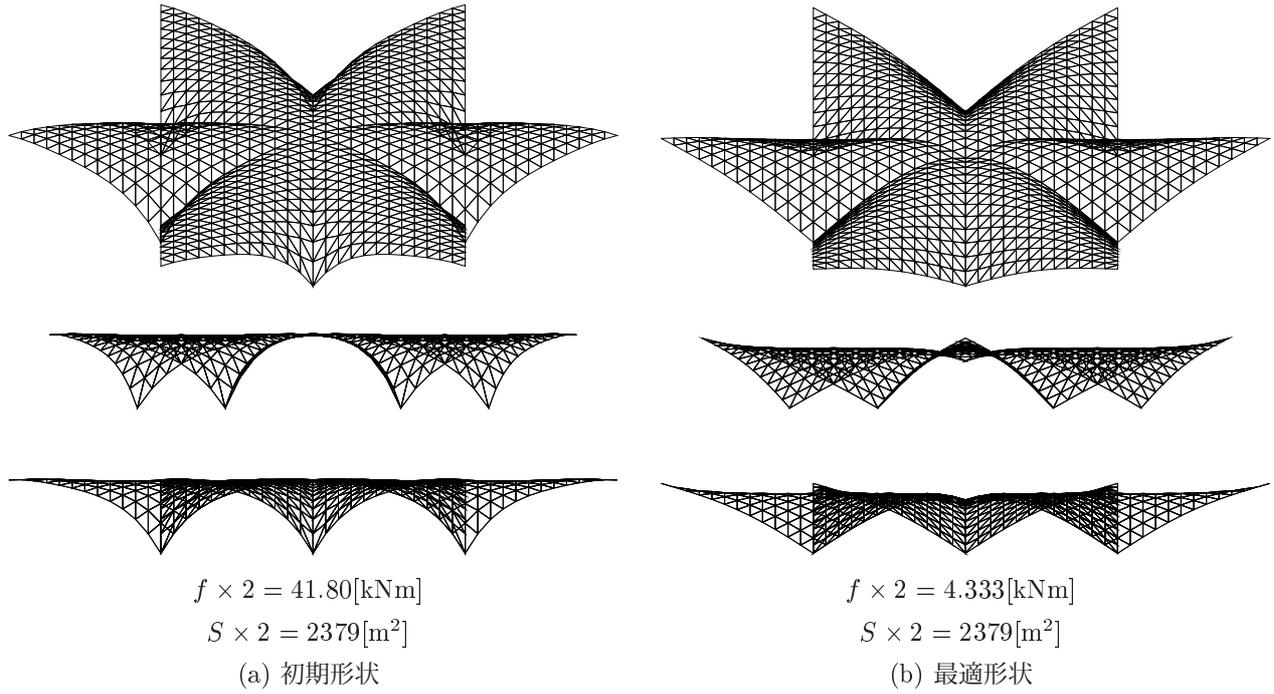


図 4.36 形状図

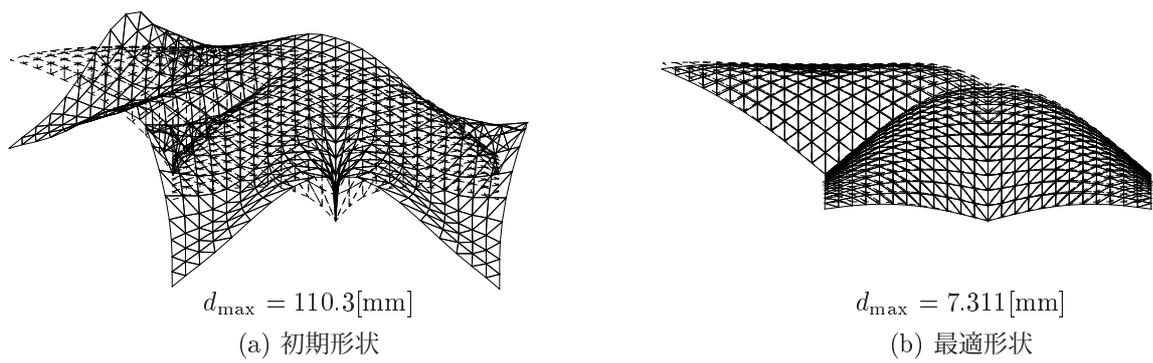


図 4.37 変形図 ($\times 100$)

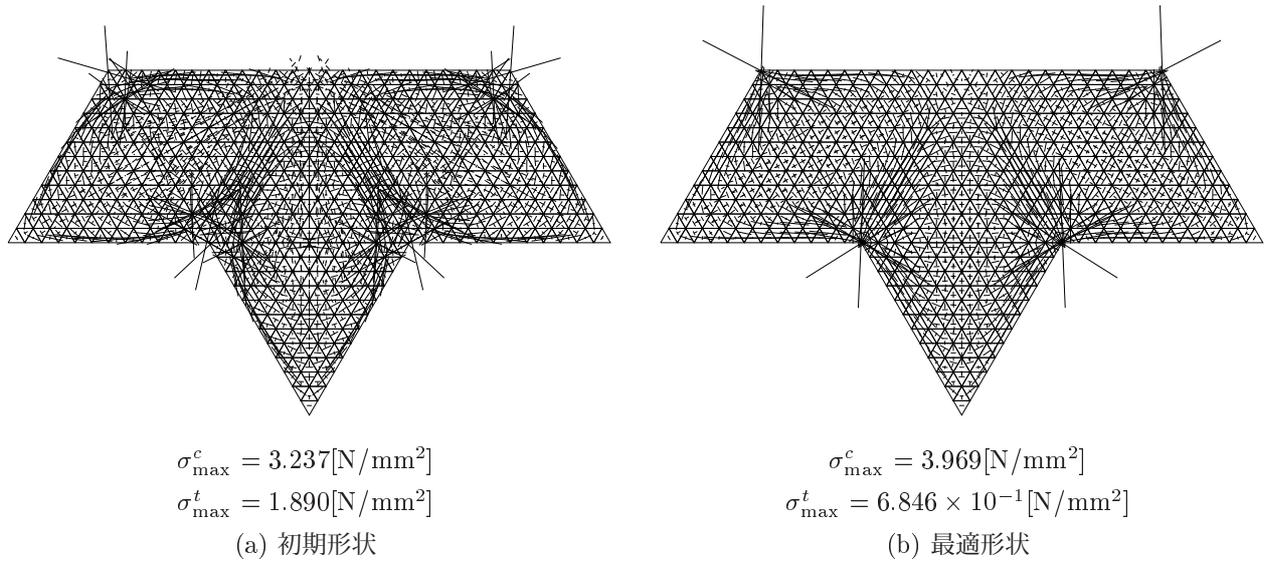


図 4.38 膜応力分布図

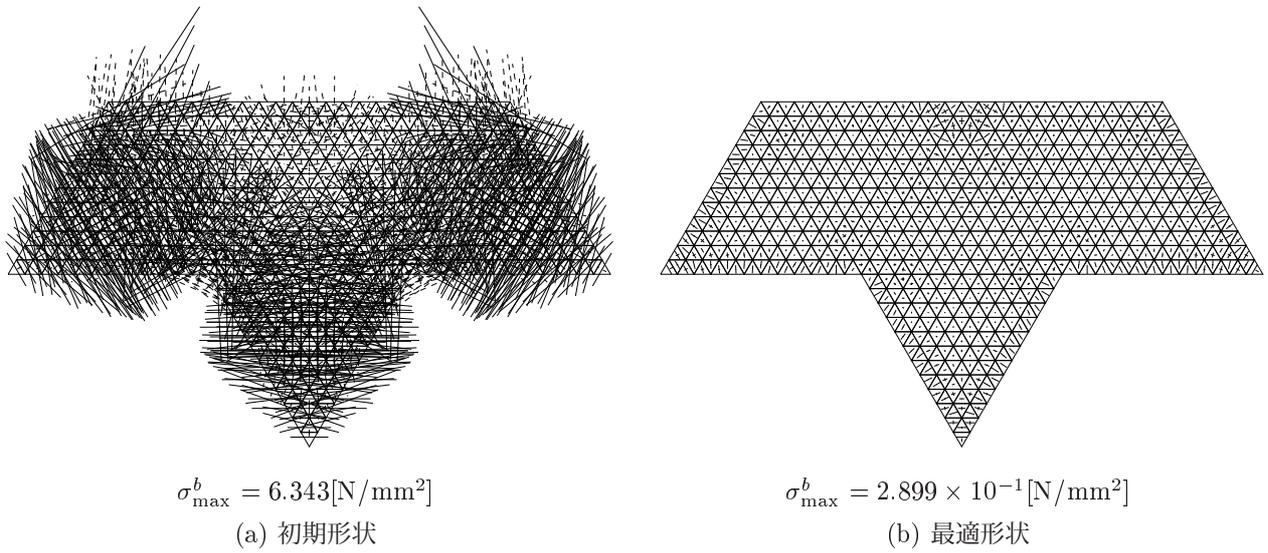


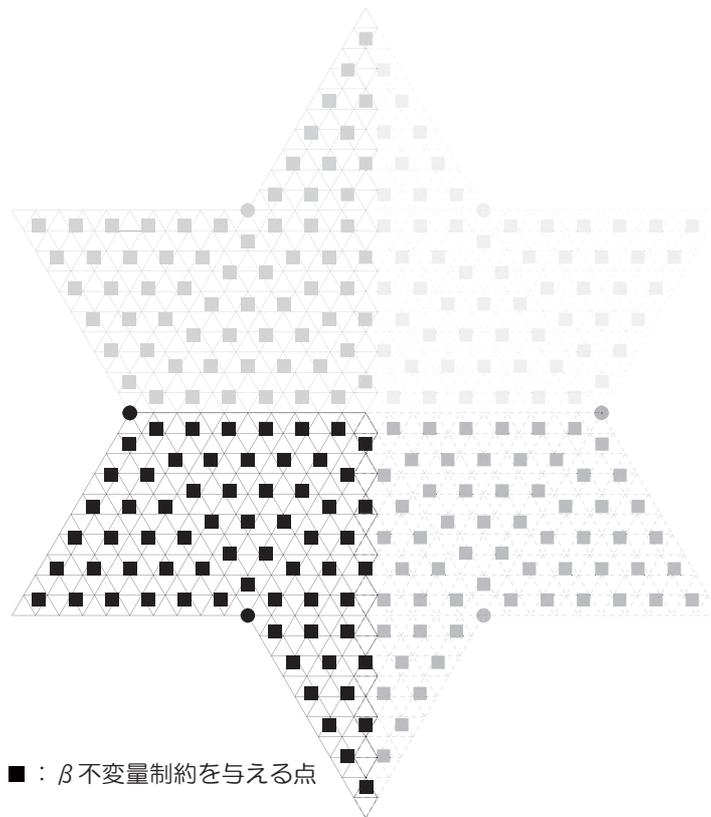
図 4.39 曲げ応力分布図

4.6.3 例題2：可展条件を導入する場合

最適化概要

次の最適化問題を考える。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(\mathbf{q}_z) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \\ & \text{subject to} && \begin{cases} S(\mathbf{q}_z) - S_0 \leq 0 \\ \beta_2^{ci}(\mathbf{q}_z) = 0 \\ (i=1, \dots, 66) \end{cases} \end{aligned} \quad (4.10)$$



$$u^{ci}, v^{ci} \in [1/13, 3/13, 5/13, 7/13, 9/13, 11/13], (i = 1, \dots, 66)$$

この最適化問題は、問題 (4.9) に加えて、曲面の 1/6 領域がそれぞれ可展面となるような β 不変量制約を導入している。

最適化結果と考察

最適性条件を満足し、最適化は終了した。本手法により得られた最適解曲面の形状を図 4.40(b) に示す。また、比較の対象として、初期解曲面の形状を図 4.40(a) に示す。各図で上方にアイソメトリック図を、下方には立面図をそれぞれ示す。また、弾性解析は対称性を考慮し、1/2 部分を対象としたため、目的関数および制約条件関数の値は 1/2 部分での値であるため、それぞれを 2 倍した値を図中に記した。

また、初期形状および最適形状の、自重作用時の弾性変形の様子を図 4.41(a),(b) にそれぞれ示す。

また、初期形状および最適形状のシェル中央面の膜応力、および曲げモーメントによる縁応力の分布図を図

4.42(a),(b) および図 4.43(a),(b) にそれぞれ示す。

また、初期形状および最適形状の鉛直方向座標に関する等高線図を図 4.44(a),(b) にそれぞれ示す。

最後に、曲面形状の 3 次元データから、初期形状および最適形状について、展開図が作成可能な場合には、図 4.45 にその展開図を示した。

図 4.40 を見ると、最適解は、問題 (4.9) の最適解と同様に、半円状に結ばれていた支持点間の形状は、カテナリーアーチへと変化し、ひずみエネルギーは初期解からおおよそ 86 % 減少していることがわかる。

図 4.41 を見ると、最適形状の自重作用時の変位は、単一にひずみエネルギーを減少させた問題 (4.9) の最適解には及ばないものの、初期形状に比べ大幅に低減されていることがわかる。最大鉛直変位は初期形状からおおよそ 89 % 低減されており、剛性が上昇している。

図 4.42 および図 4.43 を見ると、問題 (4.9) の最適解と比較すると若干の曲げ応力の発生を許しているものの、全体として膜応力によって外力に対し抵抗する力学的メカニズムを有していることがわかる。

β_2 不変量は、制約を与えた点において 0 となっているだけで、その他の点において 0 となる保証はない。しかしながら、図 4.42 を見ると、シリンダーを組み合わせたような形状となっていることがうかがえ、可展面が実現できていることがわかる。実際、図 4.45(b) のように、最適形状においては展開図を作成することができた。すなわち、十分に多くの点で β_2 不変量を 0 に制約することにより、曲面全体でガウス曲率がほぼ 0 となる曲面が得られることが確認された。なお、本最適化モデルは初期形状をシリンダーのつなぎ合わせたものとしたので、初期形状も可展面であり、展開図の作成が可能である。しかし、初期形状の力学的性状が示す通り、同じ可展面であっても、形状の違いにより力学的合理性に著しい差異があり、初期形状は可展面であっても力学的に不合理な形状であり、設計者の直感によって力学的合理性の高い可展面を考えることは困難であると考えられる。そのため、力学的合理性を高める形状最適化問題に可展条件を導入することは双方を両立した曲面形状を求める上で非常に有効であると考えられる。

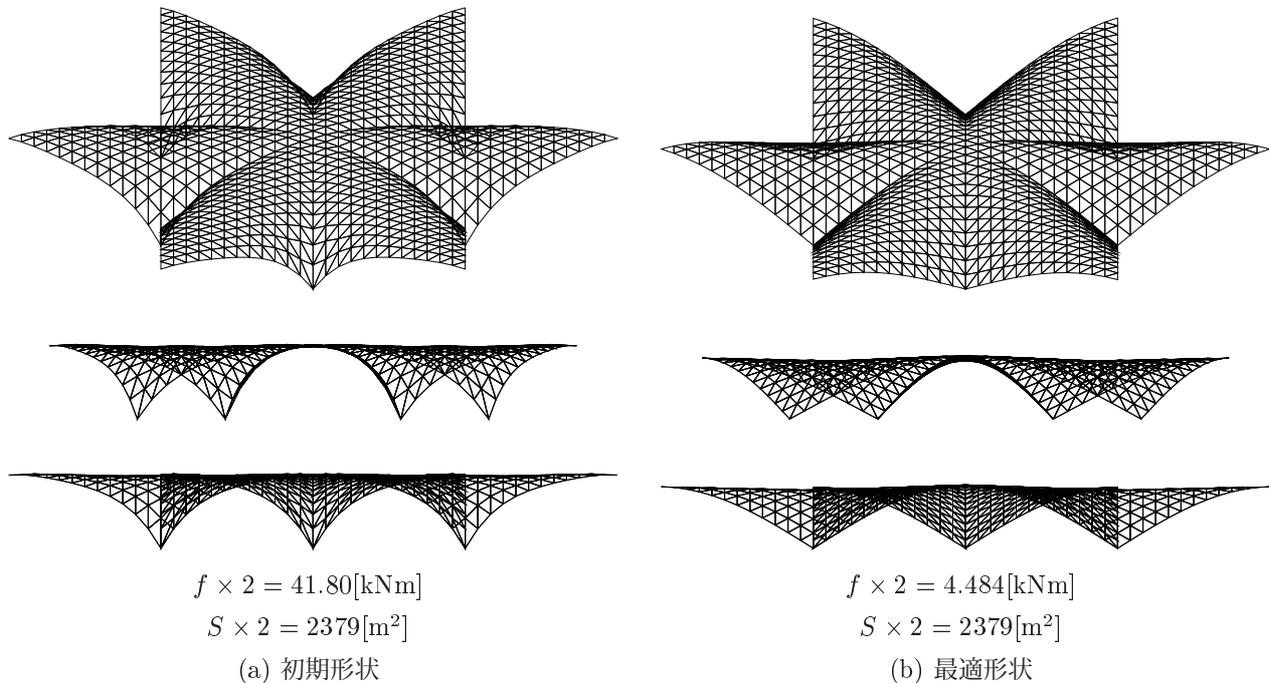


図 4.40 形状図

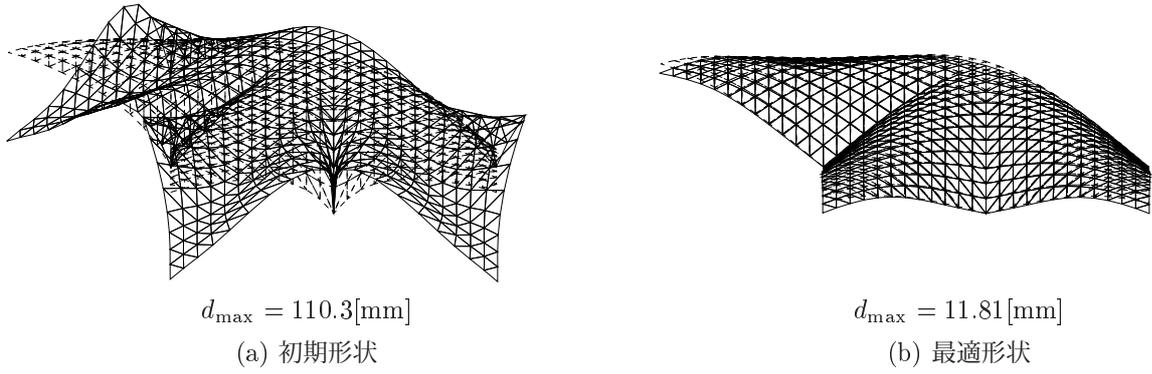


図 4.41 変形図 (×100)

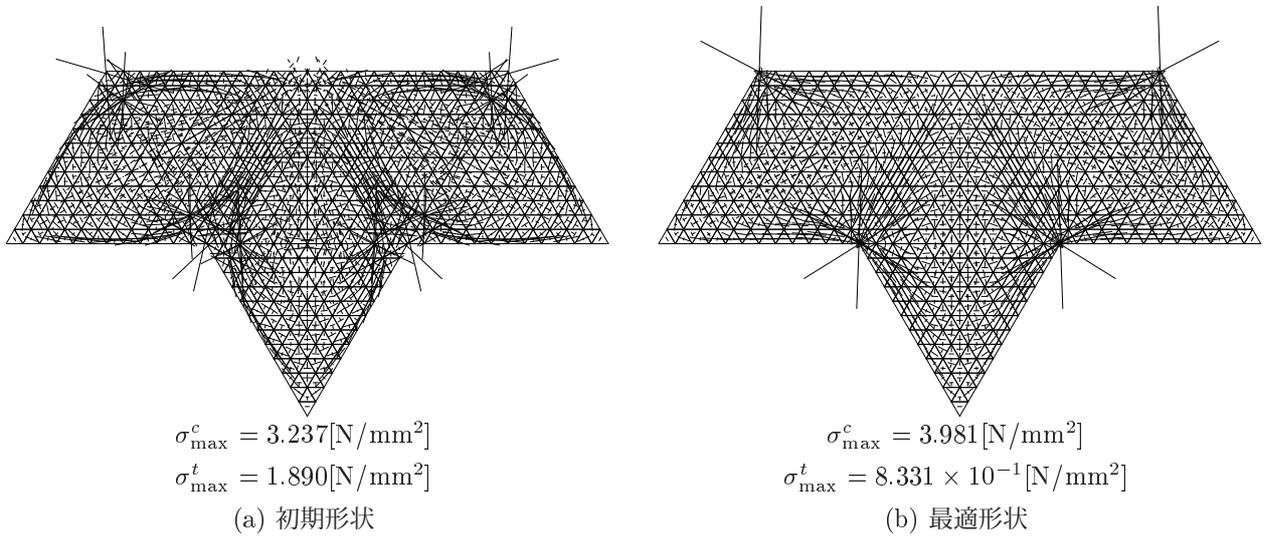


図 4.42 膜応力分布図

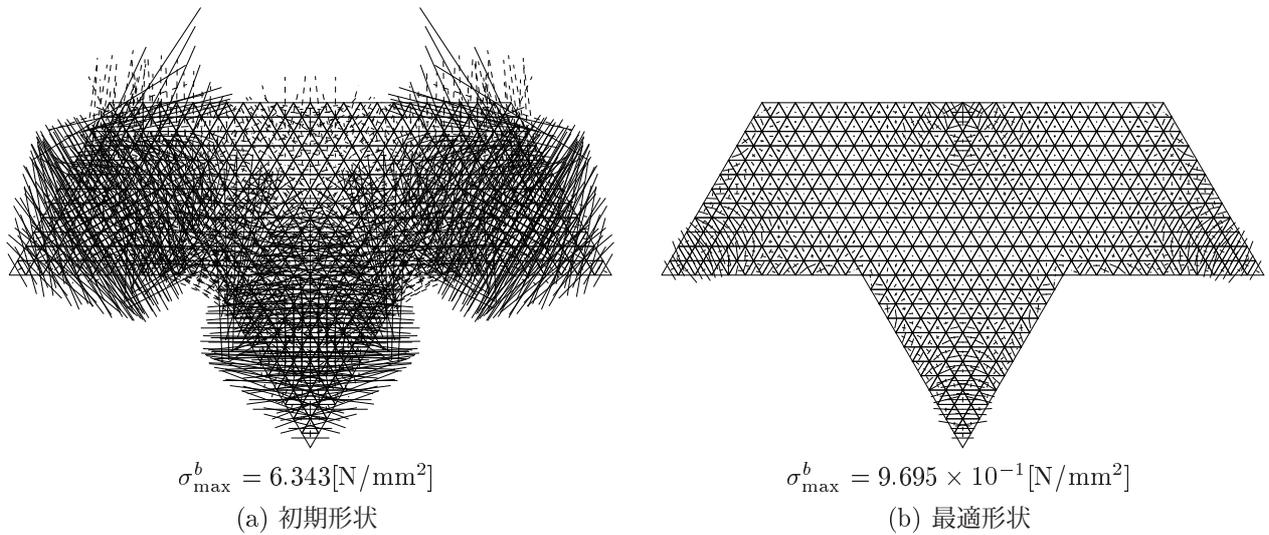


図 4.43 曲げ応力分布図

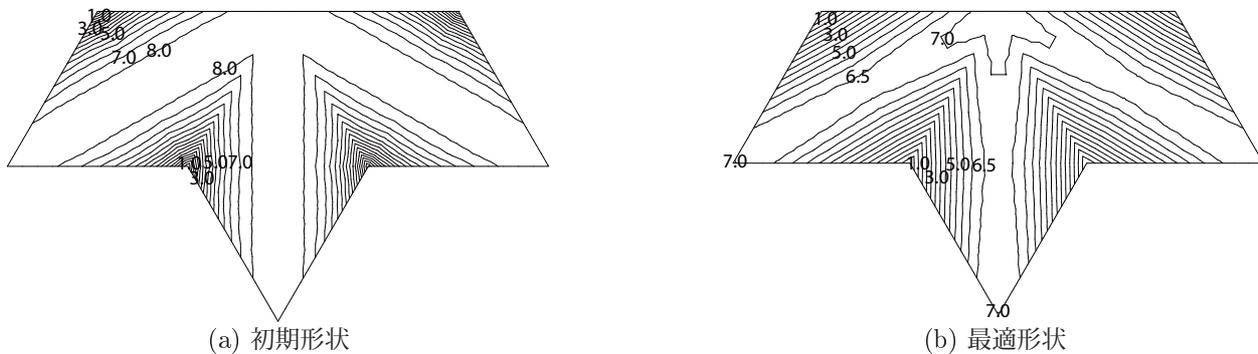


図 4.44 z 座標に関する等高線図

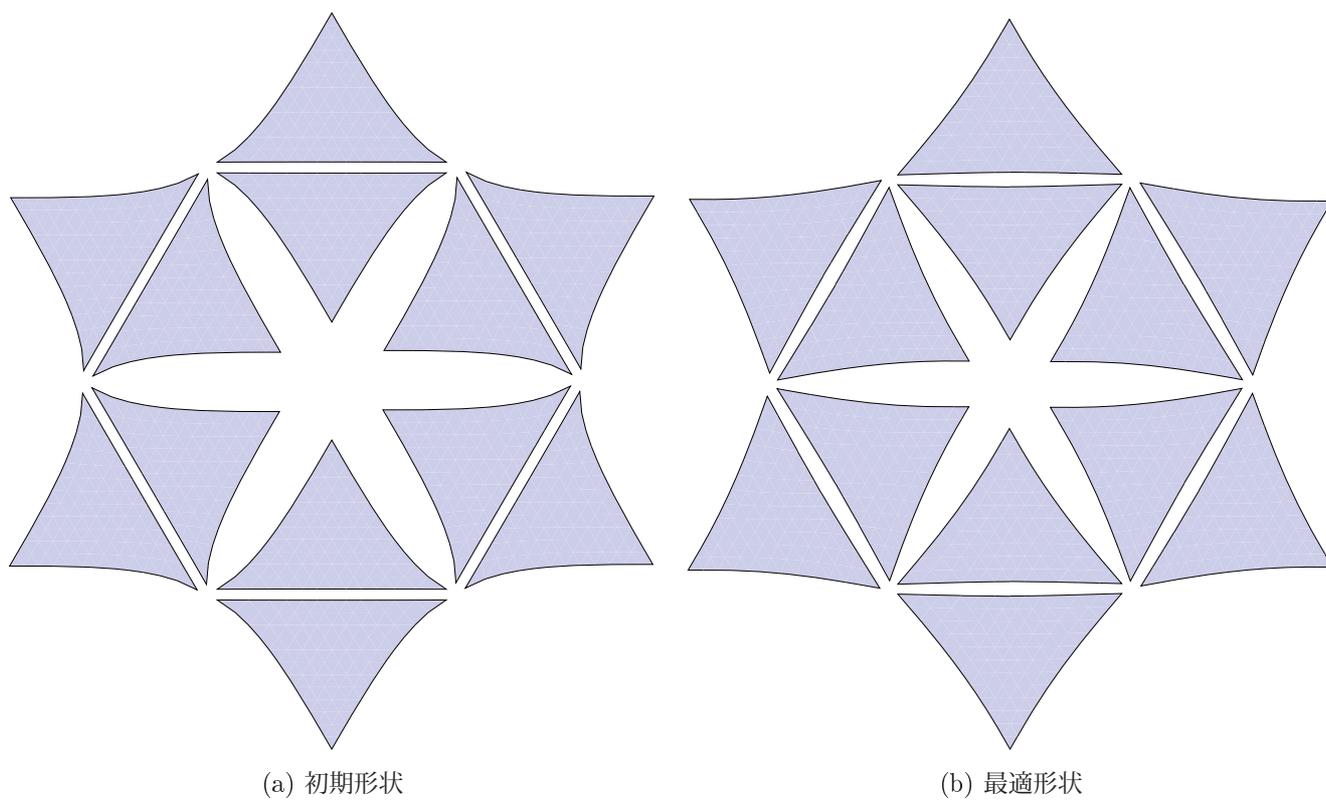


図 4.45 展開図

4.7 4章の結論

本章では、連続体シェル構造の施工性を評価する指標として曲面の平面への展開可能性に着目し、最適化問題の制約条件に可展条件を組み込むことで、施工性を考慮することを狙った形状最適化手法の提案をおこない、様々な最適化例を通じて手法の有効性を検証した。

まず、曲面の形状表現の自由度を損なうことなく最適化の際の未知量を低減させるため、ベジエ曲面により任意の曲面形状を表現し、問題設定をおこなった。曲面全体を可展面とすることは、非常にきつい幾何学的制約を課すこととなり、形状表現の自由度が大幅に失われ、支持点の不動条件によっては解が得られない場合もある。そこで本研究では、曲面をいくつかの区分領域に分割し、それぞれを独立にベジエ曲面で表現するという手法を提案した。最適化モデルは、区分領域を四角形に分割し、分割された曲面がそれぞれテンソル積ベジエ曲面で形状表現されたものと、区分領域を三角形に分割し、分割された曲面がそれぞれ三角形パッチベジエ曲面により形状表現されたものを取り扱った。本章における連続体シェル構造の形状最適化問題は、体積制約下においてひずみエネルギーを最小化するという純粋な構造最適化問題を基本とし、これに可展条件制約を導入することで区分的可展面を生成しようというものである。得られた主要な結果は以下のようにまとめられる。

- 1) ガウス曲率と同義である β_2 不変量を区分領域に分割したそれぞれの曲面全体で0 とすることで、区分的可展面の生成が可能である。
- 2) β_2 不変量制約は、少なくとも制御点の個数より多く曲面全体に配置すれば、曲面全体としても β_2 不変量がほぼ0 となる曲面が得られる。
- 3) 本手法により得られた区分的可展面は、区分領域ごとの展開図の作成が可能である。
- 4) 可展面とする区分領域の分割の方法は、四角形分割とするよりも三角形分割とする方が形状表現の自由度が高い。

4) については、区分領域を三角形とした最適化モデル2~4において本手法により得られた可展面は、ひずみエネルギー最小解に匹敵する優良な力学特性を有していたのに対し、区分領域を四角形とした最適化モデル1において本手法により得られた可展面は、初期形状よりは力学的合理性は高いもののひずみエネルギー最小解と比べると大きく劣る結果となったことと関係している。可展面はその名の通り、平面に展開可能な曲面、逆にいえば、平面から作ることでできる曲面である。平面は、3点が決まれば一意に決まる。ところが、4点を決めてしまうと、場合によっては平面を作ることはできない。可展面においても同様の性質があり、4点を含む曲面を1単位とするよりも、3点を含む曲面を1単位とした方が、可展条件という厳しい制約条件下における形状表現の自由度が高いといえる。本章では、区分領域を四角形としたモデルは1つしか示していない。その理由は、区分領域を四角形として可展面を作成した場合、形状表現の自由度が低くモデルによっては解が存在しなかったためである。一方で、区分領域を三角形とした場合、本章に示した最適化例のように様々な平面形状並びに境界条件を有するモデルに本手法が適用可能であることがわかった。

本章で扱った最適化モデルは、コンクリートシェルを想定している。コンクリートシェルの型枠作成を考えたとき、一般に、曲面が線材で構成される線織面⁴⁴⁾が高い施工性を有しているといわれており、実際、国内外において実構造物として実現されているシェルの多くは、HP曲面などの線織面で形成されている。可展面とは、線織面のGauss曲率が0となった特別な場合であり、曲面を線材ではなく面材で構成することが可能であるため、線織面よりもさらに高い施工性を有していると考えられる。本手法により、力学的合理性を大きく損なうことなく曲面を区分的に可展面とすることができれば、設計において重要な非力学的側面である施工性の高い曲面を提案することができる。本論文では比較的単純なモデルを扱ったが、平面形状や区分領域の設定方法の違いなどにより様々な可展面を生み出すことができた。可展面自体はシンプルな曲面であり、その形状は限られているが、平面形状、境界条件、区分領域の分

割方法などを変更することである程度多様性のある曲面を生み出すことが可能であると考えられる。

4.8 模型製作による検証

1/100の簡易模型を製作することで、実際に平面から製作可能であることを確かめる。製作するモデルは4番目の最適化モデルとした。

使用材料は塩ビ版とし、曲率固定用にはりがねを用いた。製作手順は図4.47を示す。



図 4.46 使用材料

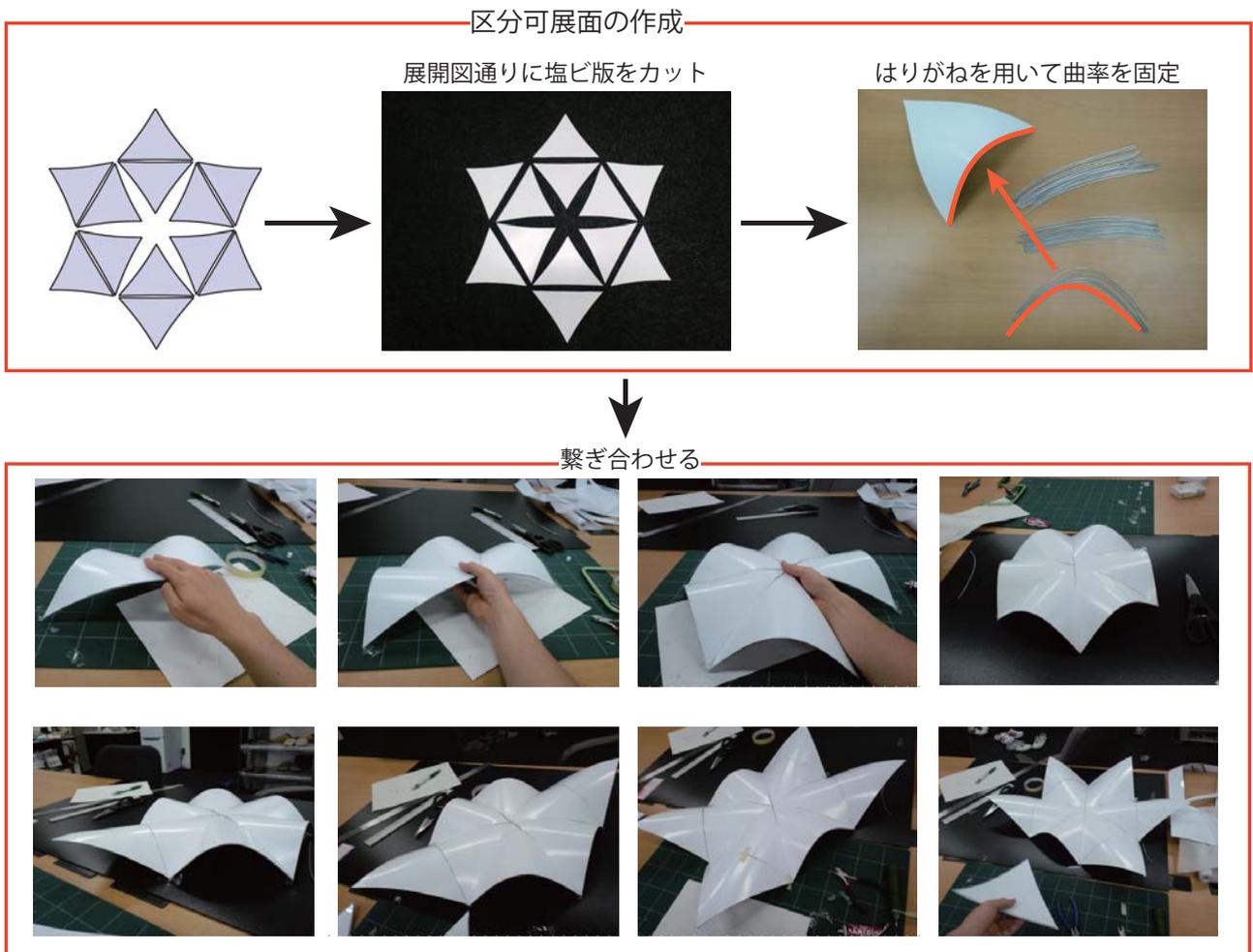


図 4.47 製作手順

最適化で得られた曲面と完成した模型をそれぞれ示す。同様の曲面が1/100の模型で実現できた。

なお、模型製作を含めた一連の形態創生プロセスは、構造形態の解析と創生コロキウムにおける形態創生コンテストに出展した。次ページに応募の際のポートフォリオを示す。

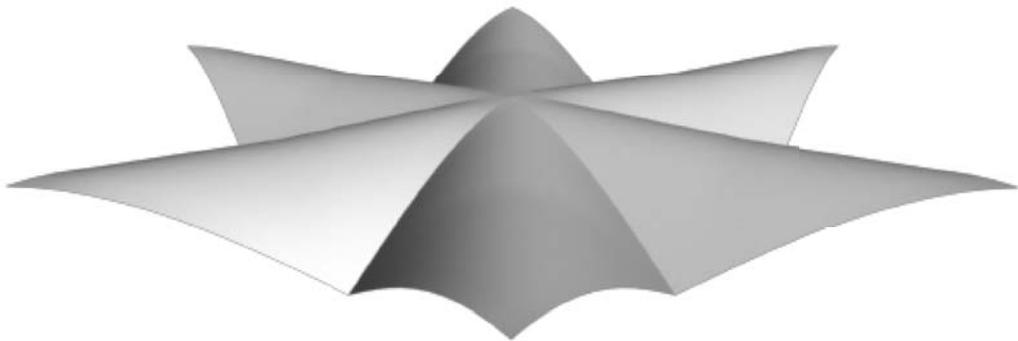


図 4.48 モデル 4 の最適形状

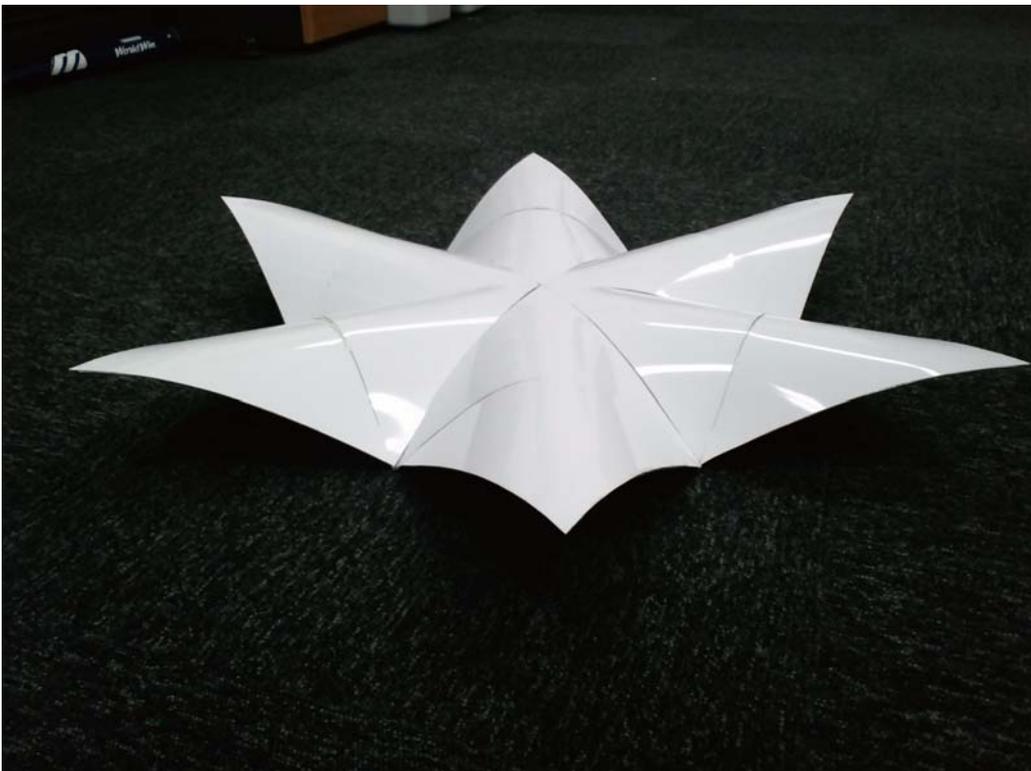


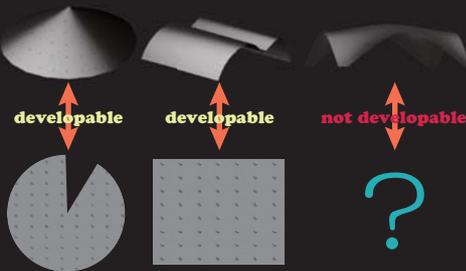
図 4.49 完成模型

Make it developable - 2次元⇔3次元の行き来を楽に -

近年の解析技術、施工技術の目覚ましい発展は、幾何学的な形態に捉われない自由な曲面を有する構造物の創造に寄与してきた。しかし、そのような複雑な形状を有する曲面構造物を具現化するためには、造船業界を中心として発展した非常に高度な加工技術と、現場の職人たちによる名人芸とも呼ぶべき施工技術が不可欠である。曲面構造物は、楽に作ることは無縁なのである。そこで、高い力学的合理性を有する曲面を、数値計画法と微分幾何学の知恵を借りて可展面と呼ばれる平面に展開可能な曲面の繋ぎ合わせで作ることによって、楽に作れる曲面構造物の創生を試みる。形態創生手法のプロセスを通じて、本手法の楽しさを実感していただくとともに、実際に簡単な模型を製作することで得られた曲面が楽に作れることを証明する。

What is a developable surface?

可展面とは？



developableとは、展開可能の意味であり、曲面には、錐や筒など、平面から作成することができるものがある。このような曲面は可展面と呼ばれ、2次元⇔3次元の行き来が容易であり、施工性に優れていると言える。

Developable condition

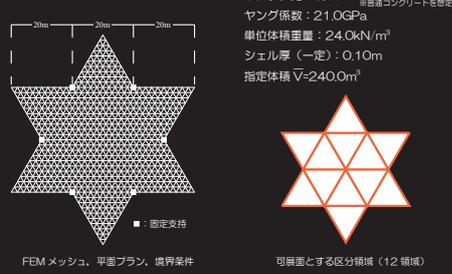
可展条件



可展面の成立条件：曲面全体でガウス曲率が0

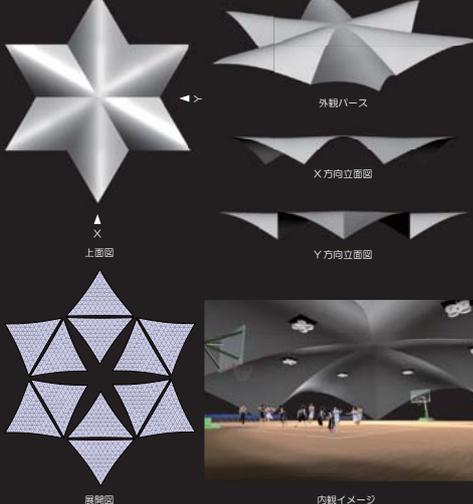
Analytical model

解析モデル



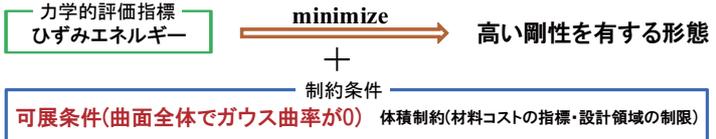
Analytical result

解析結果



A method of the computational morphogenesis

形態創生の方法



- Step 1 初期条件の設定 初期形状の設定, 境界条件の設定, FEMメッシュ分割, 材料定数の設定, 外力の設定, 体積の設定, 最適化計算の各種パラメータの設定
- Step 2 可展領域の設定 曲面全体を可展面とすれば限られた曲面しか創生できないため, 曲面をいくつかの領域に分割し, 可展面とする区分領域を決める。
- Step 3 曲面の離散化 区分領域に分けられた曲面をそれぞれパラメトリック曲面により離散化する。
- Step 4 最適化問題を解く パラメトリック曲面の制御点の鉛直方向座標を設計変数とし, 高い剛性を有する区分的可展面を生成する。

minimize $f(\mathbf{q}_z) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d}$ ← Strain energy minimization ・ひずみエネルギーを抑えることで、剛性を高める。

subject to $\begin{cases} V(\mathbf{q}_z) - \bar{V} \leq 0 & \leftarrow \text{Volume constraint} \\ \beta^{ci}(\mathbf{q}_z) = 0 & \leftarrow \text{Make the surface developable!} \end{cases}$ ・設計許容領域を指定して解の収束性を高めるとともに材料コストを考慮するため、体積に上限値を設ける。
 ・m個の制御点を曲面全体に均等にかつ十分多く設け、それらの点でのガウス曲率の値を0に制約する。

- Step 5 形態創生の完了 本手法により解析的に得られた曲面は、平面に展開することが可能であるため、曲面の3Dデータから展開図の作成が可能となる。解析条件により様々な形態の創生が可能であり、かつ、平面のつなぎあわせでつくり出すことができる。
楽しく、そして楽につくれる曲面の完成である。

Other various developable surfaces

その他の様々な可展面



Use materials



Making method



Model Making

模型作製

得られた曲面は本当にdevelopableであるのか、平板から簡単な模型(1:100)を作製することで検証する。



第5章

線織面の形状最適化

5.1 はじめに

本章では、連続体シェル構造物に対して、ひずみエネルギーを目的関数とし、曲面形状を線織面で表現し、高い剛性を有する線織面を最適化によって求める。3章同様、ひずみエネルギーを最小化し、シェルの総体積を制約することに加えて、施工性の指標として、曲面形状を線織面とすることで、建築構造物に要求される様々な要求を同時に考慮することを目的とする。4章で検討した可展面は、平面に展開可能であるため、型枠作成が容易である半面、曲面全体でガウス曲率を0に制約する必要があり、その厳しい幾何学的制約により、形状が錐面などに限定され、形状表現の自由度が限定的となる。一方で、面ではなく線に分解可能な曲面として、線織面が挙げられる。線材の繋ぎ合わせで型枠を作成可能であるため、可展面同様、施工性に優れた曲面として実構造物にも多く使用されている。本章では、線織面の形状最適化を行う。

線織面条件は、前章までと異なり制約条件として与えるのではなく、曲面形状を表現する関数をあらかじめ式(2.81)で示した線織面の定義式で与えることで考慮する。制御点座標の異なる2つのベジエ曲線を考え、それぞれの曲線のパラメータの等しい点を結んだ直線の集合で線織面を形成し、2つのベジエ曲線の制御点座標を設計変数とする。ベジエ曲面と比べ形状表現の自由度が低いので、本章では制御点の x, y, z 方向すべてを設計変数として扱うことで、実行可能領域の拡大を試みる。

5.2節では、ベジエ曲線を用いた線織面の定義式について述べる。

5.3節では、制御点の x, y, z 方向すべてを設計変数として扱った場合に起きる計算上の不具合とその対処方法について述べる。

5.4節では、勾配ベクトルを求める感度解析について述べる。

5.5~5.7節では、シリンダーシェル、負のガウス曲率を有するシェル、不整形な形状を有するシェルの性質の異なる3つの連続体シェルに対してひずみエネルギー最小化を行い、得られた解の特徴について考察する。

5.8節では、本章で提案した形状最適化手法により得られた結論を述べる。

本章での最適化問題での共通事項は以下のとおりである。

- 応力算定は有限要素法による線形静的解析によりおこなう。
- 有限要素は三角形平面シェル要素*1を用いる。
- 材料はコンクリートとし、ヤング率を 21GPa、ポアソン比を 0.17 とする。
- 外力は自重として単位体積重量 24kN/m³ を作用させる。
- シェル厚は一様に 0.1m とする。
- 最適化問題の定式化に際し、自由度数を n 、要素数を m 、節点変位ベクトルを $\mathbf{d} \in R^n$ 、線形弾性剛性マトリクスを $\mathbf{K} \in R^{n \times n}$ 、シェル中央面の総面積を S 、各要素のシェル中央面の面積の平均からの差の二乗和平均を S_{ave} 、各要素の 3 辺の長さの総和を L 、各要素の辺の長さの平均からの差の二乗和を L_{ave} 、シェルの xy 平面への水平投影面積を A で表わす。
- 制御点座標 q_x, q_y, q_z から支点上の制御点座標を除いたベクトルを $\mathbf{q}_x^*, \mathbf{q}_y^*, \mathbf{q}_z^*$ で表す。
- 初期形状の値を下添え字の 0 で表わす。

5.2 ベジエ曲線を用いた線織曲

本章では、前章までと異なり、シェル形状をテンソル積ベジエ曲面や三角形パッチベジエ曲面により表現するのではなく、制御点の異なる 2 本のベジエ曲線のパラメータの等しい点を結んだ直線の集合で表現される線織面関数として定式化する。

$$\begin{aligned}
 r_x(u_\alpha, v_\beta) &= \sum_{i=0}^I q_{x,i} B_{I,i}(u_\alpha) + v_\beta \left\{ \sum_{i=0}^J q_{x,I+i} B_{J,i}(u_\alpha) - \sum_{i=0}^I q_{x,i} B_{I,i}(u_\alpha) \right\} \\
 r_y(u_\alpha, v_\beta) &= \sum_{i=0}^I q_{y,i} B_{I,i}(u_\alpha) + v_\beta \left\{ \sum_{i=0}^J q_{y,I+i} B_{J,i}(u_\alpha) - \sum_{i=0}^I q_{y,i} B_{I,i}(u_\alpha) \right\} \\
 r_z(u_\alpha, v_\beta) &= \sum_{i=0}^I q_{z,i} B_{I,i}(u_\alpha) + v_\beta \left\{ \sum_{i=0}^J q_{z,I+i} B_{J,i}(u_\alpha) - \sum_{i=0}^I q_{z,i} B_{I,i}(u_\alpha) \right\}
 \end{aligned}
 \quad \left(\begin{array}{l} 0 \leq u_\alpha, v_\beta \leq 1 \\ \alpha = 0, \dots, I' \\ \beta = 0, \dots, J' \end{array} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}_x &= [q_{x,0}, \dots, q_{x,I+J}]^\top \\
 \mathbf{q}_y &= [q_{y,0}, \dots, q_{y,I+J}]^\top \\
 \mathbf{q}_z &= [q_{z,0}, \dots, q_{z,I+J}]^\top \\
 \mathbf{r}_x &= [r_{x,0}, \dots, r_{x,N}]^\top \\
 \mathbf{r}_y &= [r_{y,0}, \dots, r_{y,N}]^\top \\
 \mathbf{r}_z &= [r_{z,0}, \dots, r_{z,N}]^\top
 \end{aligned}
 \quad (N = (I' + 1) \times (J' + 1))$$

(5.1)

ここで、 N は有限要素の節点数、 I は基底曲線に選んだベジエ曲線の次数、 J はもう一方のベジエ曲線の次数である。

5.3 x, y, z 座標を設計変数とする場合に生じる潜在的な問題

前章までの最適化問題では、主に制御点の鉛直方向座標 q_z を設計変数として形状最適化をおこなった。しかし、形状を線織面関数 (5.1) に限定した場合、鉛直方向座標だけを設計変数とすると実行可能領域が小さいので、本章では、制御点 x, y 座標 q_x, q_y も設計変数として取り扱う (ただし支点上の制御点は設計変数から除く)。しかし、そのよう

*1 面内変形要素には定ひずみ要素を、面外変形要素には Zienkiewicz らの非適合三角形要素を採用する。

にして最適化問題

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f(\mathbf{q}_x^*, \mathbf{q}_y^*, \mathbf{q}_z^*) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \\ \text{subject to} \quad & S(\mathbf{q}_x^*, \mathbf{q}_y^*, \mathbf{q}_z^*) - S_0 \leq 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

を解くと、図 5.1 のように有限要素の形状にばらつきが生じ、最適化問題を解くことが出来なくなる。

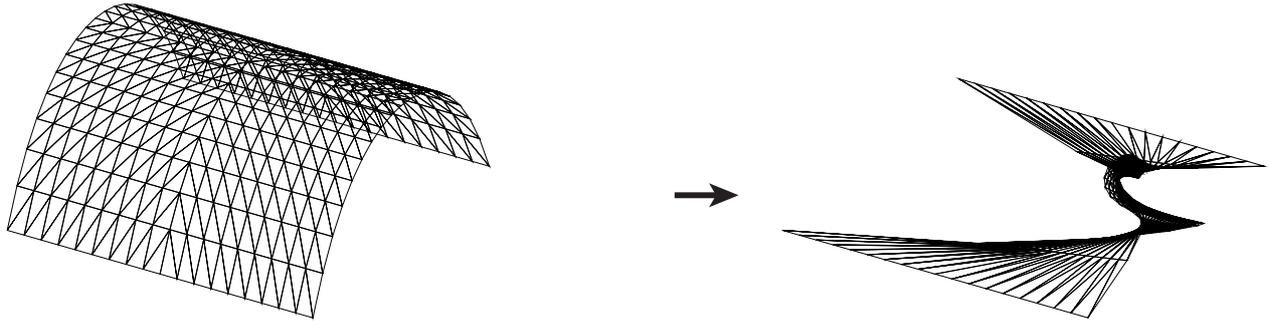


図 5.1 要素形状にばらつきが生じて最適化問題を解くことができない例

そこで、各要素の辺の長さに着目し、シェルの各要素の辺の長さの平均からの差の二乗和 $L_{ave} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^3 (l_{i,j} - l_{ave})^2$ を制約する次の最適化問題を考える。

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f(\mathbf{q}_x^*, \mathbf{q}_y^*, \mathbf{q}_z^*) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \\ \text{subject to} \quad & \begin{cases} S(\mathbf{q}_x^*, \mathbf{q}_y^*, \mathbf{q}_z^*) - S_0 \leq 0 \\ L_{ave}(\mathbf{q}_x^*, \mathbf{q}_y^*, \mathbf{q}_z^*) \leq \bar{L} \end{cases} \end{aligned} \quad (5.3)$$

ここで $l_{i,j}$ ($j = 1, 2, 3$) は i 番目の 3 角形要素の各辺の長さ、 l_{ave} はその平均 $\frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^3 l_{i,j}}{3m}$ 、 \bar{L} は指定する上限値である。有限要素の要素形状は、正三角形の時が最も計算精度が高い⁴⁵⁾。 \bar{L} の値を小さくするほど各要素の形状は正三角形に近づき、要素形状のばらつきは抑えられるが、同時に実行可能領域が著しく狭められてしまうため、 \bar{L} の値を小さくし過ぎると図 5.2 のように極めて偏平で非現実的な形状となる。一方で、 \bar{L} を十分に大きい値とすると、図 5.3 のように不良要素が表れてしまう。

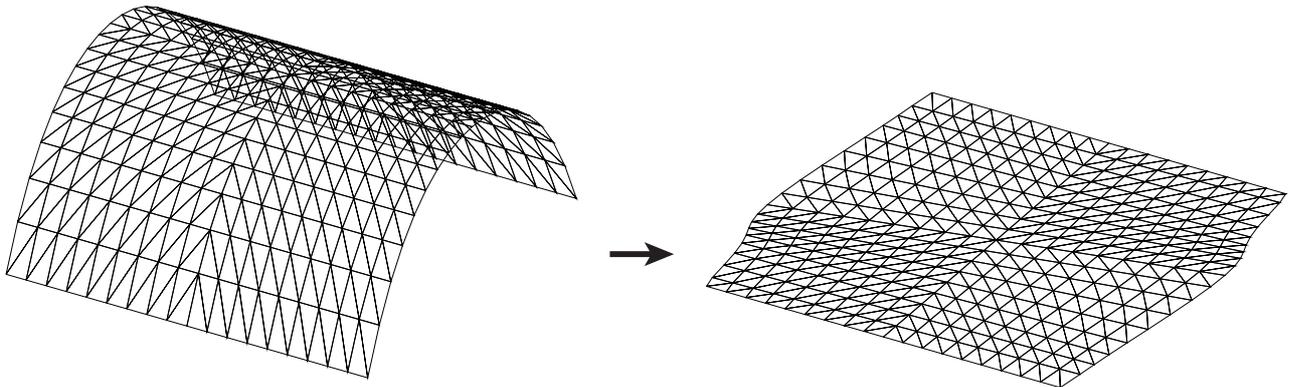


図 5.2 \bar{L} の値を抑えた結果ライズを失った例

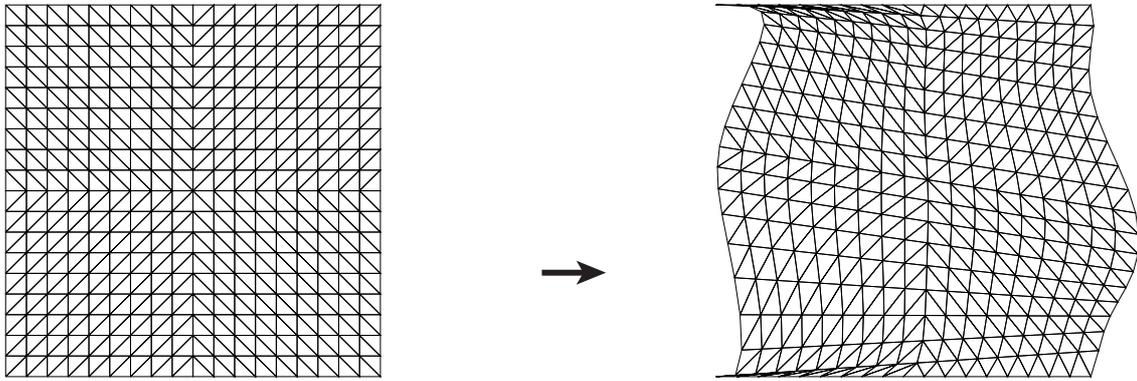


図 5.3 \bar{L} を十分に大きな値とした結果不良要素が現れた例

そこで、図 5.3 のような不良要素は面積をほとんど持たない鋭角な三角形要素を含んでいることに着目し、シェル
の各要素の面積の平均からの差の二乗和 $S_{ave} = \sum_{i=1}^m (\Delta_i - \Delta_{ave})^2$ を制約する次の最適化問題を考える。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(\mathbf{q}_x^*, \mathbf{q}_y^*, \mathbf{q}_z^*) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \\ & \text{subject to} && \begin{cases} S(\mathbf{q}_x^*, \mathbf{q}_y^*, \mathbf{q}_z^*) - S_0 \leq 0 \\ L_{ave}(\mathbf{q}_x^*, \mathbf{q}_y^*, \mathbf{q}_z^*) - \bar{L} \leq 0 \\ S_{ave}(\mathbf{q}_x^*, \mathbf{q}_y^*, \mathbf{q}_z^*) - \bar{S} \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.4)$$

ここで、 Δ_i は i 番目の 3 角形要素の面積、 Δ_{ave} はその平均 $\frac{S}{m}$ 、 \bar{S} は指定する上限値である。これにより、 \bar{L} を十分に大きな値としても不良要素の出現を防ぐことが出来る。

なお、前章までと異なり、設計変数が 2 つのベジエ曲線の制御点座標のみなので、支点を拘束することで形状表現の自由度が大きく制限される。そこで本章では、支点上の制御点座標も設計変数に含めた最適化も行うこととする。しかし、支点の拘束を取り除いた場合、図 5.4 のように水平投影面積が消失した形状が得られることがある。

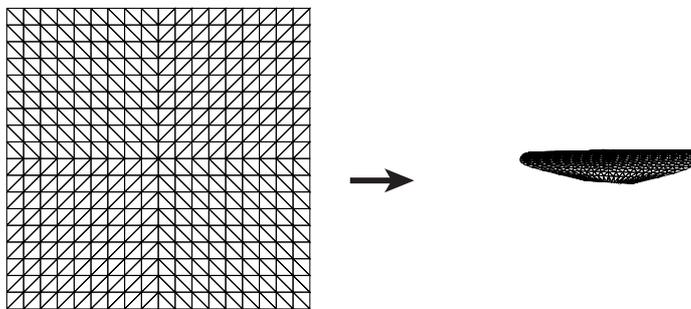


図 5.4 支点の不動条件を解除した結果水平投影面積が著しく小さくなった例

そこで、支点の拘束を取り除く場合は、シェル水平投影面積 A にも制約を設けることとする。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(\mathbf{q}_x, \mathbf{q}_y, \mathbf{q}_z) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \\ & \text{subject to} && \begin{cases} S(\mathbf{q}_x, \mathbf{q}_y, \mathbf{q}_z) - S_0 \leq 0 \\ L_{ave}(\mathbf{q}_x, \mathbf{q}_y, \mathbf{q}_z) - \bar{L} \leq 0 \\ S_{ave}(\mathbf{q}_x, \mathbf{q}_y, \mathbf{q}_z) - \bar{S} \leq 0 \\ A(\mathbf{q}_x, \mathbf{q}_y, \mathbf{q}_z) - A_0 \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.5)$$

5.4 感度解析

逐次二次計画法のような理論的な手法によって最適化問題を解く際に必要となる感度解析について述べる。本章で目的関数あるいは制約条件関数とする数学的指標のうち、ひずみエネルギー、シェルの面積の感度解析については前章までにすでに定式化済みであるので、そちらを参照されたい。ここでは、シェルの各要素の辺の長さの平均からの差の二乗和とシェルの各要素の面積の平均からの差の二乗和の節点座標に関する偏微分を求める。なお、節点 x, y 座標に関する偏微分については z 座標と同様に導出できるので、ここでは節点 z 座標に関する偏微分についてのみ定式化し、節点 x, y 座標に関する偏微分についての定式化は省略する。

5.4.1 シェルの各要素の辺の長さの平均からの差の二乗和の節点 z 座標に関する感度解析

各要素の 3 辺の長さの総和を L とすると、辺の長さの平均は

$$l_{ave} = \frac{L}{3m} \quad (5.6)$$

と書ける。これを用いると、シェルの各要素の辺の長さの平均からの差の二乗和は次のように整理できる。

$$L_{ave} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^3 (l_{i,j} - l_{ave})^2 = l_{1,1}^2 + l_{1,2}^2 + l_{1,3}^2 + \cdots + l_{m,1}^2 + l_{m,2}^2 + l_{m,3}^2 - \frac{L^2}{3m} \quad (5.7)$$

ここで、 $l_{1,1}^2 + l_{1,2}^2 + l_{1,3}^2 + \cdots + l_{m,1}^2 + l_{m,2}^2 + l_{m,3}^2 = L_2$ とおく。 a 番目の要素の辺の長さは

$$l_{a,1} + l_{a,2} + l_{a,3} = \frac{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} + \sqrt{(x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2 + (z_j - z_k)^2} + \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2}}{3} \quad (5.8)$$

で表される。これを節点 z 座標 $z_l (l = 1, \dots, n)$ で偏微分すると

$$\frac{\partial (l_{a,1} + l_{a,2} + l_{a,3})}{\partial z_l} = \begin{cases} 0 & (l \neq i, j, k) \\ \frac{z_i - z_j}{l_{a,1}} - \frac{z_k - z_i}{l_{a,3}} & (l = i) \\ -\frac{z_i - z_j}{l_{a,1}} + \frac{z_j - z_k}{l_{a,2}} & (l = j) \\ -\frac{z_j - z_k}{l_{a,2}} + \frac{z_k - z_i}{l_{a,3}} & (l = k) \end{cases} \quad (5.9)$$

各要素の 3 辺の長さの総和の z_l に関する偏微分は次式で計算できる。

$$\frac{\partial L}{\partial z_l} = \sum_{a=1}^m \frac{\partial (l_{a,1} + l_{a,2} + l_{a,3})}{\partial z_l} \quad (5.10)$$

一方、 a 番目の要素の辺の長さの 2 乗

$$l_{a,1}^2 + l_{a,2}^2 + l_{a,3}^2 = (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 + (x_j - x_k)^2 + (y_j - y_k)^2 + (z_j - z_k)^2 + (x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2 \quad (5.11)$$

を節点 z 座標 $z_l (l = 1, \dots, n)$ で偏微分すると,

$$\frac{\partial(l_{a,1}^2 + l_{a,2}^2 + l_{a,3}^2)}{\partial z_l} = \begin{cases} 0 & (l \neq i, j, k) \\ 2(z_i - z_j) - 2(z_k - z_i) & (l = i) \\ -2(z_i - z_j) + 2(z_j - z_k) & (l = j) \\ -2(z_j - z_k) + 2(z_k - z_i) & (l = k) \end{cases} \quad (5.12)$$

であるから, L_2 の節点 z 座標に関する感度は次式で求められる。

$$\frac{\partial L_2}{\partial z_l} = \sum_{a=1}^m \frac{\partial(l_{a,1}^2 + l_{a,2}^2 + l_{a,3}^2)}{\partial z_l} \quad (5.13)$$

以上より, シェルの各要素の辺の長さの平均からの差の二乗和を L_{ave} とすれば, L_{ave} の z_l に関する感度係数は次のように書ける。

$$\frac{\partial L_{ave}}{\partial z_l} = \frac{\partial L_2}{\partial z_l} - \frac{2L}{3m} \frac{\partial L}{\partial z_l} \quad (5.14)$$

5.4.2 シェルの各要素の面積の平均からの差の二乗和の節点 z 座標に関する感度解析

シェルの各要素の面積の平均からの差の二乗和を S_{ave} は,

$$S_2 = \Delta_1^2 + \dots + \Delta_m^2 \quad (5.15)$$

とおけば, 次のように整理できる。

$$S_{ave} = \sum_{i=1}^m (\Delta_i - \Delta_{ave})^2 = S_2 - \frac{S^2}{m} \quad (5.16)$$

ここで,

$$\frac{\partial \Delta_i^2}{\partial z_l} = 2\Delta_i \frac{\partial \Delta_i}{\partial z_l} \quad (5.17)$$

であるので, 式 (3.6) より,

$$\frac{\partial S_2}{\partial z_l} = \sum_{i=1}^m 2\Delta_i \frac{\partial S}{\partial z_l} \quad (5.18)$$

となる。

以上より, シェルの各要素の面積の平均からの差の二乗和の節点 Z_l 座標に関する感度係数は次式で計算できる。

$$\frac{\partial S_{ave}}{\partial z_l} = \frac{\partial S_2}{\partial z_l} - \frac{2S}{m} \frac{\partial S}{\partial z_l} \quad (5.19)$$

5.4.3 シェルの水平投影面積の節点 z 座標に関する感度解析

シェルの水平投影面積 A は, シェル中央面の面積 S を求める際の要素節点の z 座標を 0 に置き換えるだけなので, 式 (3.6) より

$$\frac{\partial A}{\partial z_l} = 0 \quad (5.20)$$

である。節点 x, y 座標に関する感度係数は, 要素の z 座標をすべて 0 に置き換えた上で

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^m \frac{\mathbf{n}_i^\top}{4\Delta_i} \frac{\partial \mathbf{n}_i}{\partial x_i} \quad \frac{\partial S}{\partial y_i} = \sum_{i=1}^m \frac{\mathbf{n}_i^\top}{4\Delta_i} \frac{\partial \mathbf{n}_i}{\partial y_i} \quad (5.21)$$

により求めればよい。

次節以降、様々な最適化問題を定式化し、その最適化結果を示す。最適化結果の表記での共通事項は以下のとおりである。

- 変形図の点線は荷重作用前の形状を、実線は荷重作用時の変位を5~100倍にして表した形状を示している。
- 変形図中の d_{\max} として示した値は各節点の鉛直方向変位のうち最大の値を表す。
- 膜応力分布図において、実線、点線はそれぞれ各要素図心における圧縮応力、引張応力を表し、線の長さは主応力の大きさを表す。
- 膜応力分布図中の σ_{\max}^t は各要素図心における引張応力の最大値、 σ_{\max}^c は圧縮応力の最大値である。
- 曲げ応力分布図中の σ_{\max}^b は各要素図心の曲げモーメントによる縁応力の絶対値のうち最大の値を表している。

5.5 数値最適化例1 – シリンダーシェルー

5.5.1 最適化モデル

1つ目の最適化モデルは、アーチ状の2つのベジエ曲線のパラメータの等しい点を結んだ直線の集合として定義される線織面とする(図5.5)。各ベジエ曲線の次数は7, 制御点数は8である。支持条件は4隅を固定支持とする。弾性解析はフルモデル解析とし、要素分割は各辺18分割とし、合計648要素とする。外力, 材料定数, 断面形状などは, 5.1節の最後に示した通りである。

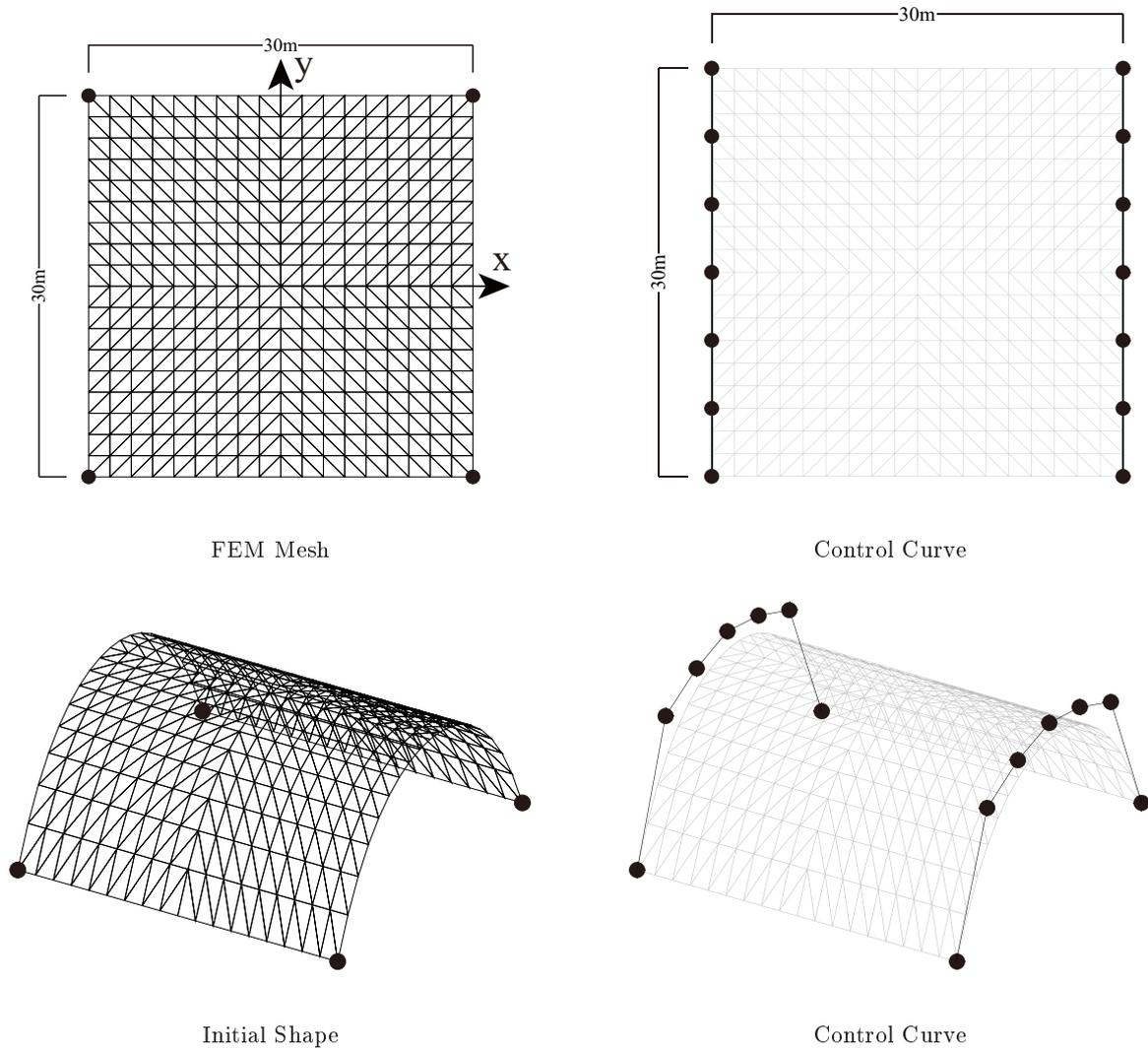


図 5.5 最適化モデル 1

5.5.2 最適化概要

次の3つの最適化問題を考える。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(\mathbf{q}_x^*, \mathbf{q}_y^*, \mathbf{q}_z^*) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \\ & \text{subject to} && \begin{cases} S(\mathbf{q}_x^*, \mathbf{q}_y^*, \mathbf{q}_z^*) - S_0 \leq 0 \\ L_{ave}(\mathbf{q}_x^*, \mathbf{q}_y^*, \mathbf{q}_z^*) - \bar{L} \leq 0 \\ S_{ave}(\mathbf{q}_x^*, \mathbf{q}_y^*, \mathbf{q}_z^*) - \bar{S} \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(\mathbf{q}_x^*, \mathbf{q}_y^*, \mathbf{q}_z^*) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \\ & \text{subject to} && \begin{cases} S(\mathbf{q}_x^*, \mathbf{q}_y^*, \mathbf{q}_z^*) - S_0 \leq 0 \\ L_{ave}(\mathbf{q}_x^*, \mathbf{q}_y^*, \mathbf{q}_z^*) - \bar{L} \leq 0 \\ S_{ave}(\mathbf{q}_x^*, \mathbf{q}_y^*, \mathbf{q}_z^*) - \bar{S} \leq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(\mathbf{q}_x, \mathbf{q}_y, \mathbf{q}_z) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \\ & \text{subject to} && \begin{cases} S(\mathbf{q}_x, \mathbf{q}_y, \mathbf{q}_z) - S_0 \leq 0 \\ L_{ave}(\mathbf{q}_x, \mathbf{q}_y, \mathbf{q}_z) - \bar{L} \leq 0 \\ S_{ave}(\mathbf{q}_x, \mathbf{q}_y, \mathbf{q}_z) - \bar{S} \leq 0 \\ A(\mathbf{q}_x, \mathbf{q}_y, \mathbf{q}_z) - A_0 \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.24)$$

問題 (5.22) は、制御点の x, y, z 座標を設計変数とし、シェル中央面の面積 S 、シェルの各要素の辺の長さの平均からの差の二乗和 L_{ave} 、シェルの各要素の面積の平均からの差の二乗和 S_{ave} にそれぞれ上限値を設け、支持点を固定としてひずみエネルギーを最小化する問題である。

問題 (5.23) は、問題 (5.22) の設計変数に支点の制御点 z 座標を含めたものであり、より実行可能領域の広い問題となっている。

問題 (5.24) は、支点に関するすべての制約条件を取り除き、すべての制御点を形状修正の対象とするかわりに、シェルの中央面の面積 A が初期形状での値以上となるような制約を設けた問題である。

各最適化問題において、 \bar{L} 、 \bar{S} の値については、実行可能領域を大きく狭めない範囲で不良な解が出ないように適切な値を設定する必要があるが、今回の最適化では $\bar{L} = 400$ 、 $\bar{S} = 10$ と設定する。

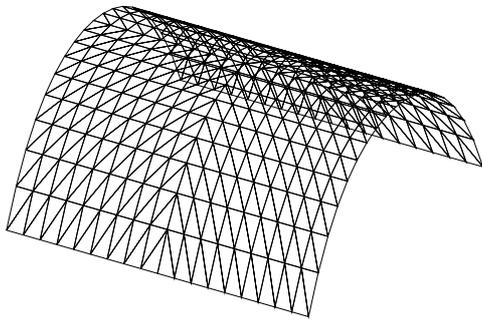
5.5.3 最適化結果と考察

問題 (5.22), (5.23), (5.24) を解いた結果を次ページ以降にそれぞれ示す。いずれの最適化においても、最適性条件を完全に満足し、最適化は終了した。本手法により得られた最適解曲面のシェル形状を図 5.7~5.9 にそれぞれ示す。また、比較の対象として、初期解曲面のシェル形状を図 5.6 に示す。各図で上方から順に、シェル形状のアイソメトリック図、立面図、平面図をそれぞれ示す。また、初期形状および最適形状の、自重作用時の弾性変形の様子を図 5.10~5.13 の (a) にそれぞれ示す。また、初期形状および最適形状のシェル中央面の膜応力、および曲げモーメントによる縁応力の分布図を図 5.10~5.13 の (b) および (c) にそれぞれ示す。

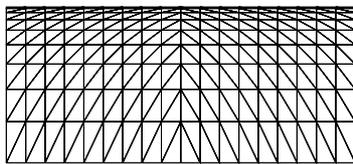
図 5.7 を見ると、支持点を不動とした場合、最適化を行うことで、立面的に見て屋根の頂部が勾配を持つ形状となった。図 5.7 と図 5.8 を比べると、支点の z 座標を移動自由にしたことで、形状はほとんどそのままに、立面的にみて頂部の屋根勾配が水平となるように回転した形状となっていることがわかる。図 5.9 を見ると、支点を移動自由にしたことで、平面的に膨らみをもった形状となった。水平投影面積制約は活性となっている。目的関数の値を見ると、いずれの最適形状もひずみエネルギーの値を初期形状から大きく低減できていることがわかる。特に、支点の不動制約のない問題 (5.24) の最適形状では、ひずみエネルギーの値は初期形状の 13 % まで低減できている。

図 5.10~5.13 の (a) を見ると、最適形状の自重作用時の弾性変位は、初期形状に比べ大幅に低減されていることがわかる。

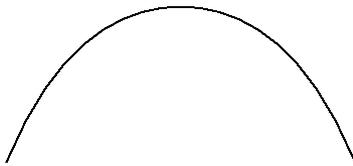
図 5.10~5.13 の (b),(c) を見ると、最適化を行うことで曲げ応力が低減されていることが確認できる。形状に類似性が認められた問題 (5.22), (5.23) の最適解は、応力分布状態も同様の傾向を示しており、力学的にも性質の近いものとなっている。いずれの最適形状も、線織面という範囲の中で最適化をおこなったものであり、幾何学的な制約が厳しいため、前章までの最適形状と比べて力学的合理性はやや劣るものの、初期形状と比べると大きく力学性能が向上しており、特に問題 (5.24) の最適形状では曲げ、引張がかなり抑えられており、前章までのひずみエネルギー最小化形状に見られた圧縮抵抗型の力学形態となっている。



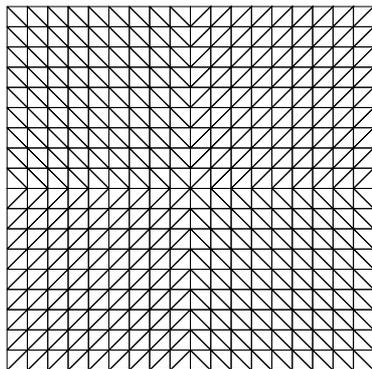
(a) アイソメトリック図



(b) 立面図 1



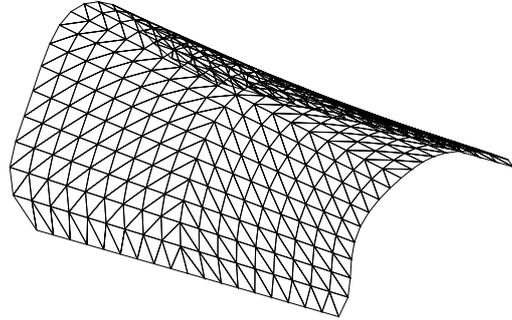
(c) 立面図 2



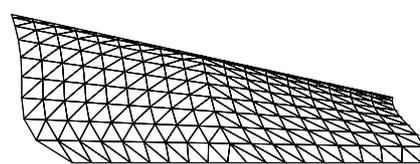
(d) 平面図

$f = 15.23[\text{kNm}]$
 $S = 1287[\text{m}^2]$
 $A = 900.0[\text{m}^2]$
 $L_{ave} = 1138[\text{m}^2]$
 $S_{ave} = 249.0[\text{m}^4]$

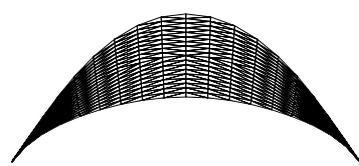
図 5.6 初期形状



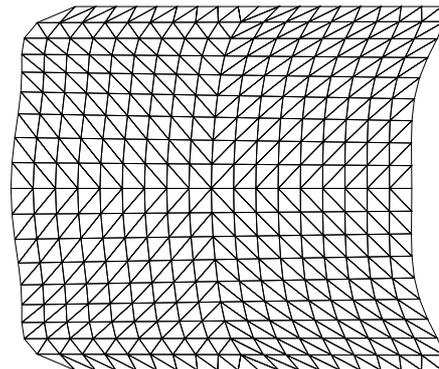
(a) アイソメトリック図



(b) 立面図 1



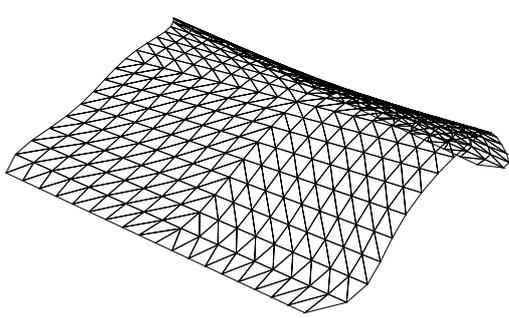
(c) 立面図 2



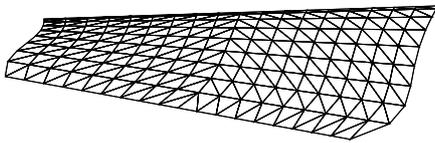
(d) 平面図

$f = 7.474[\text{kNm}]$
 $S = 1201[\text{m}^2]$
 $A = 979.5[\text{m}^2]$
 $L_{ave} = 400.0[\text{m}^2]$
 $S_{ave} = 10.00[\text{m}^4]$

図 5.7 問題 (5.22) の最適形状



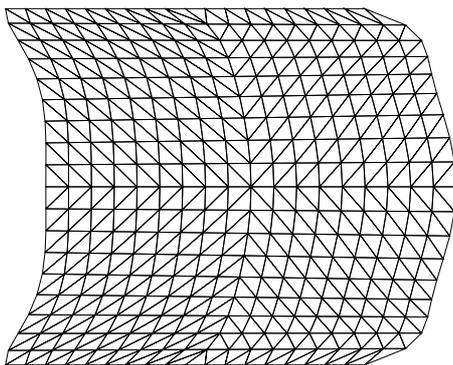
(a) アイソメトリック図



(b) 立面図 1



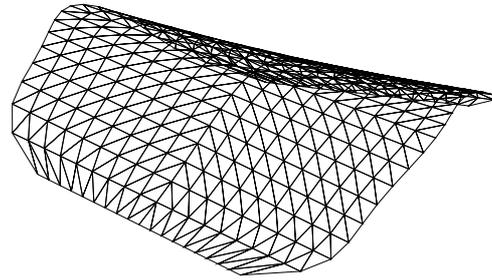
(c) 立面図 2



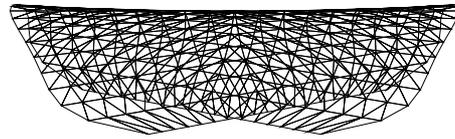
(d) 平面図

$$\begin{aligned}
 f &= 7.164[\text{kNm}] \\
 S &= 1215[\text{m}^2] \\
 A &= 1001[\text{m}^2] \\
 L_{ave} &= 400.0[\text{m}^2] \\
 S_{ave} &= 10.00[\text{m}^4]
 \end{aligned}$$

図 5.8 問題 (5.23) の最適形状



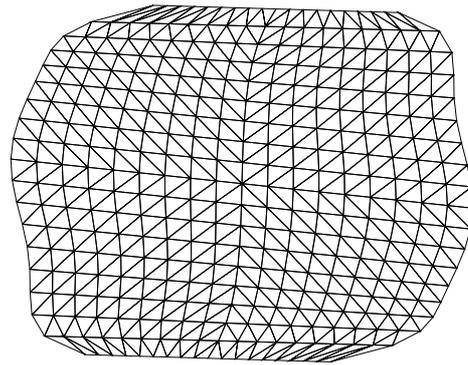
(a) アイソメトリック図



(b) 立面図 1



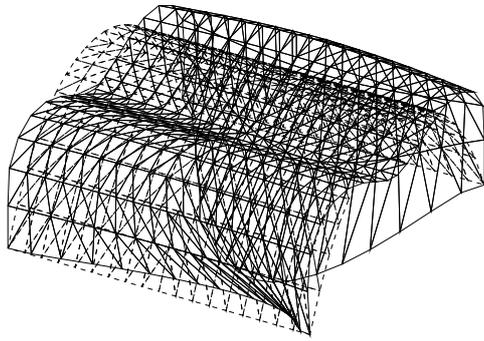
(c) 立面図 2



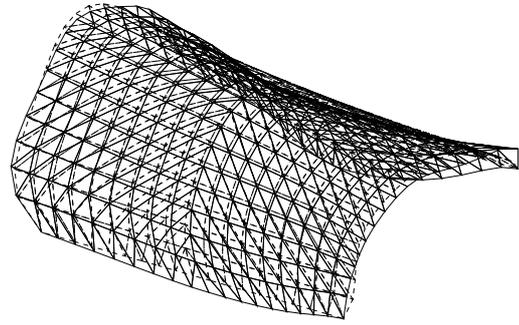
(d) 平面図

$$\begin{aligned}
 f &= 1.865[\text{kNm}] \\
 S &= 1088[\text{m}^2] \\
 A &= 900.0[\text{m}^2] \\
 L_{ave} &= 400.0[\text{m}^2] \\
 S_{ave} &= 10.00[\text{m}^4]
 \end{aligned}$$

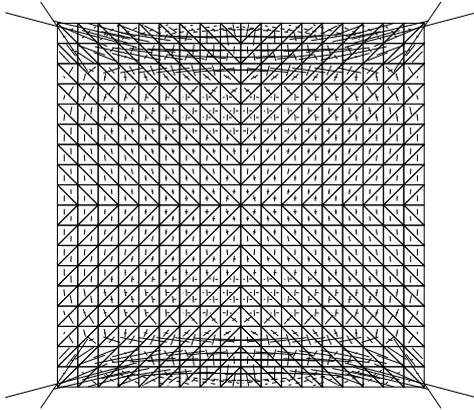
図 5.9 問題 (5.24) の最適形状



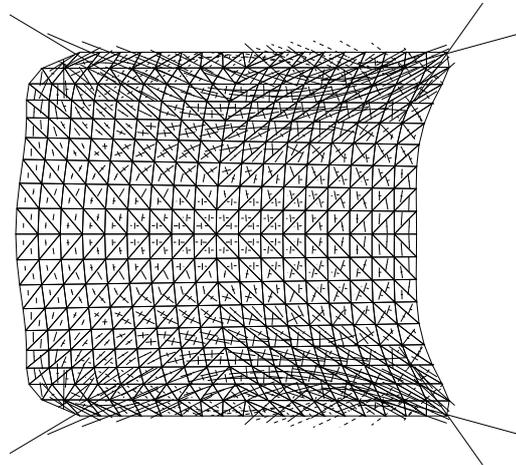
$d_{\max} = 70.31[\text{mm}]$
(a) 変形図 ($\times 100$)



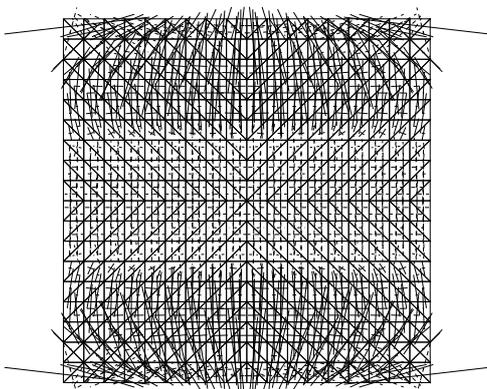
$d_{\max} = 31.46[\text{mm}]$
(a) 変形図 ($\times 100$)



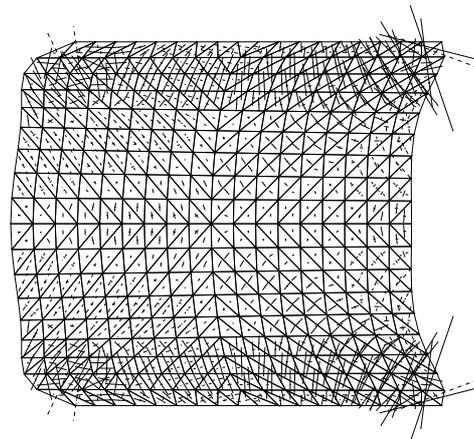
$\sigma_{\max}^c = 6.032[\text{N}/\text{mm}^2]$
 $\sigma_{\max}^t = 2.348[\text{N}/\text{mm}^2]$
(b) 膜応力分布図



$\sigma_{\max}^c = 7.695[\text{N}/\text{mm}^2]$
 $\sigma_{\max}^t = 3.548[\text{N}/\text{mm}^2]$
(b) 膜応力分布図



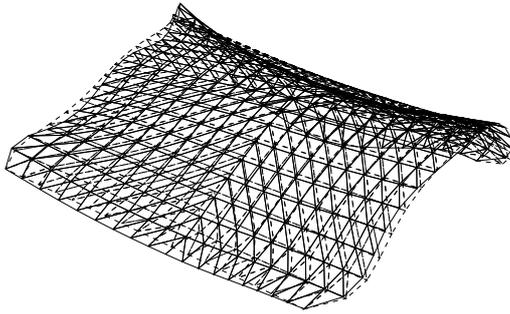
$\sigma_{\max}^b = 6.490[\text{N}/\text{mm}^2]$
(c) 曲げ応力分布図



$\sigma_{\max}^b = 5.957[\text{N}/\text{mm}^2]$
(c) 曲げ応力分布図

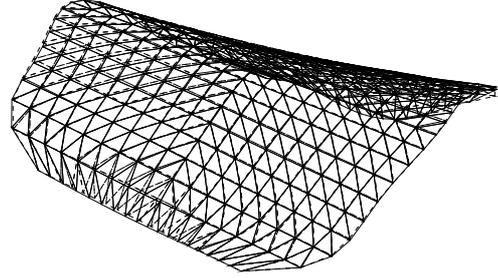
図 5.10 初期形状

図 5.11 問題 (5.22) の最適形状



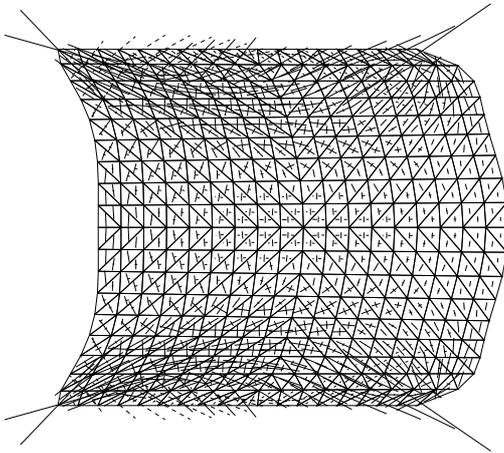
$$d_{\max} = 30.44[\text{mm}]$$

(a) 変形図 (×100)



$$d_{\max} = 15.33[\text{mm}]$$

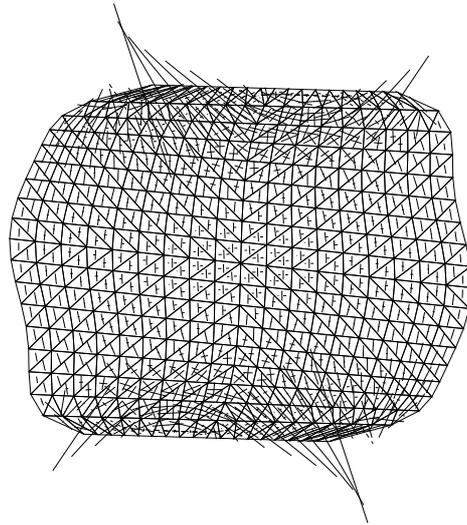
(a) 変形図 (×100)



$$\sigma_{\max}^c = 8.155[\text{N}/\text{mm}^2]$$

$$\sigma_{\max}^t = 3.586[\text{N}/\text{mm}^2]$$

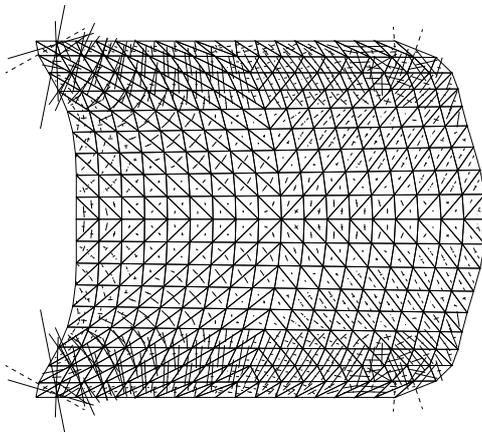
(b) 膜応力分布図



$$\sigma_{\max}^c = 5.255[\text{N}/\text{mm}^2]$$

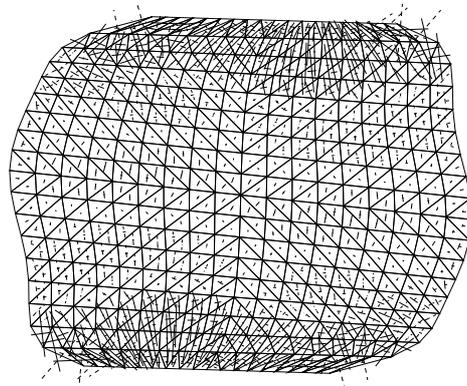
$$\sigma_{\max}^t = 1.585[\text{N}/\text{mm}^2]$$

(b) 膜応力分布図



$$\sigma_{\max}^b = 5.746[\text{N}/\text{mm}^2]$$

(c) 曲げ応力分布図



$$\sigma_{\max}^b = 1.972[\text{N}/\text{mm}^2]$$

(c) 曲げ応力分布図

図 5.12 問題 (5.23) の最適形状

図 5.13 問題 (5.24) の最適形状

5.6 数値最適化例 2 – 負のガウス曲率を有するシェル

5.6.1 最適化モデル

2つ目の最適化モデルは、1つめの最適化モデルの線織面を定義する2つのベジエ曲線のうち一方の制御点 z 座標の符号を反転させたものであり、負のガウス曲率を有するシェルとする (5.6.1) 境界条件は4隅を固定支持とし、解析条件などはモデル1と同様である。

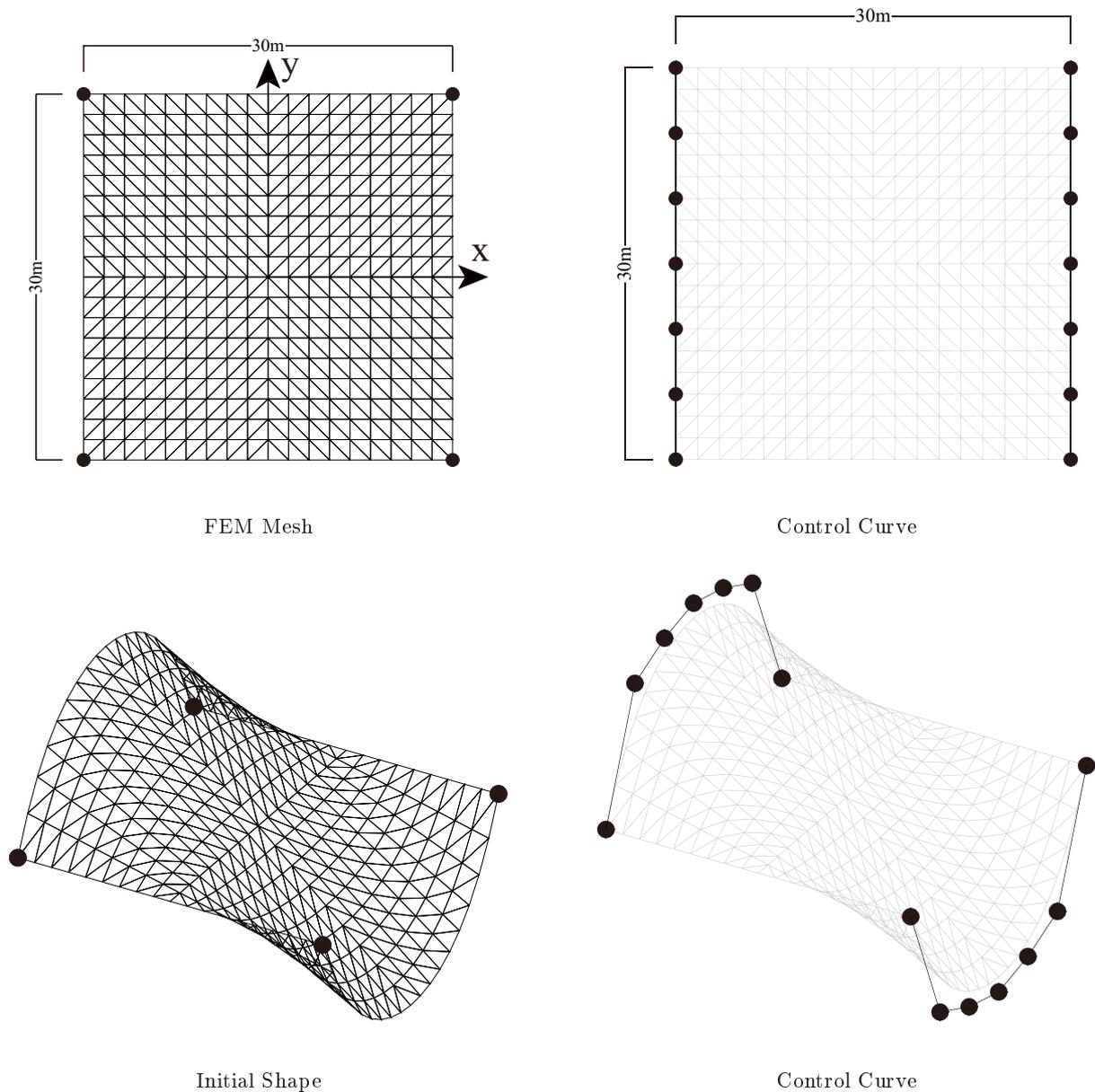


図 5.14 最適化モデル 2

5.6.2 最適化概要

モデル1と同様、問題(5.22)~(5.24)の最適化問題を考える。モデル1と同様、 $\bar{L} = 400$, $\bar{S} = 10$ と設定する。

5.6.3 最適化結果と考察

問題(5.22), (5.23), (5.24)を解いた結果を次ページ以降にそれぞれ示す。いずれの最適化においても、最適性条件を完全に満足し、最適化は終了した。本手法により得られた最適解曲面のシェル形状を図5.16~5.18にそれぞれ示す。また、比較の対象として、初期解曲面のシェル形状を図5.15に示す。各図で上方から順に、シェル形状のアイソメトリック図、立面図、平面図をそれぞれ示す。

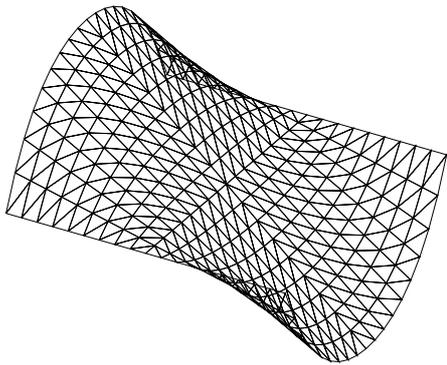
また、初期形状および最適形状の、自重作用時の弾性変形の様子を図5.19~5.22の(a)にそれぞれ示す。

また、初期形状および最適形状のシェル中央面の膜応力、および曲げモーメントによる縁応力の分布図を図5.19~5.22の(b)および(c)にそれぞれ示す。

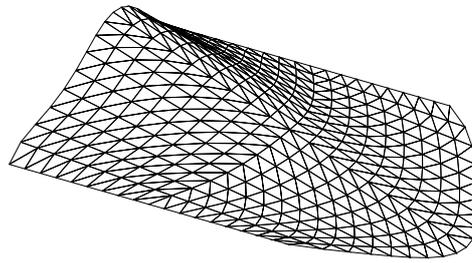
図5.16を見ると、支持点を不動とした場合、最適化を行うことで、下に凸となっている形状の範囲は少なくなっているものの、初期形状と似たような形状となっている。一方で、図5.17と図5.18をみると、支点の高さ方向の拘束が外れたことで、形状は初期形状から大きく変化し、HP曲面に近い形状となっている。目的関数の値を見ると、いずれの最適形状もひずみエネルギーの値を初期形状から大きく低減できていることがわかる。なお、このモデルは支点座標がモデル1と同様で、シェル中央面の面積もモデル1よりも大きいので、問題(5.22)~(5.24)のいずれの最適化問題も、実行可能領域はモデル1の場合よりも広い。しかしながら、問題(5.22)の最適解におけるひずみエネルギーの値は、モデル1の場合は7.474kNmであったのに対して、本モデルの場合では41.56kNmとなっており、実行可能領域がモデル1の場合よりも広いにもかかわらず目的関数値は大きくなるという結果となった。さらに、問題(5.23)の最適解は、水平投影面積が初期形状の値を超えており、結果として問題(5.24)の条件もすべて満足しているにも関わらず、問題(5.24)の最適解の方がひずみエネルギー値が大きいという結果となった。この結果から、本手法により得られる最適形状は、初期形状ならびに初期条件に強く依存するということがいえる。

図5.19~5.22の(a)を見ると、最適形状の自重作用時の弾性変位は、初期形状に比べ大幅に低減されていることがわかる。

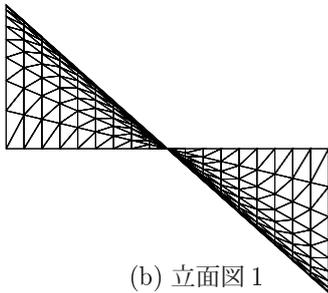
図5.19~5.22の(b),(c)を見ると、最適化を行うことで曲げ応力が低減されていることが確認できる。特に、問題(5.23)の最適解においては曲げ応力がほとんど発生していない。形状はHP曲面に近いが、建築の形態としても良く利用されるHP曲面が、力学的にも優れた性質を持っていることが確認された。



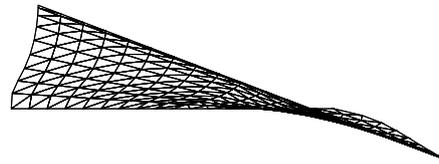
(a) アイソメトリック図



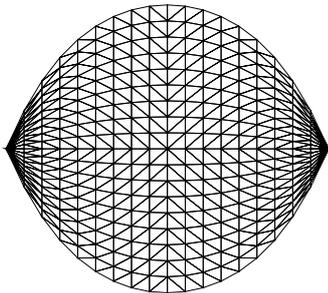
(a) アイソメトリック図



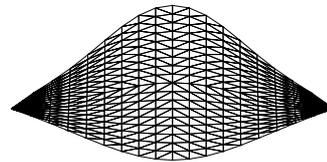
(b) 立面図 1



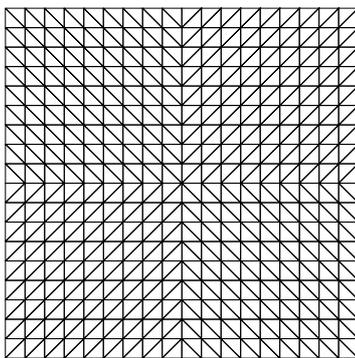
(b) 立面図 1



(c) 立面図 2



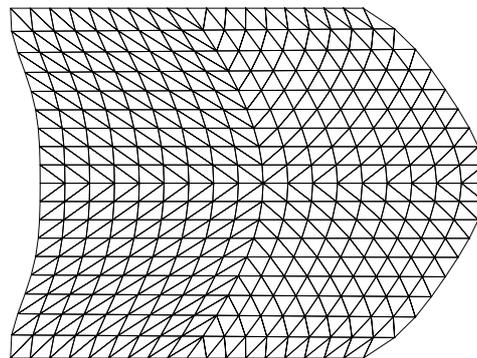
(c) 立面図 2



(d) 平面図

$$\begin{aligned}
 f &= 722.3[\text{kNm}] \\
 S &= 1224[\text{m}^2] \\
 A &= 900.0[\text{m}^2] \\
 L_{ave} &= 369.8[\text{m}^2] \\
 S_{ave} &= 51.66[\text{m}^4]
 \end{aligned}$$

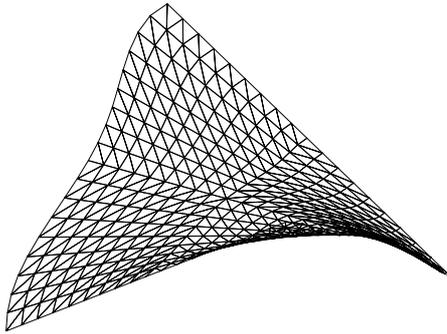
図 5.15 初期形状



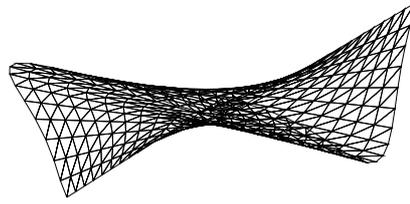
(d) 平面図

$$\begin{aligned}
 f &= 41.56[\text{kNm}] \\
 S &= 1156[\text{m}^2] \\
 A &= 1057[\text{m}^2] \\
 L_{ave} &= 400.0[\text{m}^2] \\
 S_{ave} &= 10.00[\text{m}^4]
 \end{aligned}$$

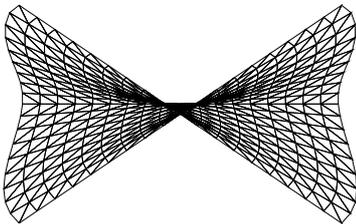
図 5.16 問題 (5.22) の最適形状



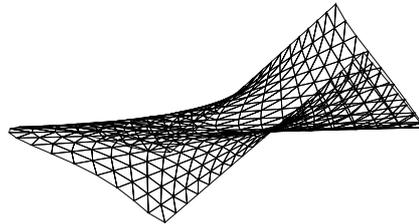
(a) アイソメトリック図



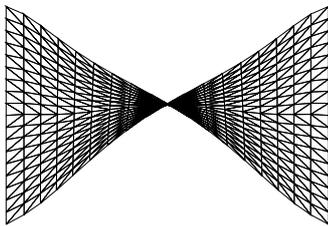
(a) アイソメトリック図



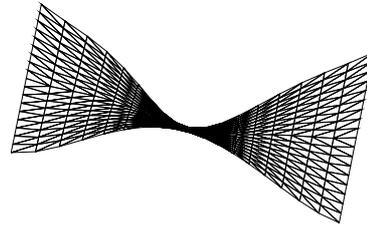
(b) 立面図 1



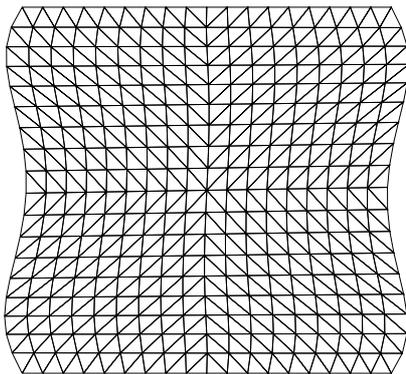
(b) 立面図 1



(c) 立面図 2



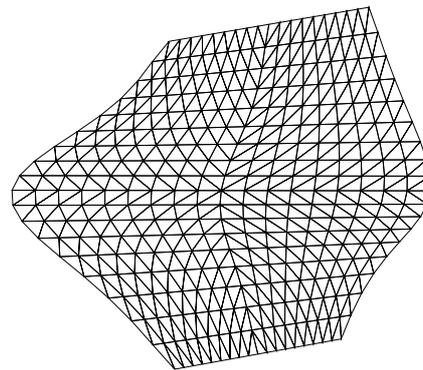
(c) 立面図 2



(d) 平面図

$$\begin{aligned}
 f &= 3.024[\text{kNm}] \\
 S &= 1071[\text{m}^2] \\
 A &= 934.5[\text{m}^2] \\
 L_{ave} &= 400.0[\text{m}^2] \\
 S_{ave} &= 10.00[\text{m}^4]
 \end{aligned}$$

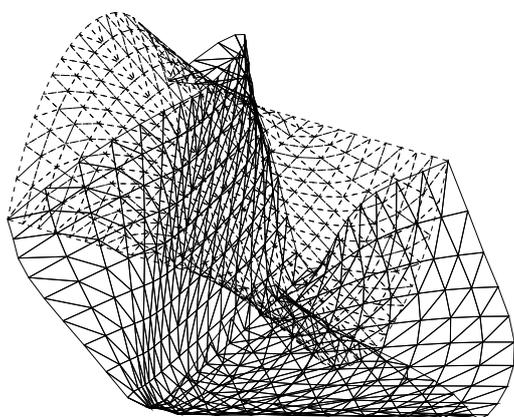
図 5.17 問題 (5.23) の最適形状



(d) 平面図

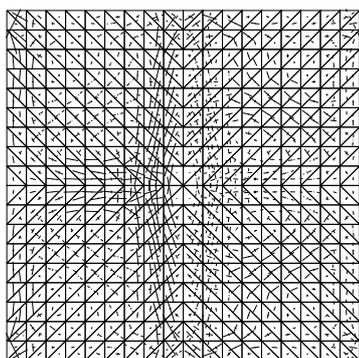
$$\begin{aligned}
 f &= 8.808[\text{kNm}] \\
 S &= 1041[\text{m}^2] \\
 A &= 900.0[\text{m}^2] \\
 L_{ave} &= 400.0[\text{m}^2] \\
 S_{ave} &= 10.00[\text{m}^4]
 \end{aligned}$$

図 5.18 問題 (5.24) の最適形状



$$d_{\max} = 1087[\text{mm}]$$

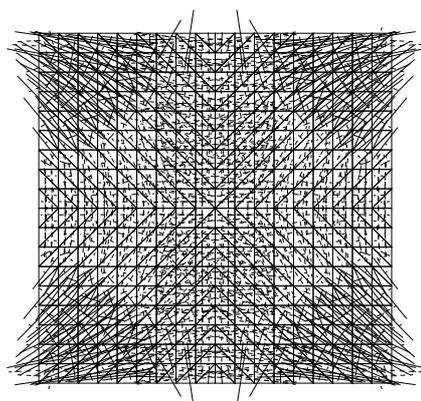
(a) 変形図 (×20)



$$\sigma_{\max}^c = 7.396[\text{N}/\text{mm}^2]$$

$$\sigma_{\max}^t = 7.396[\text{N}/\text{mm}^2]$$

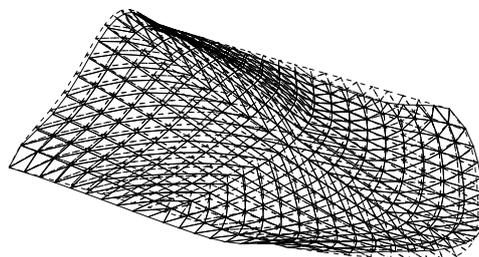
(b) 膜応力分布図



$$\sigma_{\max}^b = 38.48[\text{N}/\text{mm}^2]$$

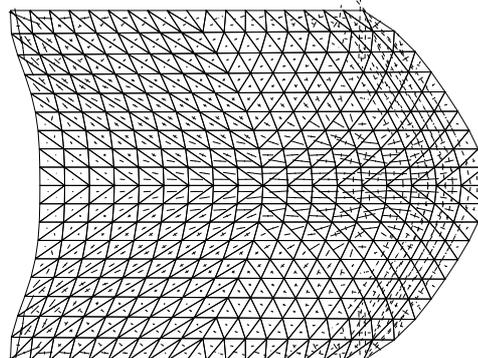
(c) 曲げ応力分布図

図 5.19 初期形状



$$d_{\max} = 90.06[\text{mm}]$$

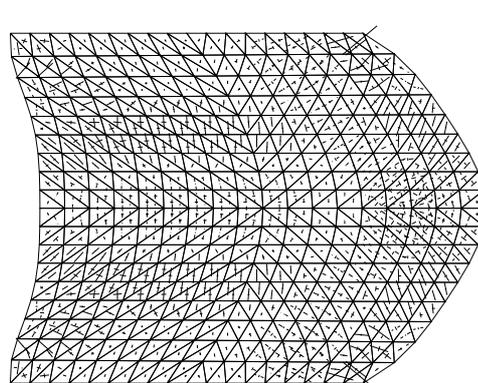
(a) 変形図 (×20)



$$\sigma_{\max}^c = 7.337[\text{N}/\text{mm}^2]$$

$$\sigma_{\max}^t = 19.10[\text{N}/\text{mm}^2]$$

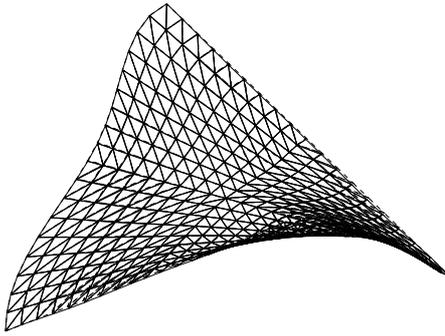
(b) 膜応力分布図



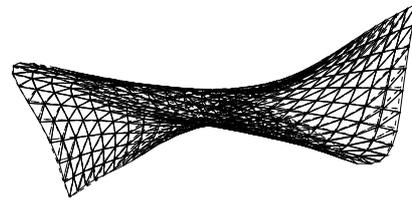
$$\sigma_{\max}^b = 9.083[\text{N}/\text{mm}^2]$$

(c) 曲げ応力分布図

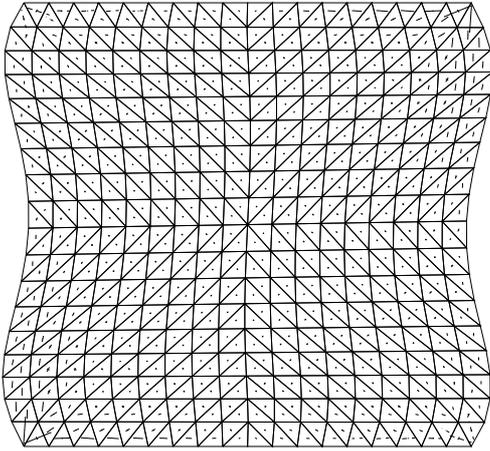
図 5.20 問題 (5.22) の最適形状



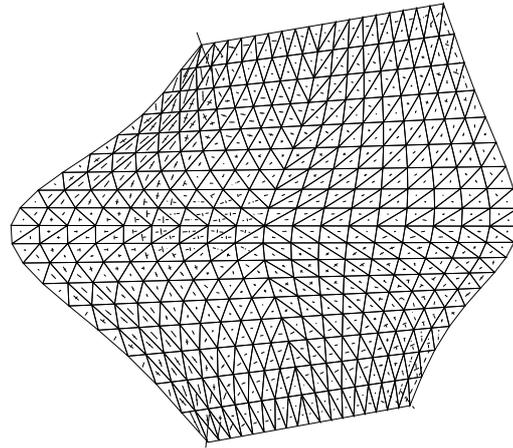
$d_{\max} = 9.752[\text{mm}]$
(a) 変形図 ($\times 20$)



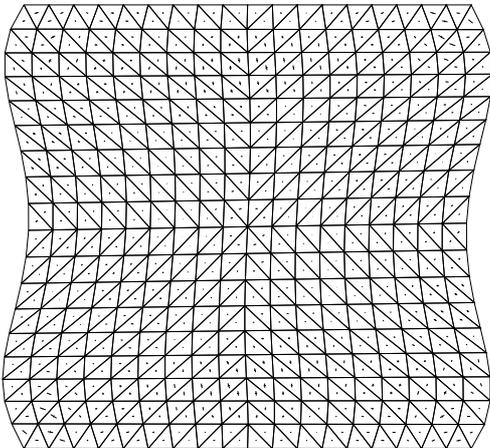
$d_{\max} = 38.02[\text{mm}]$
(a) 変形図 ($\times 20$)



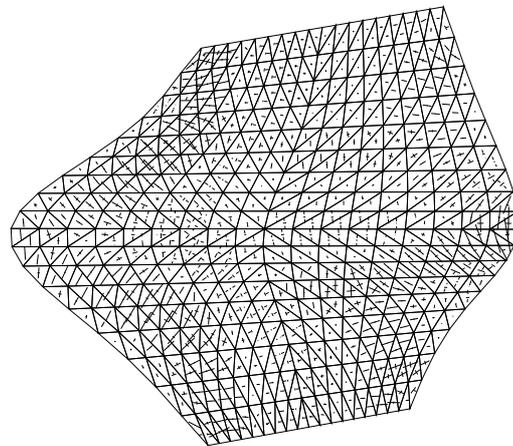
$\sigma_{\max}^c = 6.090[\text{N}/\text{mm}^2]$
 $\sigma_{\max}^t = 5.330[\text{N}/\text{mm}^2]$
(b) 膜応力分布図



$\sigma_{\max}^c = 7.949[\text{N}/\text{mm}^2]$
 $\sigma_{\max}^t = 6.225[\text{N}/\text{mm}^2]$
(b) 膜応力分布図



$\sigma_{\max}^b = 1.381[\text{N}/\text{mm}^2]$
(c) 曲げ応力分布図



$\sigma_{\max}^b = 6.689[\text{N}/\text{mm}^2]$
(c) 曲げ応力分布図

図 5.21 問題 (5.23) の最適形状

図 5.22 問題 (5.24) の最適形状

5.7 数値最適化例 3 – 不整形な形状を有するシェル

5.7.1 最適化モデル

3つ目の最適化モデルは、ランダムに制御点を配置した2つの7次のベジエ曲線のパラメータの等しい点を結んだ直線の集合として定義される線織面とする(図5.23)。境界条件は4隅を固定支持とし、解析条件などはモデル1と同様である。

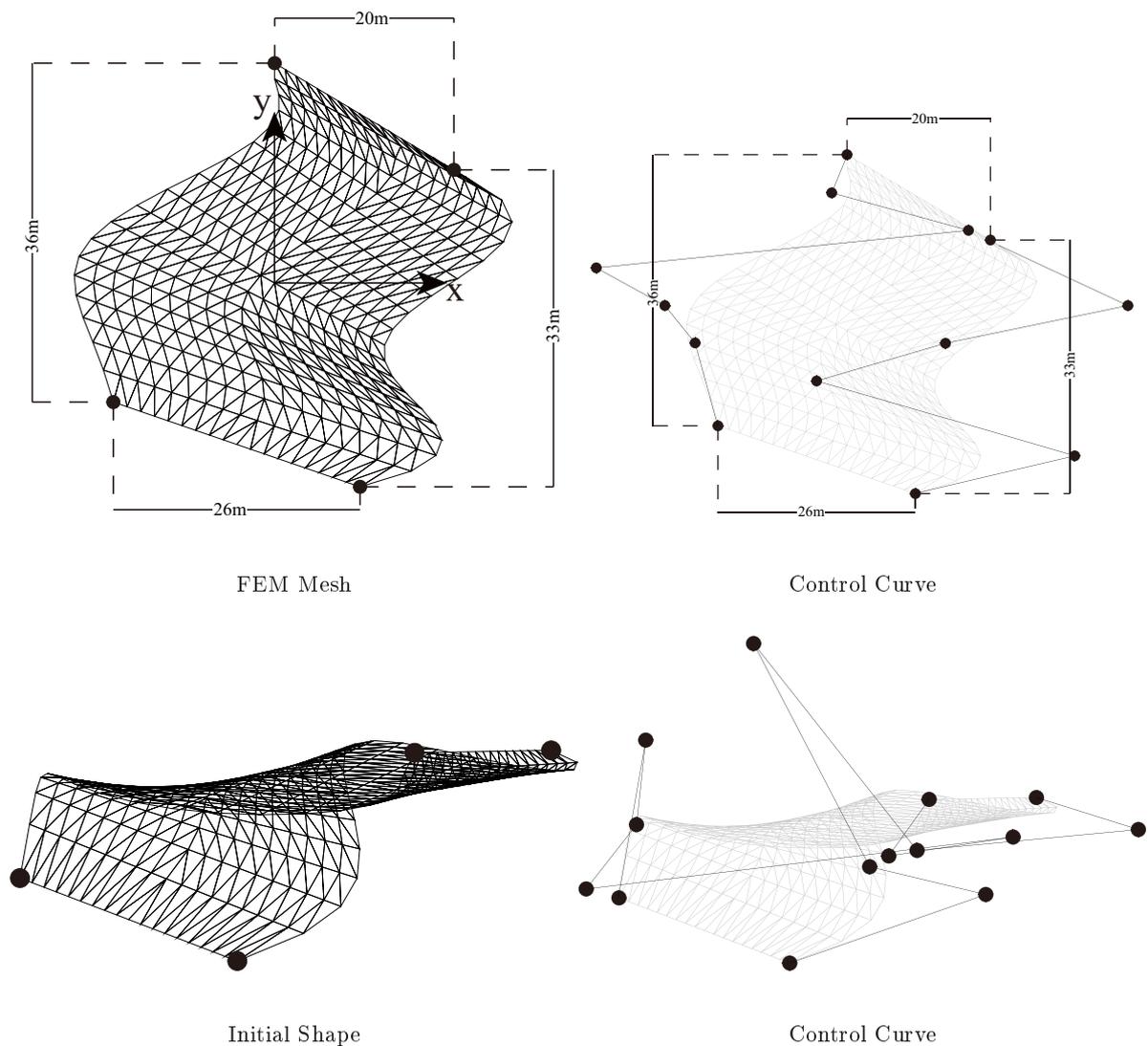


図 5.23 最適化モデル 3

5.7.2 最適化概要

モデル1と同様、問題(5.22)~(5.24)の最適化問題を考える。モデル1と同様、 $\bar{L} = 400$, $\bar{S} = 10$ と設定する。

5.7.3 最適化結果と考察

問題 (5.22), (5.23), (5.24) を解いた結果を次ページ以降にそれぞれ示す。いずれの最適化においても、最適性条件を完全に満足し、最適化は終了した。本手法により得られた最適解曲面のシェル形状を図 5.25~5.27 にそれぞれ示す。また、比較の対象として、初期解曲面のシェル形状を図 5.24 に示す。各図で上方から順に、シェル形状のアイソメトリック図、立面図、平面図をそれぞれ示す。

また、初期形状および最適形状の、自重作用時の弾性変形の様子を図 5.28~5.31 の (a) にそれぞれ示す。

また、初期形状および最適形状のシェル中央面の膜応力、および曲げモーメントによる縁応力の分布図を図 5.28~5.31 の (b) および (c) にそれぞれ示す。

図 5.25 を見ると、支持点を不動とした場合、最適化を行うことで、曲面の複雑な湾曲がなくなり、単曲率のシリンダー形状となっていることが確認できる。図 5.26 と図 5.27 を見ると、モデル 2 と同様に、支点の高さ方向の拘束がない場合の最適形状は HP 曲面に近いものとなった。目的関数の値を見ると、初期解では過大であったひずみエネルギーの値が大きく低減できていることがわかる。

図 5.28~5.31 の (a) を見ると、最適形状の自重作用時の弾性変位は、初期形状に比べ大幅に低減されていることがわかる。

図 5.28~5.31 の (b),(c) を見ると、最適化を行うことで曲げ応力が低減されていることが確認できる。

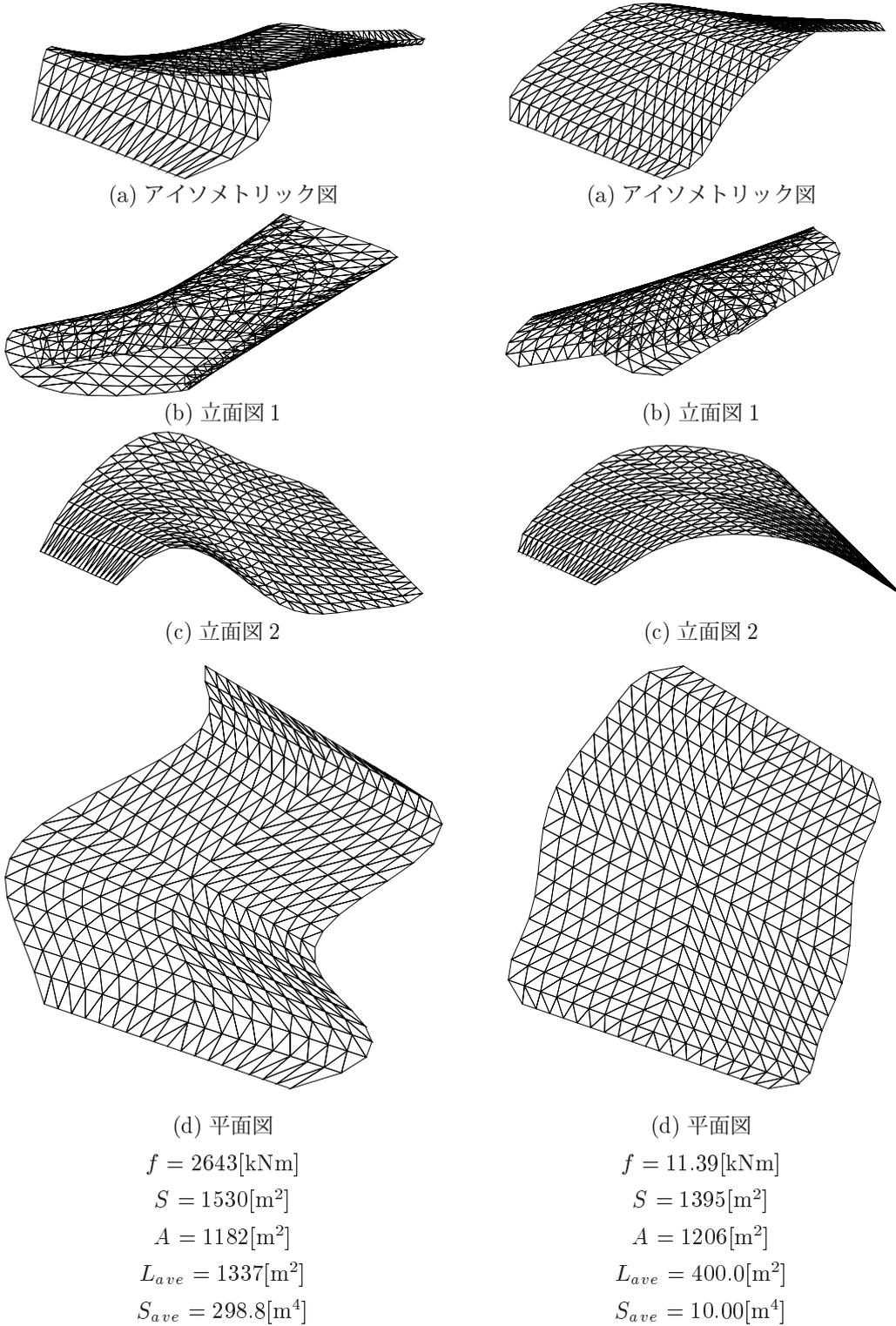
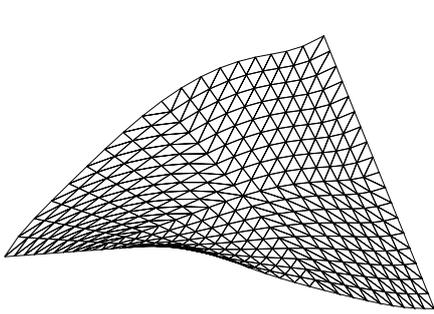
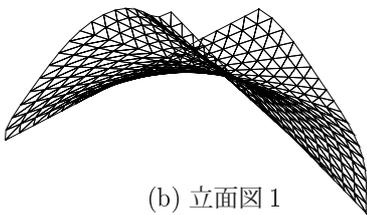


図 5.24 初期形状

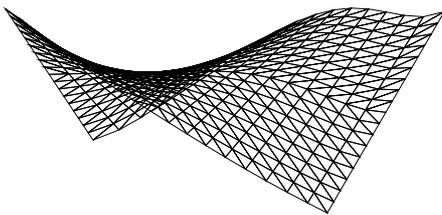
図 5.25 問題 (5.22) の最適形状



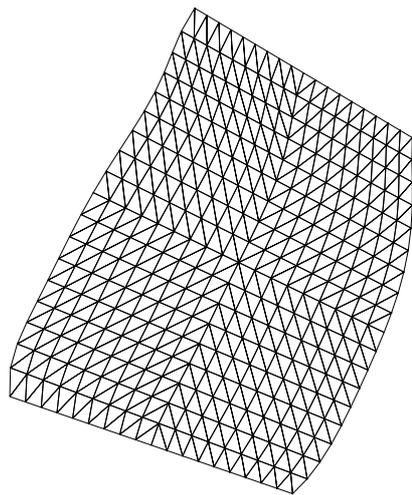
(a) アイソメトリック図



(b) 立面図 1



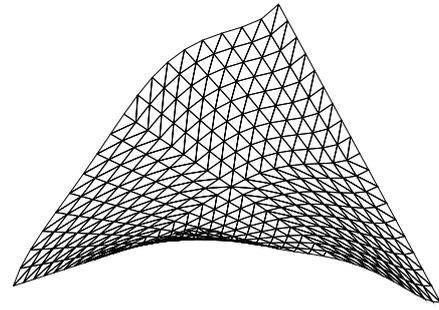
(c) 立面図 2



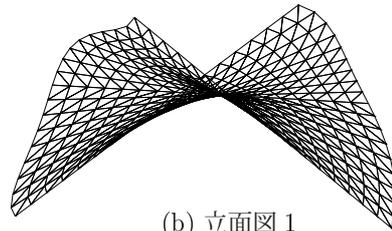
(d) 平面図

$$\begin{aligned}
 f &= 4.929[\text{kNm}] \\
 S &= 1223[\text{m}^2] \\
 A &= 1051[\text{m}^2] \\
 L_{ave} &= 400.0[\text{m}^2] \\
 S_{ave} &= 9.108[\text{m}^4]
 \end{aligned}$$

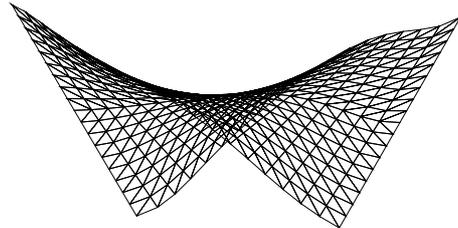
図 5.26 問題 (5.23) の最適形状



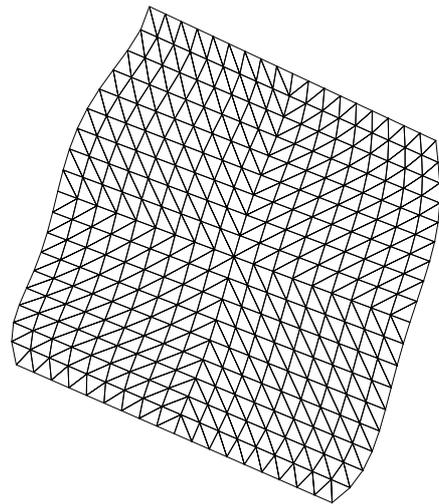
(a) アイソメトリック図



(b) 立面図 1



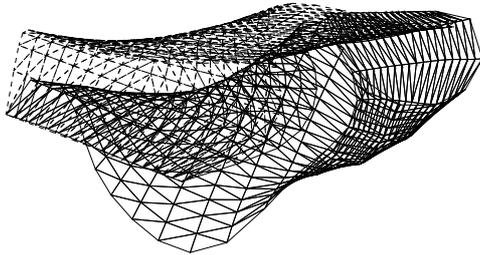
(c) 立面図 2



(d) 平面図

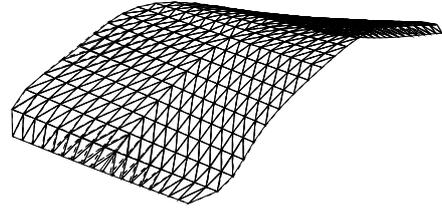
$$\begin{aligned}
 f &= 5.039[\text{kNm}] \\
 S &= 1373[\text{m}^2] \\
 A &= 1182[\text{m}^2] \\
 L_{ave} &= 400.0[\text{m}^2] \\
 S_{ave} &= 10.00[\text{m}^4]
 \end{aligned}$$

図 5.27 問題 (5.24) の最適形状



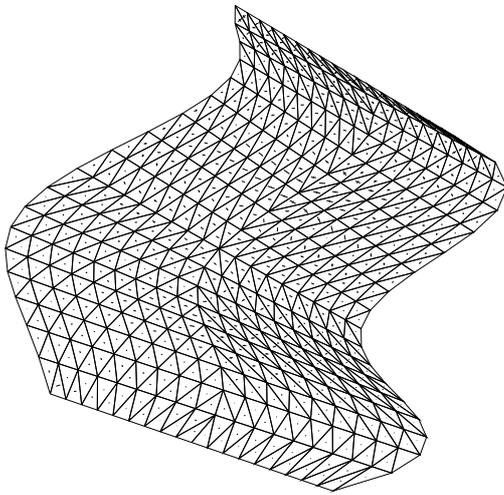
$$d_{\max} = 3825[\text{mm}]$$

(a) 変形図 (×5)



$$d_{\max} = 59.63[\text{mm}]$$

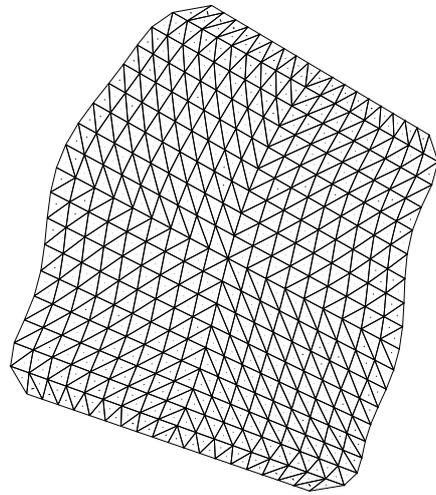
(a) 変形図 (×5)



$$\sigma_{\max}^c = 23.41[\text{N}/\text{mm}^2]$$

$$\sigma_{\max}^t = 22.22[\text{N}/\text{mm}^2]$$

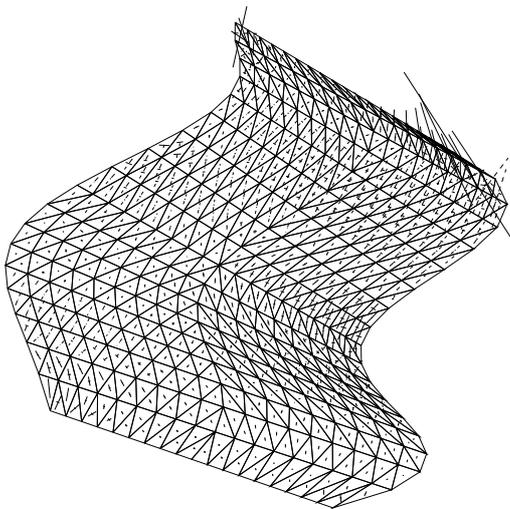
(b) 膜応力分布図



$$\sigma_{\max}^c = 11.93[\text{N}/\text{mm}^2]$$

$$\sigma_{\max}^t = 3.850[\text{N}/\text{mm}^2]$$

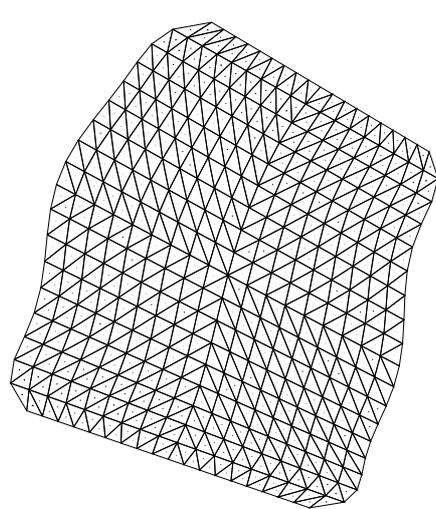
(b) 膜応力分布図



$$\sigma_{\max}^b = 60.63[\text{N}/\text{mm}^2]$$

(c) 曲げ応力分布図

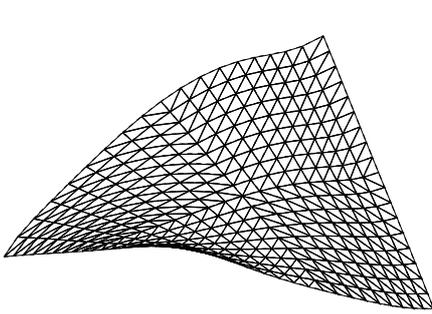
図 5.28 初期形状



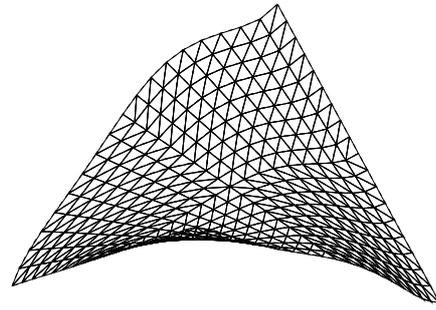
$$\sigma_{\max}^b = 5.754[\text{N}/\text{mm}^2]$$

(c) 曲げ応力分布図

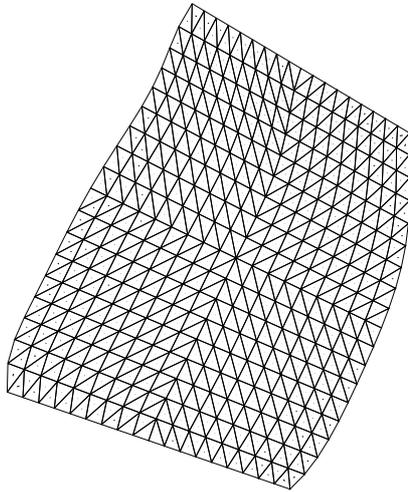
図 5.29 問題 (5.22) の最適形状



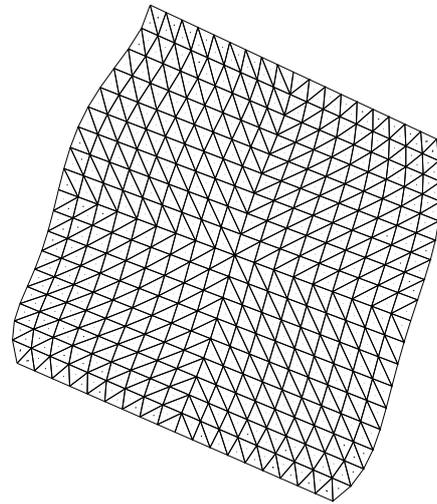
$d_{\max} = 12.74[\text{mm}]$
(a) 変形図 ($\times 5$)



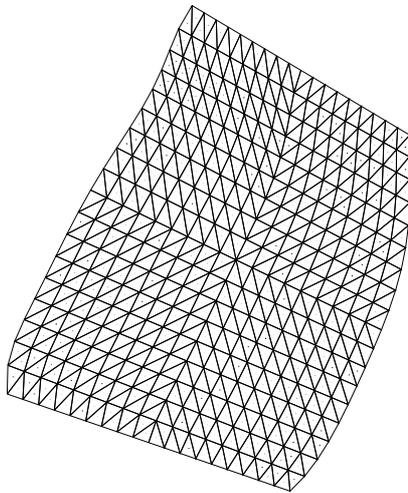
$d_{\max} = 9.344[\text{mm}]$
(a) 変形図 ($\times 5$)



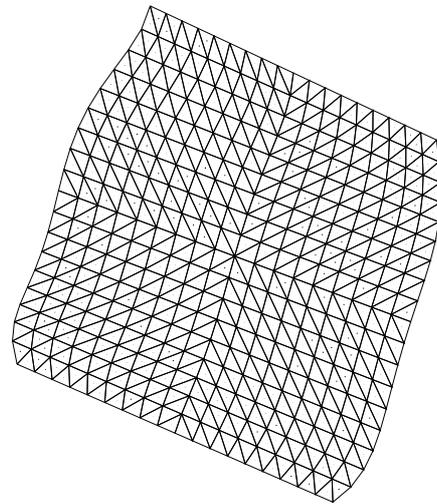
$\sigma_{\max}^c = 8.846[\text{N}/\text{mm}^2]$
 $\sigma_{\max}^t = 5.717[\text{N}/\text{mm}^2]$
(b) 膜応力分布図



$\sigma_{\max}^c = 7.977[\text{N}/\text{mm}^2]$
 $\sigma_{\max}^t = 5.647[\text{N}/\text{mm}^2]$
(b) 膜応力分布図



$\sigma_{\max}^b = 2.250[\text{N}/\text{mm}^2]$
(c) 曲げ応力分布図



$\sigma_{\max}^b = 3.173[\text{N}/\text{mm}^2]$
(c) 曲げ応力分布図

図 5.30 問題 (5.23) の最適形状

図 5.31 問題 (5.24) の最適形状

5.8 5章の結論

本章では、前章と同様に連続体シェルの施工性の向上を目的とし、線織面の形状最適化を行った。ガウス曲率が曲面全体で0であるという明確な成立条件のある可展面と違い、線織面は代数不変量などの値の制約によって成立条件を定義できないため、本章では、テンソル積ベジエ曲面や三角形パッチベジエ曲面によって曲面形状を定義するのではなく、あらかじめ曲面形状を線織面関数によって表現する形状最適化問題を提案し、様々な数値最適化例を通じて手法の有効性を検証した。

まず、曲面の形状表現の自由度を損なうことなく最適化の際の未知量の数を低減させるため、線織面を2つのベジエ曲線のパラメータの等しい点を結んだ直線の集合として定義し、その制御点座標を設計変数とした。さらに、実行可能領域の拡張のために、制御点の x, y 座標も設計変数として取扱った。 x, y, z 座標すべてを設計変数とした場合に生じる、要素形状の不良や水平投影面積の消失といった問題を防ぐために、各要素の面積の平均からの差の二乗和、各要素の辺の長さの平均からの差の二乗和にそれぞれ上限値を、シェルの水平投影面積に下限値を設けた。得られた主要な結果は以下のようにまとめられる。

- 1) 線織面を2つのベジエ曲線のパラメータの等しい点を結んだ直線の集合として定義することで、制御点の位置によって様々な線織面を表現可能である。
- 2) x, y, z 座標すべてを設計変数とした場合、要素形状にばらつきが生じるため、各要素の面積や辺の長さが不均一とならないような制約条件が必要である。
- 3) 強い初期解依存性があり、制約条件が同じでも、初期解によって最適形状が異なる。
- 4) 強い制約条件依存性があり、形状が同じでも、制約条件によって最適形状が異なる。
- 5) 本手法により、高い剛性を有する線織面が得られる。
- 6) 4隅を点支持された線織面では、支点の不動制約を設けずにひずみエネルギーを最小化すると、HP曲面に近い形状となる。

1) については、線織面の定義式(2.81)さえ満たしてれば、線織面を形成する2つの曲線は任意の関数を選んでよいので、前章までと同様ベジエ曲線を用いることで形状表現の自由度を大きく損なうことなく設計変数を低減できる。また、形状の滑らかさも保証される。

2) について、線織面を定義する2つの曲線にフレキシビリティを持たせても、線織面関数そのものに表現可能な形状は限られているので、高い剛性を有する形状を得るためには、制御点の鉛直方向座標だけでなく、 x, y 座標も同時に設計変数とすることが必要である。その際、要素に対する制約がないと、要素形状のばらつきは避けられない現象であり、解析が困難になることがほとんどである。本手法では、各要素の面積の平均からの差の二乗和と、各要素の辺の長さの平均からの差の二乗和を小さく抑えてあげることで同種の問題を解決した。本研究では、一律に $\bar{L} = 400, \bar{S} = 10$ という値を設定したが、これらの値は、繰り返し最適化をおこなって現実的な形状が得られる値を試行錯誤的に決定したものである。得られる最適解に応じてこれらのパラメータを適切にチューニングする必要がある。値の設定の目安となるような指標の確立が今後の課題である。

3), 4) については、最適解が局所最適解であることを示すものであるが、元来逐次二次計画法には局所的収束性があり、最適解が大域的最適解である保証はないので、当然の結果といえる。ただし、前章までの最適化結果からは、解が局所最適解である傾向はみられなかった。これは、前章までの最適化問題が、設計変数が制御点 z 座標のみで、制約条件関数も面積制約と不変量制約のみであるというシンプルな問題であったのに対し、本章での最適化問題は、設計変数を3次元に拡張したばかりでなく、要素形状のばらつきを制御するための制約条件を複数設けた複雑な問題となっているために、多くの局所最適解が存在する問題となっていると考えられる。大域的最適解を得たい場合には、条件を変えて反復解析を行うか、発見的手法との併用が考えられるが、建築構造物においては解が大域的最適解

か否かは重要な問題ではなく、あくまで設計者の要求性能を満足しているか否かが重要であるので、このように条件によって異なる局所的最適解が得られるという性質は、条件を変えることで要求性能を満たす解が複数得られるという点で都合の良い性質と考えることもできる。

5), 6) について、前章でおこなった可展条件を導入した形状最適化においては、可展面である曲面が錐面や柱面などきわめて限定的な曲面に限られるため、解の多様性を確保しつつ力学的合理性の高い形状を生み出すためには区分領域に分割する必要があったのに対し、線織面は、曲面全体を1の線織面として最適化をおこなった場合でも、高い剛性を有する多様な最適形状が得られることが確認できた。また、本章で扱った最適化モデルはいずれも4隅を点支持されたモデルであったが、支点の不動条件がない場合、得られた最適解はHP曲面に近い傾向が見られた。HP曲面は線織面であるので型枠作成が容易であり、古くから建築の形態にも用いられてきたが、それが力学的にも優れた形状であることが新ためて再確認される結果となった。

第6章

ひずみエネルギーと部材長一様化を考慮したラチスシェルの形状最適化

6.1 はじめに

前章までは、連続体シェルを考えた。しかし、現在建設される多くの大空間構造物は、骨組部材で構成される。そのようなシェルを、ラチスシェルという。

本章では、ラチスシェルに対して、3章で示した手法と同様のプロセスにより、ひずみエネルギーを目的関数として形状を最小化する。しかし、施工性に関する制約は、ラチスシェルでは、型枠ではなく、部材長や部材角に関係する。そこで、ラチスシェルの部材長を一様化するような指標として、部材長の平均部材長からの差の2乗和を制約条件に導入し、部材長一様化と、ひずみエネルギー最小化の2つの目的関数を考慮した多目的最適化問題を定式化することにより、長さの等しい部材で構成され、かつ高い剛性を有するシェル形状を求める。

構成部材がすべて等断面の場合、部材長を一様化することによって、1種類の部材でラチスシェルを構成することが可能となり、部材の管理も容易になり、施工性が向上すると考えられる。また、極端に長い部材の存在を回避でき、個材座屈を考慮した設計においても有効である。さらに、ラチス材が仕上げ面に隠れず意匠として現れる場合、その網目の均一性は重要なデザイン的要素となる。しかし、曲面形状を有するラチスシェルを1種類の部材で構成するのは一般には困難である。

本章では、部材長を一様化するための指標として、各部材の部材長の平均部材長からの差の2乗和を考える。これは設計変数の連続関数となるため、陽に感度解析を行うことが可能であり、1つの関数で部材長の一様性を評価できるため、部材数分の制約条件を付加して各部材の長さを個別に制約する場合と比べて最適化の収束性が向上すると考えられる。前章までの形状最適化問題と異なり、本章では制御点もしくは節点の x, y, z 方向すべてを設計変数とする。さらに、ベジエ曲面のパラメータも設計変数として扱うことで、実行可能領域の拡大を試みる。

パレート解集合を求めて、部材長の偏差と、ひずみエネルギーが、トレードオフ関係にあることを示す。

第6.2節では、勾配ベクトルを求める感度解析について述べる。

第6.4節では、本論文で使用する手法を含めた複数の部材長一様化の方法について概説し、おのおのの解の収束性や数値計算上の留意点などを述べる。

第6.5節では、三角形グリッドで構成されるラチスシェルに対して、シェルの部材長の平均部材長からの差の2乗和に制約を有する形状最適化問題、あるいはシェルの部材長の平均部材長からの差の2乗和を最小化する形状最適化問題を定式化し、それらを解くことで得られた解の幾何学的特性および力学的特性について考察する。

第6.6節では、四角形グリッドで構成されるラチスシェルに対して、シェルの部材長の平均部材長からの差の2乗和に制約を有する形状最適化問題、あるいはシェルの部材長の平均部材長からの差の2乗和を最小化する形状最適化問題を定式化し、それらを解くことで得られた解の幾何学的特性および力学的特性について考察する。

第6.7節では、部材をグルーピングすることによって、各グループ内での部材長の最大値と最小値の差を大きく低減でき、少ない種類の部材でラチスシェルを構成可能となることを示す。

第6.8節では、本章で提案した形状最適化手法により得られた結論を述べる。

本章での最適化問題での共通事項は以下のとおりである。

- 応力算定は有限要素法による線形静的解析によりおこなう。
- 有限要素は三次元梁要素を用いる。
- 材料は鋼材とし、ヤング率を 210GPa, ポアソン比を 0.3 とする。
- 外力は自重として単位体積重量 77kN/m^3 を作用させる。
- 部材断面は一樣とし、引張強さ 235.0N/mm^2 , 外径 165.2mm, 厚さ 4.5mm の円形鋼管とする。
- 最適化問題の定式化に際し、自由度数を n , 部材数を m , 節点変位ベクトルを $\mathbf{d} \in R^n$, 線形弾性剛性マトリクスを $\mathbf{K} \in R^{n \times n}$, 総部材長を L で表わす。
- 制御点座標 q_x, q_y, q_z から支点上の制御点座標を除いたベクトルを $\mathbf{q}_x^*, \mathbf{q}_y^*, \mathbf{q}_z^*$ で表す。
- 初期形状の値を下添え字の 0 で表わす。

6.2 感度解析

逐次2次計画法で最適解を求めるためには、目的関数および制約関数の設計変数に関する偏微分係数を求める必要がある。なお、本章では、設計変数はテンソル積ベジエ曲面もしくは三角形パッチベジエ曲面の制御点の x, y, z 座標 q_x, q_y, q_z 、および節点位置を定めるパラメータ s_i, t_i (三角形パッチベジエ曲面の場合は u_i, v_i) である。

本章で目的関数あるいは制約関数とする指標は、ひずみエネルギーと部材長の関数である。これらの q_x, q_y, q_z に関する感度解析については、設計変数が x, y 方向の成分だけ増えることとなるが、計算プロセス自体は3章と全く同一である。よってこれらの記述は省略する。ここではテンソル積ベジエ曲面上の節点位置を定義するパラメータ s_i, t_i および三角形パッチベジエ曲面のパラメータ u_i, v_i に関する節点 z 座標の感度係数を導く。節点 y, z 座標に関する感度係数の導出は節点 z の場合と同様なので省略する。なお、有限要素の各種マトリクスおよびその微分については、節点 x, y, z 座標すべてに関する微分を付録Bに記しているの、そちらを参照されたい。

6.2.1 節点 z 座標に関する感度係数とベジエ曲面のパラメータに関する感度係数の関係

■テンソル積ベジエ曲面 有限要素の節点は $(I' + 1) \times (J' + 1)$ 個網目状に配置されているとし、節点の z 座標を並べたベクトルを r_z 、各節点に対応するパラメータのベクトルを s, t とする。

$$r_z = [z(s_0, t_0), \dots, z(s_0, t_{J'}), \dots, z(s_{I'}, t_0), \dots, z(s_{I'}, t_{J'})]^T \quad (6.1)$$

$$\begin{aligned} s &= [s_0, s_1, \dots, s_{I'}]^T & 0 \leq s_i \leq s_{i+1} \leq 1 (i = 0, 1, \dots, I' - 1) \\ t &= [t_0, t_1, \dots, t_{J'}]^T & 0 \leq t_j \leq t_{j+1} \leq 1 (j = 0, 1, \dots, J' - 1) \end{aligned} \quad (6.2)$$

このとき、節点 z 座標のパラメータ s, t に関する感度係数 $\frac{\partial r_z}{\partial s}$, $\frac{\partial r_z}{\partial t}$ は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_z}{\partial s} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial z(s_0, t_0)}{\partial s_0} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial z(s_0, t_1)}{\partial s_0} & 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{\partial z(s_0, t_{J'})}{\partial s_0} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\partial z(s_1, t_0)}{\partial s_1} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial z(s_1, t_1)}{\partial s_1} & 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{\partial z(s_1, t_{J'})}{\partial s_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 & \ddots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\partial z(s'_{I'}, t_0)}{\partial s'_{I'}} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial z(s'_{I'}, t_1)}{\partial s'_{I'}} & 0 & \dots & 0 & \dots & \frac{\partial z(s'_{I'}, t_{J'})}{\partial s'_{I'}} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial r_z}{\partial t} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial z(s_0, t_0)}{\partial t_0} & \dots & \frac{\partial z(s_{I'}, t_0)}{\partial t_0} & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \frac{\partial z(s_0, t_1)}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial z(s_{I'}, t_1)}{\partial t_1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots & \ddots & \ddots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \frac{\partial z(s_0, t_{J'})}{\partial t_{J'}} & \dots & \frac{\partial z(s_{I'}, t_{J'})}{\partial t_{J'}} & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (6.3) \end{aligned}$$

式(6.3)中の $\frac{\partial r_z}{\partial s}$, $\frac{\partial r_z}{\partial t}$ の0以外の各成分は式(C.23)を偏微分することで次式のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial z(s_k, t_l)}{\partial s_k} &= \sum_{i=0}^{I'} \sum_{j=0}^{J'} q_{z,ij} \frac{\partial B_{I,i}(s_k)}{\partial s_k} B_{J,j}(t_l) \\ \frac{\partial z(s_k, t_l)}{\partial t_l} &= \sum_{i=0}^{I'} \sum_{j=0}^{J'} q_{z,ij} B_{I,i}(s_k) \frac{\partial B_{J,j}(t_l)}{\partial t_l} \end{aligned} \quad (6.4)$$

なお、バーンスタイン基底関数のパラメータに関する偏微分は2.3.1節の式(2.41)にて導出済みである。

■**三角形パッチベジエ曲面** 三角形パッチベジエ曲面のパラメータに関する感度係数は、テンソル積ベジエ曲面の場合と同様であるので、定式化は省略する。

6.2.2 総部材長の節点 z 座標に関する感度解析

節点数を n 、要素数を m とする。全体座標系における部材 k の両端の節点座標を (x_i, y_i, z_i) , (x_j, y_j, z_j) とすると、部材長 l_k は次式であらわされる。

$$l_k = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (6.5)$$

これを節点 z 座標 $z_l (l = 1, \dots, n)$ で偏微分すると、

$$\frac{\partial l_k}{\partial z_l} = \begin{cases} 0 & (l \neq i, j) \\ \frac{z_i - z_j}{l_k} & (l = i) \\ -\frac{z_i - z_j}{l_k} & (l = j) \end{cases} \quad (6.6)$$

ラチスシエルの総部材長 L は次式で表わされる。

$$L = \sum_{k=1}^m l_k \quad (6.7)$$

以上より、ラチスシエルの総部材長 L の z_l に関する感度係数は次のように書ける。

$$\frac{\partial L}{\partial z_l} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial l_k}{\partial z_l} \quad (6.8)$$

6.2.3 部材長の平均部材長からの差の2乗和の節点座標に関する感度解析

6.2.2 項と同様に、平均部材長を l_{ave} とすると、ラチスシエルの部材長の平均部材長からの差の2乗の総和 g は次式で表される。

$$g = \sum_{k=1}^m (l_k - l_{ave})^2 \quad (6.9)$$

ここで平均部材長は l_{ave} は、総部材長 L と要素数 m を用いて

$$l_{ave} = \frac{L}{m} \quad (6.10)$$

と表される。これを用いて式 (6.9) を展開して整理すると

$$\sum_{k=1}^m (l_k - l_{ave})^2 = l_1^2 + \dots + l_m^2 - \frac{L^2}{m} \quad (6.11)$$

ここで、 $l_1^2 + \dots + l_m^2 = L_2$ とおく。部材 k の長さの2乗

$$l_k^2 = (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2 \quad (6.12)$$

を節点 z 座標 $z_l (l = 1, \dots, n)$ で偏微分すると、

$$\frac{\partial l_k^2}{\partial z_l} = \begin{cases} 0 & (l \neq i, j) \\ 2(z_i - z_j) & (l = i) \\ 2(z_j - z_i) & (l = j) \end{cases} \quad (6.13)$$

であり、 L_2 の節点 z 座標に関する感度は次式で求められる。

$$\frac{\partial L_2}{\partial z_l} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial l_k^2}{\partial z_l} \quad (6.14)$$

以上より、 g の z_l に関する感度係数は次のように書ける。

$$\frac{\partial g}{\partial z_l} = \frac{\partial L_2}{\partial z_l} - \frac{2L}{m} \frac{\partial L}{\partial z_l} \quad (6.15)$$

なお、 x_l, y_l に関する感度についても同様に計算できる。

6.3 曲げモーメントの表記

梁要素の局所座標系を図 6.1 のように定める*1。ここで曲げモーメントについて、 M_{y1}, M_{y2} を面外方向曲げモーメント、 M_{z1}, M_{z2} を平面方向曲げモーメントと呼称する。曲げモーメント図については、可視化のために面外方向曲げモーメント、平面方向曲げモーメントともに全体座標系における $x-y$ 平面に記述することとする。また、断面は円形鋼管とし、各部材端の曲げモーメントは次式により評価する。

$$M_i = \sqrt{M_{y_i}^2 + M_{z_i}^2} \quad (i = 1, 2) \quad (6.16)$$

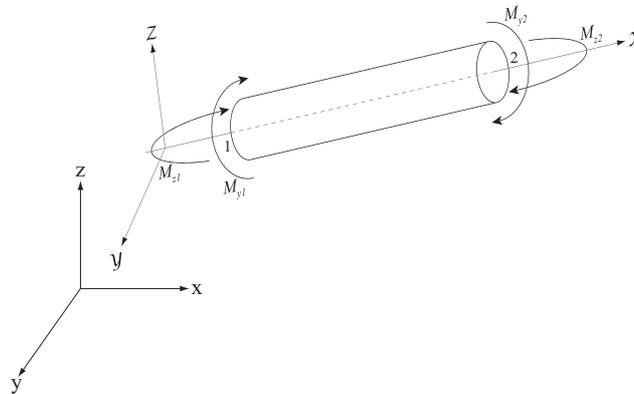


図 6.1 全体座標系と局所座標系

*1 すべての要素について、要素座標系の y 軸、 z 軸の全体座標系の $y-z$ 平面に対する正射影がそれぞれ全体座標系の y 軸、 z 軸と平行となるように要素座標系を取っている。

6.4 部材長一様化の方法

本章では、部材長の一様性の指標としてシェルの部材長の平均部材長からの差の2乗和を採用しているが、ここではその利点について説明する。自由度数を n 、部材数を m 、節点変位ベクトルを $\mathbf{d} \in R^n$ 、線形弾性剛性マトリクスを $\mathbf{K} \in R^{n \times n}$ とし、初期形状の値を下添え字の0で表わす。

6.4.1 最適化問題の定式化

部材長が一様化され、かつひずみエネルギーの小さいシェル形状を得るためには、理論的には次の問題を考えればよいこととなる。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \\ & \text{subject to} && \begin{cases} L(\mathbf{X}) - L_0 \leq 0 \\ l_i(\mathbf{X}) = l_{ave}(\mathbf{X}) \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{cases} \end{aligned} \quad (6.17)$$

ここに、 l_i は i 番目の部材の部材長を表す。

なお、支点の不動条件は支点上の制御点座標を設計変数に含めないことで考慮する ($\mathbf{X} = [\mathbf{q}_x^{*\top}, \mathbf{q}_y^{*\top}, \mathbf{q}_z^{*\top}]$)。

この最適化問題は、 m 個の等式制約を有している。 m は本論文で扱うモデルにおいては一般に100を大きく超えるオーダーであり、多数の等式制約の導入は、解の収束性の著しい低下の原因となる。また、問題設定によっては、そもそも部材長を一様化することは不可能である可能性もあり、その場合、実行可能領域に解が存在しないため、最適解が得られない可能性がある。

そのため、部材長を一様化する指標は目的関数として設定し、ひずみエネルギーを指定する問題を扱う方法が考えられる。既往の研究では、例えば部材長の最大値と最小値の差を最小化するという手法が提案されている。そのような問題は例えば次のように記述できる。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f_2(\mathbf{X}) = l_{\max} - l_{\min} \\ & \text{subject to} && \begin{cases} L(\mathbf{X}) - L_0 \leq 0 \\ f(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \leq \bar{f} \\ l_{\min} \leq l_i(\mathbf{X}) \leq l_{\max} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{cases} \end{aligned} \quad (6.18)$$

ここで、 l_{\max} 、 l_{\min} はそれぞれ部材長の最大値および最小値を表す。また、 \bar{f} はひずみエネルギーの上限値である。

この最適化問題の設計変数は $\mathbf{X} = [\mathbf{q}_x^{*\top}, \mathbf{q}_y^{*\top}, \mathbf{q}_z^{*\top}, l_{\max}, l_{\min}]$ となる。 l_{\max} と l_{\min} を設計変数に組み込むこのような手法は、問題設定は(6.18)式と若干異なるものの、例えば文献³³⁾などに適用例がみられる。感度解析が容易であり、部材長に関する制約は不等式制約であるため、式(6.17)と比べて解の収束性は改善され、また、この最適化問題には解が必ず存在するので、部材長一様化が不可能な問題に対しても、できる限り部材長の一様化された解を得ることができる。しかしながら、制約条件の数が部材数の2倍以上と多いため、本論文で扱うような比較的規模の大きい最適化問題には不向きであると考えられる。

制約条件の個数を減らす1つの方法としては、次のように部材長の上限値にのみ制約を与える方法も考えられる。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f_3(\mathbf{X}) = l_{\max} \\ & \text{subject to} && \begin{cases} L(\mathbf{X}) - L_0 \leq 0 \\ f(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \leq \bar{f} \\ l_i(\mathbf{X}) - l_{\max} \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{cases} \end{aligned} \quad (6.19)$$

この最適化問題の設計変数は $\mathbf{X} = [\mathbf{X} = [\mathbf{q}_x^{*\top}, \mathbf{q}_y^{*\top}, \mathbf{q}_z^{*\top}, l_{\max}]$ となる。この最適化問題は、ひずみエネルギーと総部材長に制約を有し、部材長の最大値を最小化する問題である。制約条件の数はまだ多いものの、部材長に関する制約

数は半減される。この最適化問題を解くことで、部材長は概ね一様化されるが、完全な一様化は必ずしもなされない。なぜなら、総部材長制約が不等式制約である場合には、 $l_i - l_{\max} \leq 0$ という不等式制約がすべての部材で活性となる保証はないからである。一方で、以下の最適化問題のように、総部材長制約を等式制約とした場合には、部材長一様解が存在する場合には、 $l_i - l_{\max} \leq 0$ という不等式制約は必ず活性となる。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f_3(\mathbf{X}) = l_{\max} \\ & \text{subject to} && \begin{cases} L(\mathbf{X}) - L_0 = 0 \\ f(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \leq \bar{f} \\ l_i(\mathbf{X}) - l_{\max} \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{cases} \end{aligned} \quad (6.20)$$

しかし、やはり対象とする問題が大規模となった場合、制約条件が多いことや総部材長制約が等式制約となったために、収束性が低下する可能性がある。

そこで本研究では次のような多目的最適化問題を提案する ($\mathbf{X} = [\mathbf{q}_x^{*\top}, \mathbf{q}_y^{*\top}, \mathbf{q}_z^{*\top}]$)。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \leq \bar{f} \quad \text{and} \quad g(\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^m (l_k - l_{ave})^2 \\ & \text{subject to} && L(\mathbf{X}) - L_0 \leq 0 \end{aligned} \quad (6.21)$$

本研究では、問題 (6.21) の解を、制約法を用いて、

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && g(\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^m (l_k - l_{ave})^2 \\ & \text{subject to} && \begin{cases} L(\mathbf{X}) - L_0 \leq 0 \\ f(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \leq \bar{f} \end{cases} \end{aligned} \quad (6.22)$$

の \bar{f} の値を変化させながら求める。ラチスシエルの部材長の平均部材長からの差の2乗和を目的関数として採用することで、制約条件を減らすことができ、この目的関数が0となれば、部材長は厳密に一様化される。ひずみエネルギー制約や総部材長制約は、最適化条件や収束性の良し悪しに応じて、適宜等式制約または不等式制約とすることとなる。式 (6.22) の最適化問題は、次のように、ひずみエネルギーを目的関数とした問題として解くことも可能である。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \\ & \text{subject to} && \begin{cases} L(\mathbf{X}) - L_0 \leq 0 \\ g(\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^m (l_k - l_{ave})^2 = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.23)$$

この最適化問題は、等式制約 $\sum_{k=1}^m (l_k - l_{ave})^2 = 0$ を満足する解がない場合は最適解を得ることができないが、部材長一様解が存在する場合は、ひずみエネルギーの最小化された部材長一様解を得ることが可能である。

6.4.2 最適化例による収束性の比較

以下では、ラチスシエルの部材長の平均部材長からの差の2乗和を指標として採用することの優位性を示す最適化例を紹介する。最適化モデルは、図に示すような正方形平面を有するラチスシエルとする。ここで、支持条件は4隅を固定支持とする。

初期形状は次のような双2次関数で与える。

$$z = h(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) \quad (6.24)$$

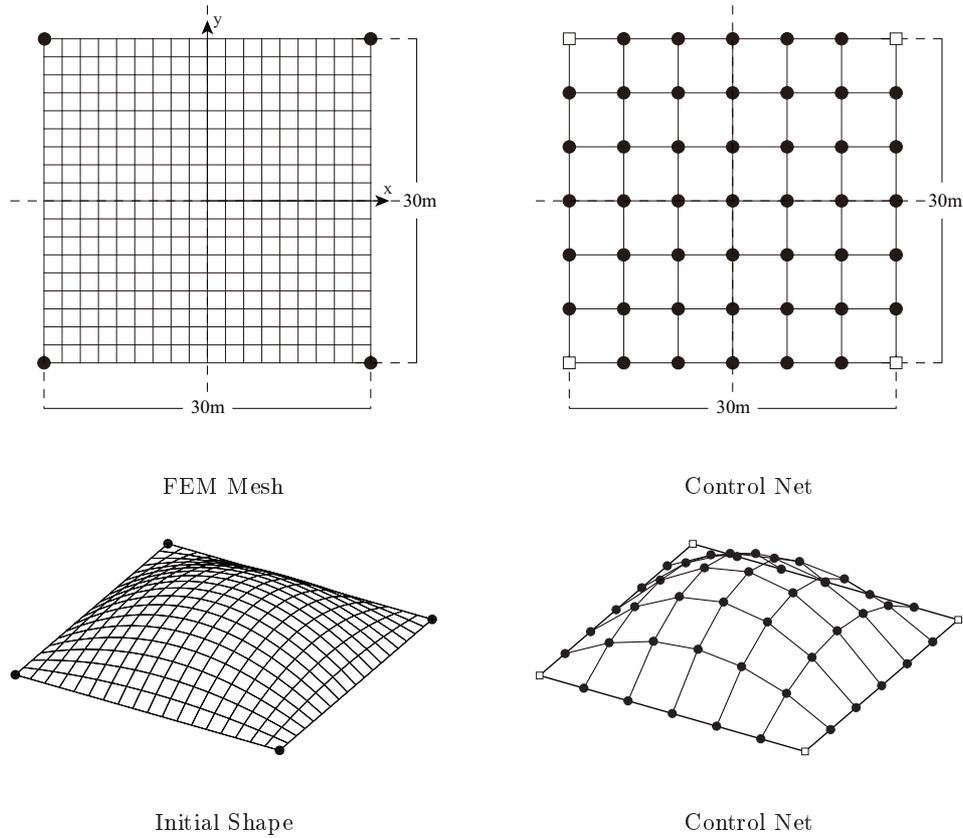


図 6.2 最適化モデル 1

ここで、支点を含む平面の中央を座標の原点とし、スパン 30m、ライズ 6m ($a = b = 15$, $h = 6/a^2b^2$) とする。形状はテンソル積ベジエ曲面により記述し、制御点は曲面全体に 7×7 の格子状に配置する。最適化の際の設計変数は、支持点を不動とするために支持点上の制御点を除いた制御点の z 座標 q_z とする。そのため、設計変数の数は 45 である。弾性解析はフルモデル解析とし、1 部材 1 要素とし、要素数は 684 要素である。

次のベンチマーク問題を解くことで、シェルの部材長の平均部材長からの差の 2 乗和を指標として採用することの優位性について示す。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && g(\mathbf{q}_x^*, \mathbf{q}_y^*, \mathbf{q}_z^*) = \sum_{k=1}^m (l_k - l_{ave})^2 \\ & \text{subject to} && \begin{cases} L(\mathbf{q}_x^*, \mathbf{q}_y^*, \mathbf{q}_z^*) - L_0 = 0 \\ f(\mathbf{q}_x^*, \mathbf{q}_y^*, \mathbf{q}_z^*) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} = 0.50 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f_2(\mathbf{q}_x^*, \mathbf{q}_y^*, \mathbf{q}_z^*, l_{\max}, l_{\min}) = l_{\max} - l_{\min} \\ & \text{subject to} && \begin{cases} L(\mathbf{q}_x^*, \mathbf{q}_y^*, \mathbf{q}_z^*, l_{\max}, l_{\min}) - L_0 = 0 \\ f(\mathbf{q}_x^*, \mathbf{q}_y^*, \mathbf{q}_z^*, l_{\max}, l_{\min}) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} = 0.50 \\ l_{\min} \leq l_i(\mathbf{q}_x^*, \mathbf{q}_y^*, \mathbf{q}_z^*, l_{\max}, l_{\min}) \leq l_{\max} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{cases} \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f_3(\mathbf{q}_x^*, \mathbf{q}_y^*, \mathbf{q}_z^*, l_{\max}) = l_{\max} \\ & \text{subject to} && \begin{cases} L(\mathbf{q}_x^*, \mathbf{q}_y^*, \mathbf{q}_z^*, l_{\max}) - L_0 = 0 \\ f(\mathbf{q}_x^*, \mathbf{q}_y^*, \mathbf{q}_z^*, l_{\max}) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} = 0.50 \\ l_i(\mathbf{q}_x^*, \mathbf{q}_y^*, \mathbf{q}_z^*, l_{\max}) - l_{\max} \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{cases} \end{aligned} \quad (6.27)$$

いずれの問題に対しても最適性条件を満足して終了した。問題 (6.25) を解いた結果を図 6.3 に示す。他の問題の解も同様の形状である。結果を表 6.1 にまとめる。ここで、 l_{\max} 、 l_{\min} は、最大部材長と最小部材長である。また、計算時間を合わせて示してある。収束判定などの条件はすべての問題で全く同一である。

どの最適解も、最大部材長と最小部材長の差は 1mm 以下に抑えられ、部材長はほぼ完全に一様化されている。しかし、計算時間は問題 (6.25) の方が少なく、収束性に優れていることがわかる。他のモデルでも同様の最適化問題を解いて収束性を比較してみたが、やはり結果は同様であった。これらのことから、シェルの部材長の平均部材長からの差の 2 乗和を指標とする方が収束性に優れているといえる。また、シェルの部材長の平均部材長からの差の 2 乗和という指標は、問題 (6.23) のように、制約関数としても利用可能であり、総部材長制約が等式制約でなくても良いという汎用性の高さから、本論文では部材長の一様性の指標としてシェルの部材長の平均部材長からの差の 2 乗和を用いることとする。

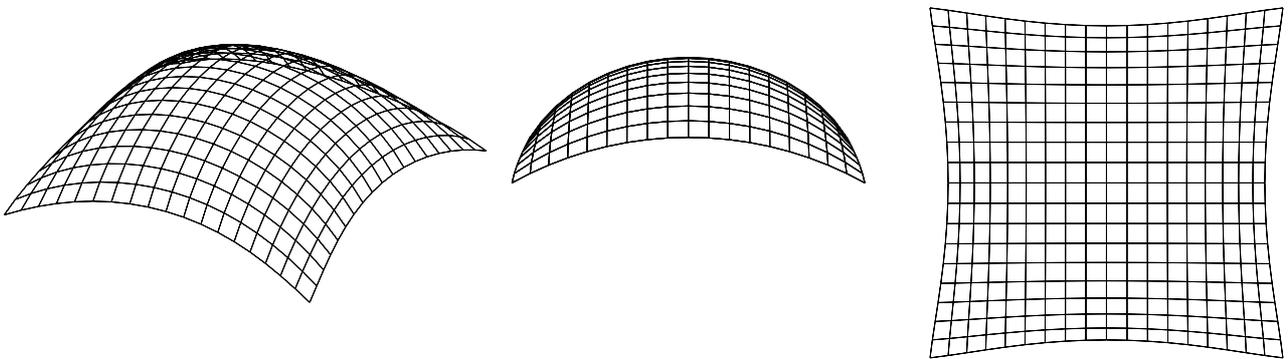


図 6.3 問題 (6.25) の最適形状

表 6.1 最適化結果の比較

	l_{\max}	l_{\min}	$l_{\max} - l_{\min}$	計算時間
問題 (6.25)	1.751 [m]	1.751 [m]	2.387×10^{-1} [mm]	73.547sec
問題 (6.26)	1.751 [m]	1.751 [m]	1.267×10^{-1} [mm]	476.92sec
問題 (6.27)	1.751 [m]	1.751 [m]	5.092×10^{-1} [mm]	4328.1sec

6.5 三角形グリッドを有するラチスシェル

6.5.1 最適化モデル

1つ目の最適化モデルは、図 6.4 に示すような球形平面を有し、三角形グリッドで構成される単層ラチスシェルとする。境界条件は図に示す 6 点を固定支持とする。初期形状は 10.2m のライズを有する裁断球殻とした。形状記述は三角形パッチベジエ曲面によりおこなうが、1/6 領域のみの記述とし、その他の節点は補間した 1/6 領域の節点をもとに対称性から生成するものとする。制御点は曲面の 1/6 領域全体に 5×5 の格子状に配置する。各ベジエパッチは隣り合う辺上の制御点を共有する。最適化の際の設計変数 \mathbf{X} は、下記 1 を基本とするが、問題に応じて 2 や 3 を選択する。

1. 制御点座標 q_x, q_y, q_z から選択
2. パラメータ u, v から選択
3. 節点座標 r_x, r_y, r_z を直接設計変数として選択

弾性解析は対称性を考慮し、1/2 領域を解析対象とし、対称面での法線方向の変位を全てゼロ、さらに対称面の面外への回転をゼロとする。1 部材 1 要素とし、要素数は 678 要素である。外力、材料定数、断面形状などは、6.1 項の最後に示した通りである。

本節では、まず、基本的なひずみエネルギー最小化問題を考える。

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & f(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \\ \text{subject to} \quad & L(\mathbf{X}) - L_0 \leq 0 \end{aligned} \tag{6.28}$$

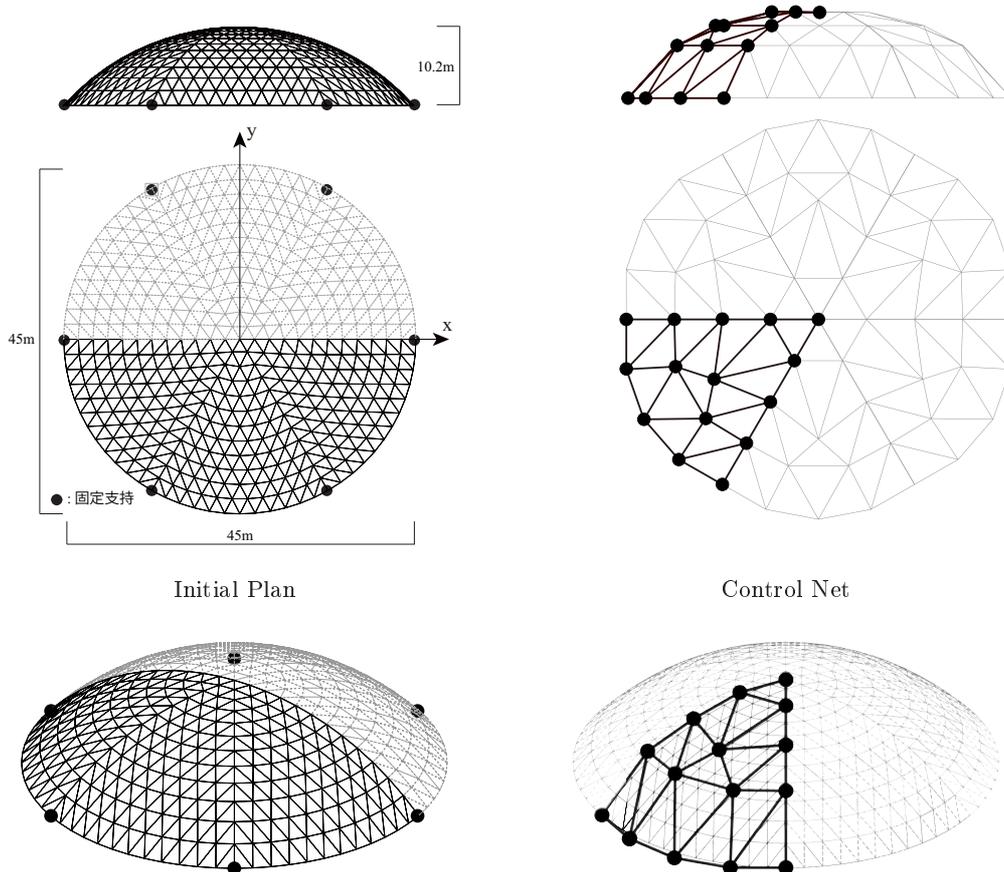


図 6.4 最適化モデル 1

この最適化問題は、総部材長に上限値を持ち、ひずみエネルギーを最小化する問題である。この最適化問題を基本とし、部材長一様化制約を導入した次の最適化問題を考える。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \\ & \text{subject to} && \begin{cases} L(\mathbf{X}) - L_0 \leq 0 \\ g(\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^m (l_k - l_{ave})^2 \leq \bar{g} \end{cases} \end{aligned} \quad (6.29)$$

この最適化問題は、総部材長に上限値を持ち、ひずみエネルギーを最小化する問題である。 \bar{g} の値が十分小さい時、部材長は一様化される。この最適化問題にはほとんどの場合解が存在するが、 \bar{g} の値を 0 とした完全部材長一様化制約を与えた場合、設計変数の選択や最適化モデルの違いによって、式 (6.29) における不等式制約 $L - L_0 \leq 0$ が不活性となる場合がある。そのような場合、極端にライズが低く鉛直剛性のほとんどない曲面形状が最適解として得られることもあるため、不等式制約 $L - L_0 \leq 0$ が不活性となった場合には、次の最適化問題を考えることとする。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && g(\mathbf{X}) = \sum_{k=1}^m (l_k - l_{ave})^2 \\ & \text{subject to} && \begin{cases} L(\mathbf{X}) - L_0 \leq 0 \\ f(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} = \bar{f} \end{cases} \end{aligned} \quad (6.30)$$

この最適化問題は、ラチスシェルの総部材長を初期形状と同じ値とし、かつひずみエネルギーを指定値 \bar{f} とする制約条件のもとでシェルの部材長の平均部材長からの差の 2 乗和を最小化する問題である。 $g(\mathbf{X})$ が 0 のとき、シェルの全部材長は厳密に均一化される。ひずみエネルギーの上限値 \bar{f} に適切な値を指定することにより、一定の剛性を確保しつつ、部材長を可能な限り一様化することができる。

なお、以上の問題において、最適化モデルは全部材を一様断面としているため、総部材長制約は体積制約と同義であり、極めてライズの大きい非現実的な形状や、ライズの存在しない部材長一様解として自明な形状が得られることを防ぎ、さらに、設計領域を限定して解の収束性を高めるとともに、材料コストを抑えるという意味で経済的指標の役割も果たす。

次項以降、設計変数を様々に変えて最適化をおこなった結果を示す。最適化結果の表記での共通事項は以下のとおりである。

- 最適形状図中の l_{\max} , l_{\min} は、ラチスシェルを構成する各部材の最大部材長と最小部材長である。
- 変形図の点線は荷重作用前の形状を、実線は荷重作用時の変位を 100 倍にして表した形状を示している。
- 変形図中の d_{\max} として示した値は各節点の鉛直方向変位のうち最大の値を表す。
- 軸力図において、実線、点線はそれぞれ圧縮軸力、引張軸力を表し、線の幅は軸力の大きさである。
- 軸力図中の N_{\max}^t は引張軸力の最大値、 N_{\max}^c は圧縮軸力の最大値である。
- 6.3 節で述べたとおり、曲げモーメントは、大小を判断しやすいように $x - y$ 平面に描いている。
- 曲げモーメント図中の M_{\max} は式 (6.16) で評価する各部材端部に生ずる曲げモーメントの最大値である。

6.5.2 例題 1：節点の z 座標を設計変数とした場合

最適化概要

まず、古典的な最適化問題として、パラメトリック曲面による形状定義を用いず、節点の鉛直方向座標を設計変数として ($\mathbf{X} = \mathbf{r}_z$)、ひずみエネルギー最小化問題である式 (6.28) を解き、高い剛性を有する形状が得られることを確認する。

最適化結果と考察

問題 (6.28) を解いた結果、最適性条件を満足し、最適化は終了した。得られた最適解曲面の形状を図 6.5(b) に示す。また、比較の対象として、初期解曲面の形状を図 6.5(a) に示す。各図で上方から順にアイソメトリック図、立面図、平面図をそれぞれ示す。初期形状および最適形状の、自重作用時の弾性変形の様子を図 6.6(a),(b) にそれぞれ示す。初期形状および最適形状の軸力図を図 6.7(a),(b) に示す。また、初期形状および最適形状の曲げモーメント図を図 6.8(a),(b) に示す。ここで、図の上段は平面方向の曲げモーメントを、下段は面外方向の曲げモーメントを表す。

図 6.5(b) からわかるように、最適解では支点間のライズがカタナリー状に上昇し、高い剛性を持ったシェル形状が得られたことが分かる。

次項では、この最適形状を初期形状として、部材長一様化制約の導入を試みる。

6.5.3 例題 2：節点の xyz 座標を変数とした場合

最適化概要

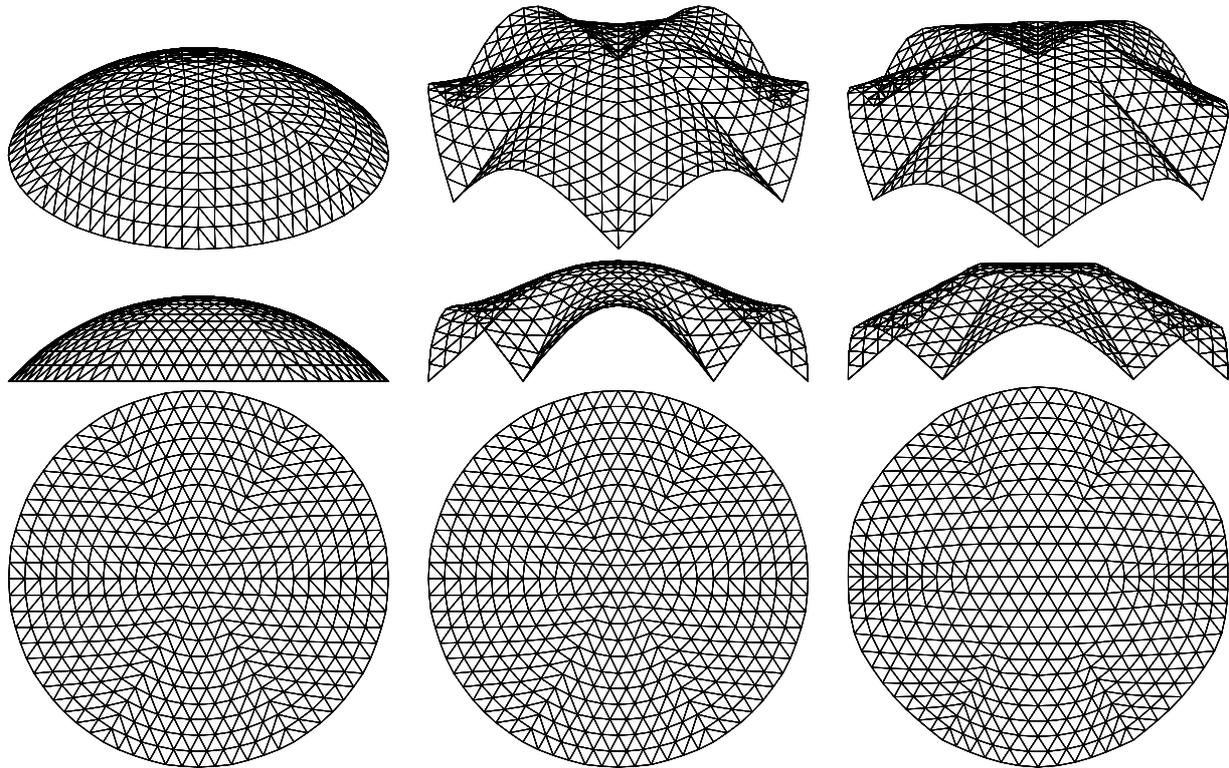
続いて、6.5.2 項で得られたひずみエネルギー最小解を初期形状として、部材長一様化制約を導入した最適化問題 (6.29) を解く。ただし、設計変数を $\mathbf{X} = \{r_x, r_y, r_z\}$ に拡張する。

最適化結果と考察

$\bar{g} = 0.0001 \text{ (m}^2\text{)}$ として問題 (6.29) を解いた結果、最適性条件を満足し、最適化は終了した。得られた最適解曲面の形状を図 6.5(c) に示す。また、比較の対象として、初期解曲面 (例題 1 のひずみエネルギー最小化形状) の形状を図 6.5(b) に示す。各図で上方から順にアイソメトリック図、立面図、平面図をそれぞれ示す。また、初期形状および最適形状の、自重作用時の弾性変形の様子を図 6.6(b),(c) にそれぞれ示す。初期形状および最適形状の軸力図を図 6.7(b),(c) に、曲げモーメント図を図 6.8(b),(c) に示す。ここで、図の上段は平面方向の曲げモーメントを、下段は面外方向の曲げモーメントを表す。

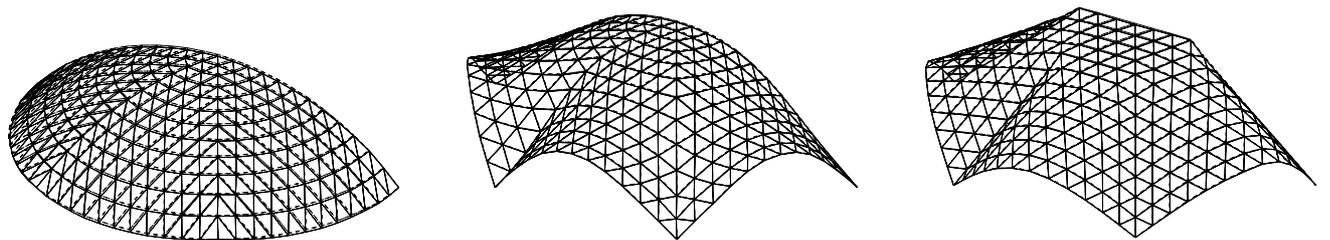
図 6.5 をみると、最適解において最大部材長と最小部材長の差は 3.1mm に抑えられ、部材長はほぼ完全に一様化されていることがわかる。最適形状は、部材長を一様化しつつも、初期形状と同等のひずみエネルギー値を有しており、図 6.6 から、高い剛性を保ったまま部材長を一様化することができていることが分かる。総部材長は初期形状の値が維持されている。しかしながら、節点を直接変数としているために、形状の滑らかさが保証されないため、最適形状では、中央付近は平面、周辺部は筒状曲面となり、全体として滑らかさに欠ける形状になっている。

図 6.7 および図 6.8 をみると、やや面外曲げモーメントが増加しているものの、最大値は 1kNm 以下であり、全体として曲げ、引張りが消失した力学的メカニズムを有する傾向にあることがみてとれる。



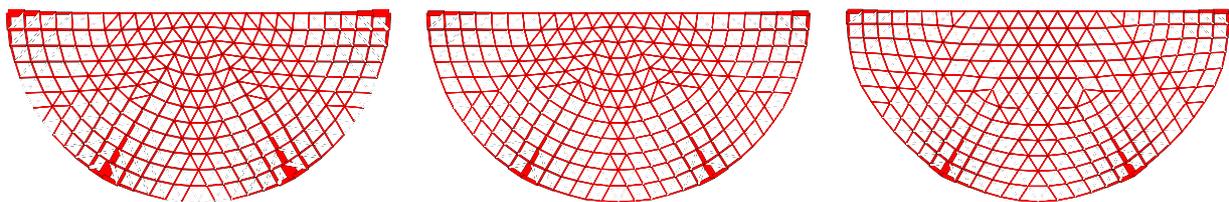
$f = 0.329[\text{kNm}]$	$f = 0.119[\text{kNm}]$	$f = 0.126[\text{kNm}]$
$L = 1569[\text{m}]$	$L = 1569[\text{m}]$	$L = 1569[\text{m}]$
$l_{\max} = 3.281[\text{m}], l_{\min} = 1.874[\text{m}]$	$l_{\max} = 3.056[\text{m}], l_{\min} = 1.872[\text{m}]$	$l_{\max} = 2.315[\text{m}], l_{\min} = 2.312[\text{m}]$
$l_{\max} - l_{\min} = 1408[\text{mm}]$	$l_{\max} - l_{\min} = 1184[\text{mm}]$	$l_{\max} - l_{\min} = 3.1[\text{mm}]$
(a) 初期形状	(b) 問題 (6.28) の最適形状	(c) 問題 (6.29) の最適形状

図 6.5 形状図



$d_{\max} = 3.93[\text{mm}]$	$d_{\max} = 1.49[\text{mm}]$	$d_{\max} = 1.82[\text{mm}]$
(a) 初期形状	(b) 問題 (6.28) の最適形状	(c) 問題 (6.29) の最適形状

図 6.6 変形図 (×100)



$N_{\max}^t = 31.89[\text{kN}]$	$N_{\max}^t = 15.67[\text{kN}]$	$N_{\max}^t = 16.36[\text{kN}]$
$N_{\max}^c = 112.5[\text{kN}]$	$N_{\max}^c = 61.1[\text{kN}]$	$N_{\max}^c = 68.49[\text{kN}]$
(a) 初期形状	(b) 問題 (6.28) の最適形状	(c) 問題 (6.29) の最適形状

図 6.7 軸力図

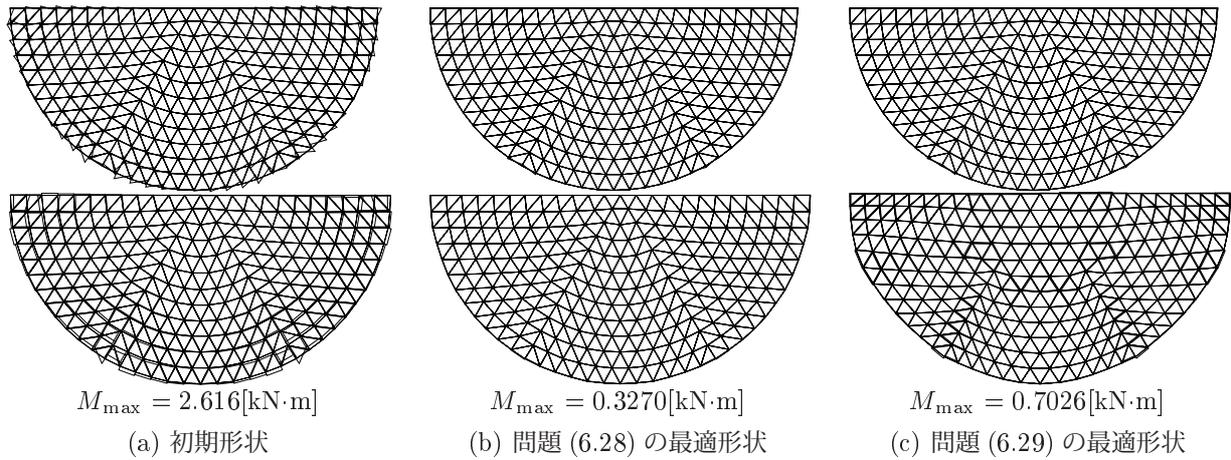


図 6.8 曲げモーメント図

6.5.4 例題 3：制御点の z 座標を変数とした場合

最適化概要

曲面を三角形パッチベジエ曲面によりモデル化し、制御点の z 座標を設計変数として ($\mathbf{X} = \mathbf{q}_z$)、ひずみエネルギー最小化問題 (6.28) を解き、高い剛性を有する形状が得られることを確認する。

最適化結果と考察

問題 (6.28) を解いた結果、最適性条件を満足し、最適化は終了した。得られた最適解曲面の形状を図 6.9(b) に示す。また、比較の対象として、初期解曲面の形状を図 6.9(a) に示す。各図で上方から順にアイソメトリック図、立面図、平面図をそれぞれ示す。また、初期形状および最適形状の、自重作用時の弾性変形の様子を図 6.10(a),(b) にそれぞれ示す。初期形状および最適形状の軸力図を図 6.11(a),(b) に、曲げモーメント図を図 6.12(a),(b) に示す。

図 6.9(b) からわかるように、最適解では支点間のライズがカタナリー状に上昇し、高い剛性を持ったシェル形状が得られたことが分かる。

節点を直接設計変数とした場合の最適形状とほぼ同様の形状が得られており、古典的なひずみエネルギー最小化問題に対しては、節点を三角形パッチベジエ曲面で離散化し、設計変数の自由度を減じたことによる影響はほとんどないことが分かる。

次節では、この最適形状を初期形状として、部材長一様化制約の導入を試みる。

6.5.5 例題 4：制御点の xyz 座標を変数とした場合

最適化概要

続いて、6.5.4 項で得られたひずみエネルギー最小解を初期形状として、部材長一様化制約を導入した最適化問題 (6.29) を解く。ただし、設計変数を $\mathbf{X} = \{\mathbf{q}_x, \mathbf{q}_y, \mathbf{q}_z\}$ に拡張する。現実的な解が得られない場合は、目的関数と制約条件関数を入れ替えた最適化問題 (6.30) を解く。多目的最適化問題に対する制約法に基づき、 \bar{f} の値を変化させながら問題 (6.30) の解を求めることにより、パレート解集合を得る。

最適化結果と考察

$\bar{g} = 0.0001 (\text{m}^2)$ として問題 (6.29) を解いた結果、最適性条件を満足し、最適化は終了した。得られた最適解曲面の形状を図 6.9(b) に示す。また、比較の対象として、初期解曲面 (例題 1 のひずみエネルギー最小化形状) の形状を図 6.9(b) に示す。各図で上方から順にアイソメトリック図、立面図、平面図をそれぞれ示す。また、初期形状および最適形状の、自重作用時の弾性変形の様子を図 6.10(b),(c) にそれぞれ示す。初期形状および最適形状の軸力図を図

6.11(b),(c) に、曲げモーメント図を図 6.12(b),(c) に示す。

図 6.9 をみると、最適解において最大部材長と最小部材長の差は 2.4mm に抑えられ、部材長はほぼ完全に一様化されていることがわかる。しかしながら、節点をベジエ曲面によって離散化したことによる実行可能領域の縮小により、部材長を一様化するのが困難となり、ほとんどライズを持たない形状となった。

ひずみエネルギーの値は大きく増加し、図 6.10 からわかるように剛性のない形状となっている。図 6.11 および図 6.12 をみると、応力も増加し、力学的合理性の欠いた形状となっている。

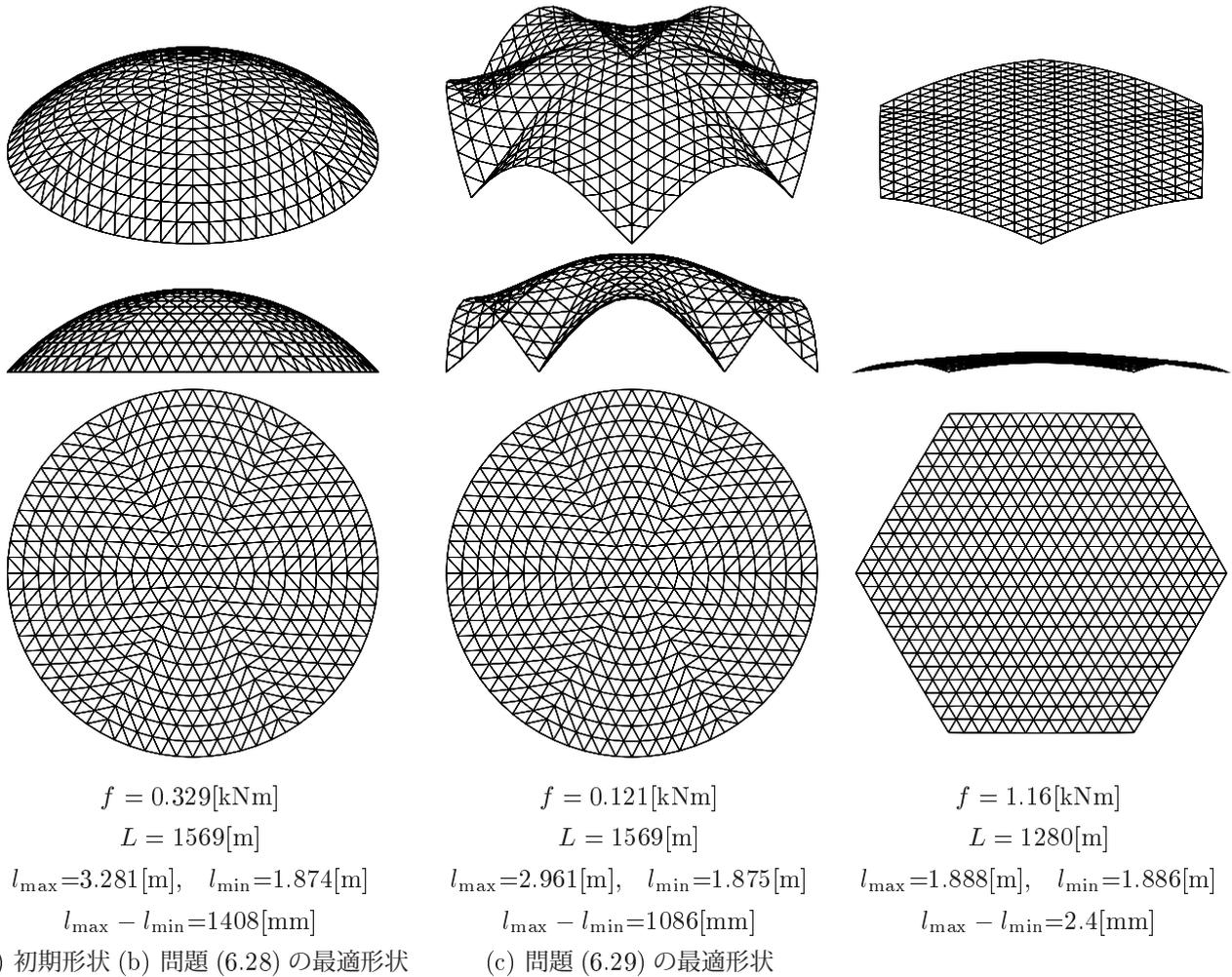


図 6.9 形状図

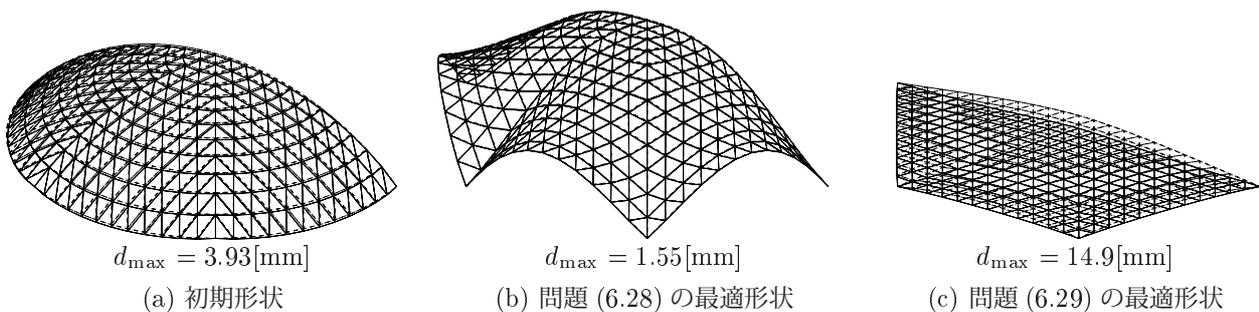


図 6.10 変形図 (×100)

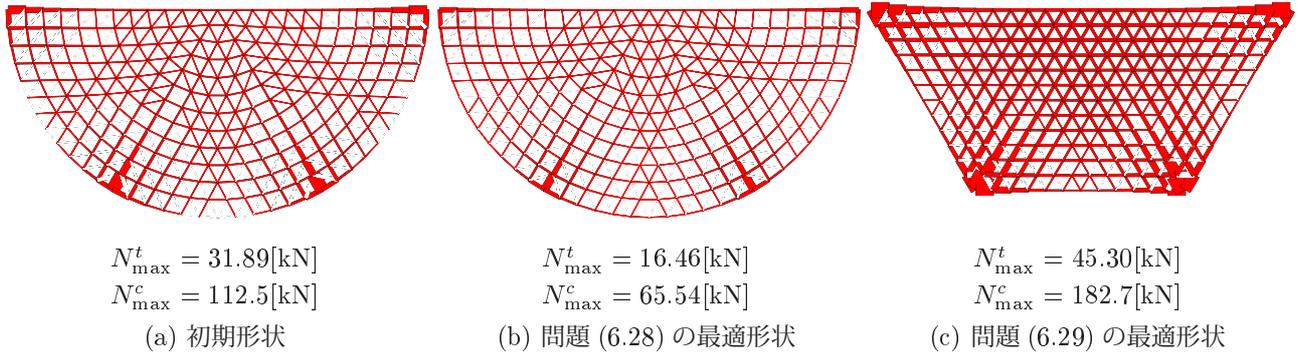


図 6.11 軸力図

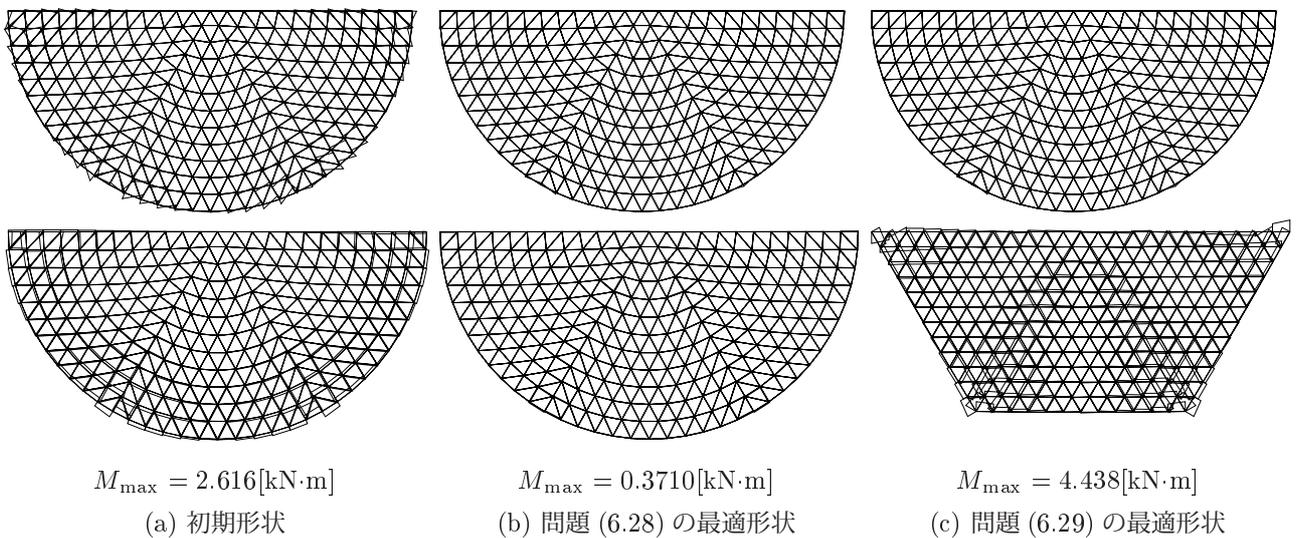


図 6.12 曲げモーメント図

この結果を踏まえて、 \bar{f} の値を変化させながら問題 (6.29) を解いた結果を順に示す。いずれの最適化問題も最適性条件を満足し、最適化は終了した。図 6.17 には、 \bar{f} の値を様々に変えて繰り返し最適化をおこなって得られた、ひずみエネルギーと部材長の一様性の関係を示す。横軸にはひずみエネルギー、縦軸には最大部材長と最小部材長の差をとっている。 \bar{f} の値を様々に変えて繰り返し最適化をおこなったパレート解のいくつかを図 6.13~6.16 の (a)~(f) にそれぞれ示す。先ほどと同様、図 6.13 に形状図、図 6.14 に変形図、図 6.15 に軸力図、図 6.16 に曲げモーメント図をそれぞれ示している。

図 6.17 から、ひずみエネルギーと部材長一様性との間にトレードオフ関係があることが確認できる。ひずみエネルギーを小さくすると、部材長のばらつきは大きくなり、節点が支点の近傍に集まり、非現実的に短い部材が出現する。このことから、現実的な最適形状を得るためには、部材長の最大部材長からの差の 2 乗和を制約する必要があることが分かる。 \bar{g} に小さな値を与えることは、部材長を一様化するという目的の他に、非現実的な解形状が得られることを防ぐ役割を果たしていると言える。

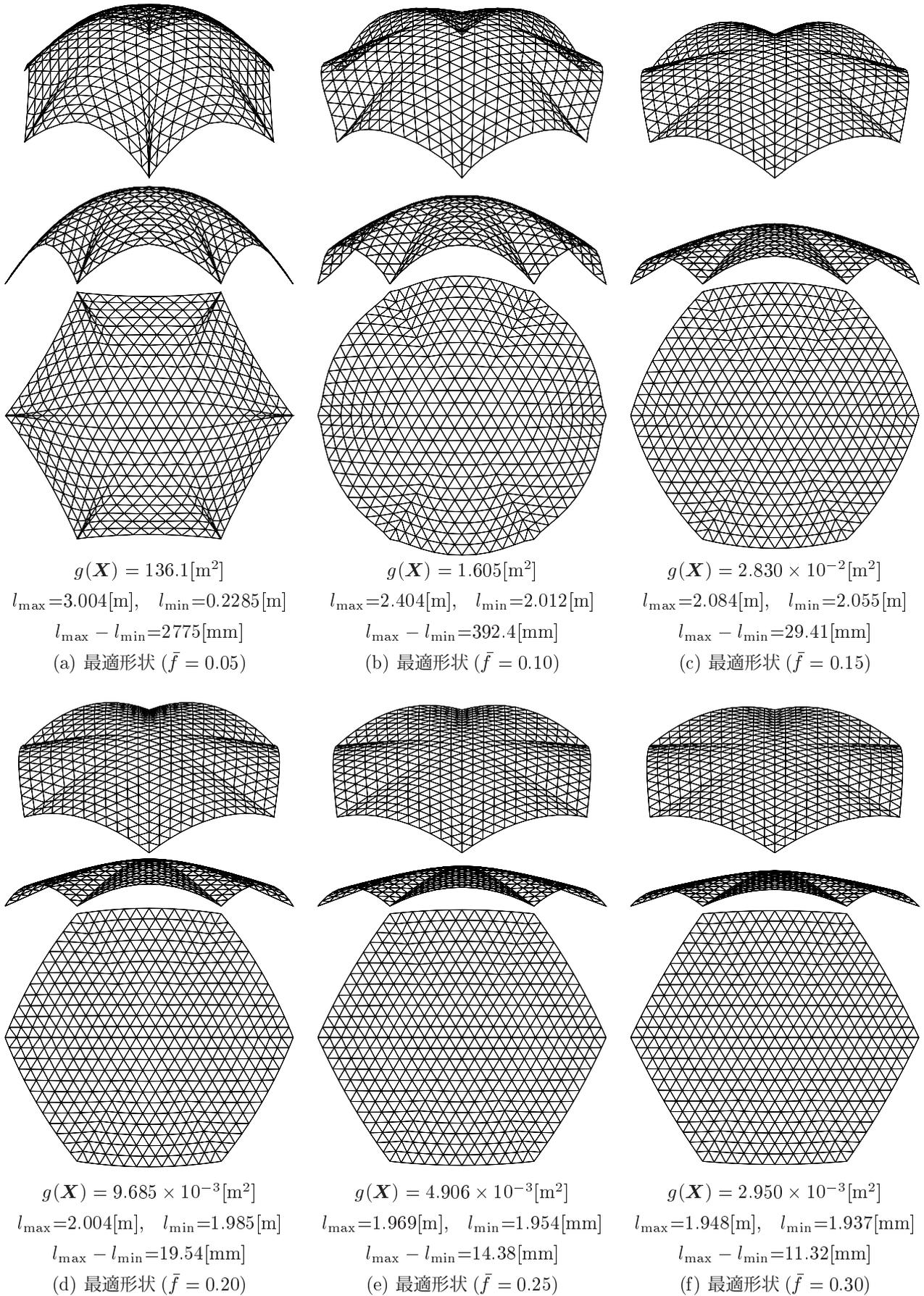
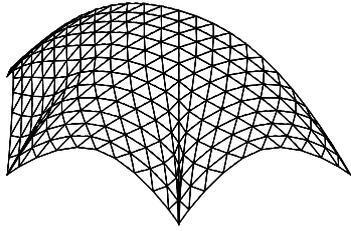
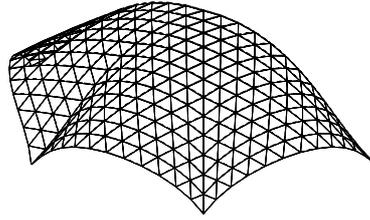


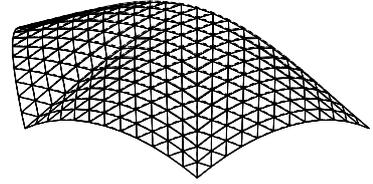
図 6.13 形状図



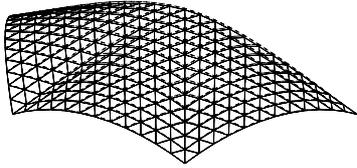
$d_{\max} = 0.6899[\text{mm}]$
(a) 最適形状 ($\bar{f} = 0.05$)



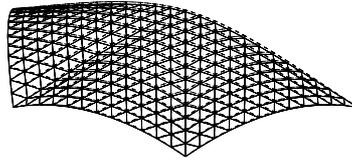
$d_{\max} = 1.275[\text{mm}]$
(b) 最適形状 ($\bar{f} = 0.10$)



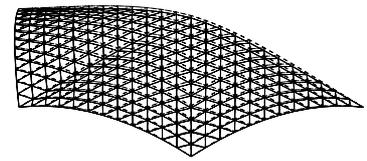
$d_{\max} = 2.212[\text{mm}]$
(c) 最適形状 ($\bar{f} = 0.15$)



$d_{\max} = 2.895[\text{mm}]$
(d) 最適形状 ($\bar{f} = 0.20$)

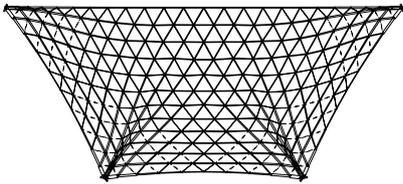


$d_{\max} = 3.535[\text{mm}]$
(e) 最適形状 ($\bar{f} = 0.25$)

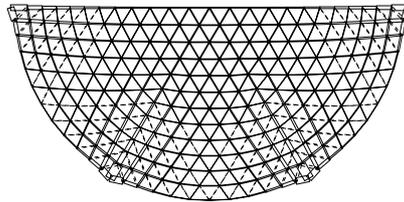


$d_{\max} = 4.166[\text{mm}]$
(f) 最適形状 ($\bar{f} = 0.30$)

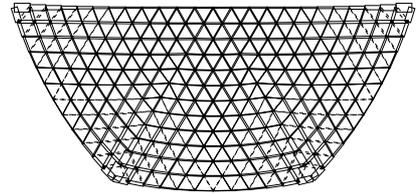
図 6.14 変形図 ($\times 100$)



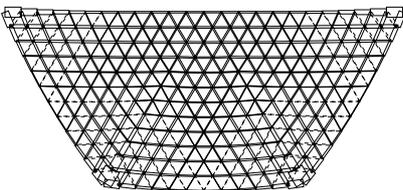
$N_{\max}^t = 3.844[\text{kN}]$
 $N_{\max}^c = 43.79[\text{kN}]$
(a) 最適形状 ($\bar{f} = 0.05$)



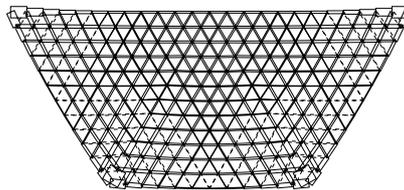
$N_{\max}^t = 12.78[\text{kN}]$
 $N_{\max}^c = 52.34[\text{kN}]$
(b) 最適形状 ($\bar{f} = 0.10$)



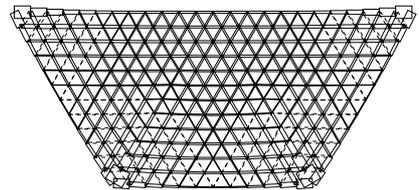
$N_{\max}^t = 16.77[\text{kN}]$
 $N_{\max}^c = 75.49[\text{kN}]$
(c) 最適形状 ($\bar{f} = 0.15$)



$N_{\max}^t = 19.10[\text{kN}]$
 $N_{\max}^c = 85.25[\text{kN}]$
(d) 最適形状 ($\bar{f} = 0.20$)



$N_{\max}^t = 21.39[\text{kN}]$
 $N_{\max}^c = 94.08[\text{kN}]$
(e) 最適形状 ($\bar{f} = 0.25$)



$N_{\max}^t = 23.50[\text{kN}]$
 $N_{\max}^c = 102.1[\text{kN}]$
(f) 最適形状 ($\bar{f} = 0.30$)

図 6.15 軸力図

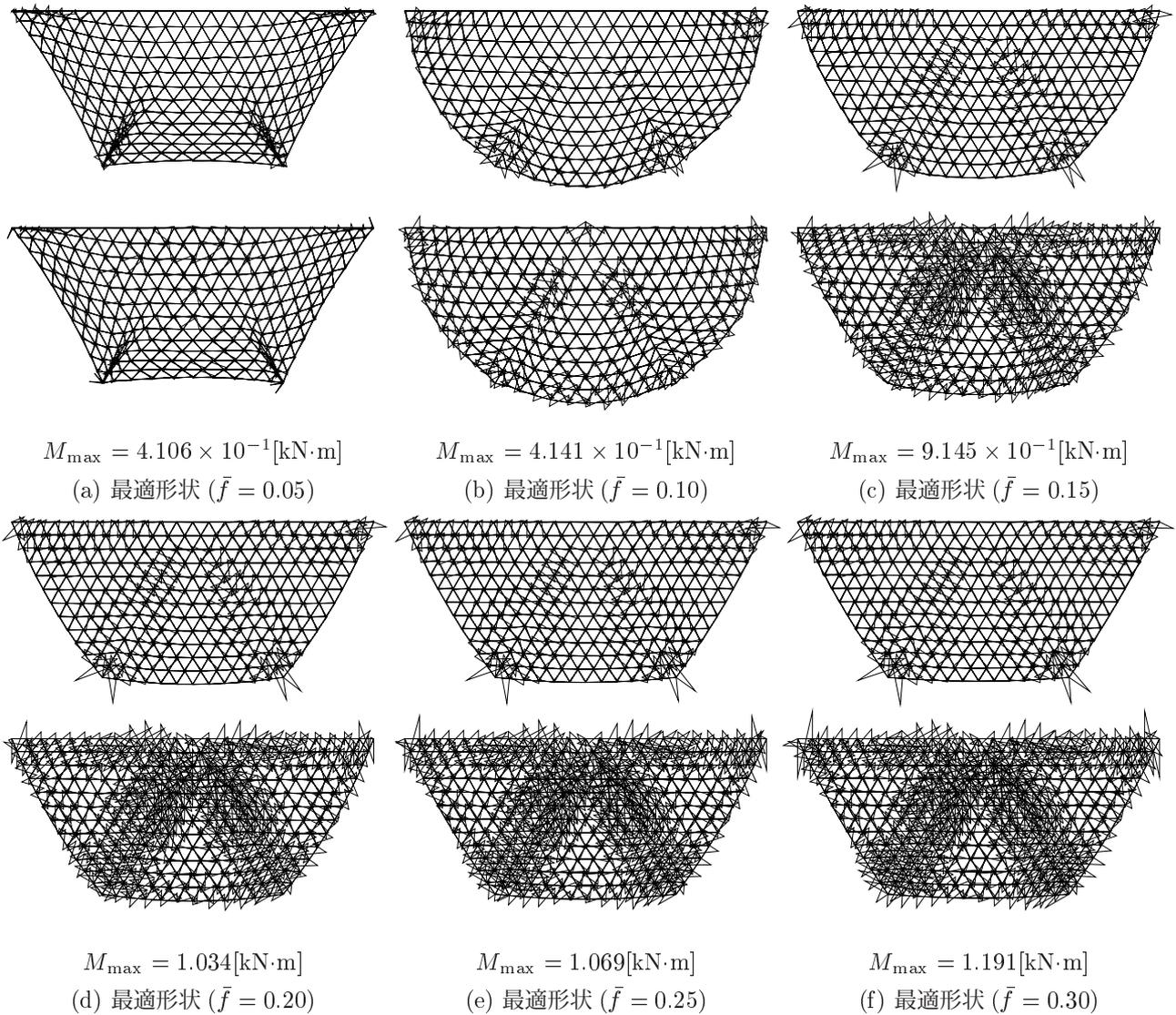


図 6.16 曲げモーメント図

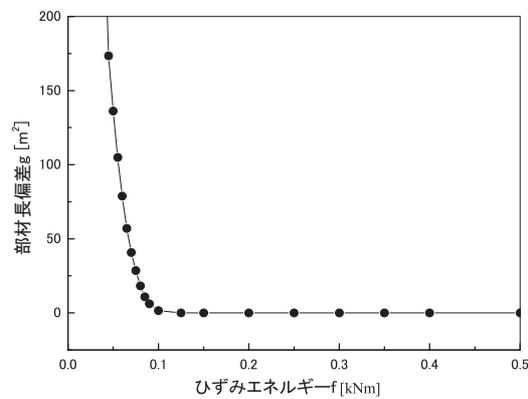


図 6.17 ひずみエネルギーと部材長の一様性の関係

6.5.6 例題5：曲面上の節点位置を定めるパラメータを変数とした場合

最適化概要

続いて、制御点座標は動かさずに、曲面上の節点位置を定めるパラメータ \mathbf{u}, \mathbf{v} を設計変数として形状を最適化する ($\mathbf{X} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$)。これによって節点は常に与えられたベジエ曲面上を動くため、初期形状を維持したままひずみエネルギーの値や部材長の偏差を改善することができる。部材長を完全に一様化するためには変数の自由度が十分でないので、まず、図 6.4 の初期形状に対して、 \bar{f} に十分大きな値を設定し、最適化問題 (6.30) を解くことで、部材長が最も一様化された形状を求める。その後、 \bar{f} の値を変化させながら問題 (6.30) の解を求めることにより、パレート解集合を得る。

最適化結果と考察

\bar{f} に十分大きな値を設定し、ひずみエネルギー制約を除いて問題 (6.30) を解いた結果、最適性条件を満足し、最適化は終了した。得られた最適解曲面の形状を図 6.18(b) に示す。また、比較の対象として、初期解曲面の形状を図 6.18(a) に示す。各図で上方から順にアイソメトリック図、立面図、平面図をそれぞれ示す。また、初期形状および最適形状の、自重作用時の弾性変形の様子を図 6.19(a),(b) にそれぞれ示す。初期形状および最適形状の軸力図を図 6.20(a),(b) に、曲げモーメント図を図 6.21(a),(b) に示す。

図 6.18 をみると、最適解において最大部材長と最小部材長の差は 254.7mm となっており、部材長にまだばらつきはあるものの、初期形状と比べると大幅に部材長を一様化できていることが分かる。総部材長は初期形状の値より減少している。制御点座標は初期形状のままであり、裁断球殻を維持したまま形状が最適化されていることが分かる。

ひずみエネルギーについては制約を与えていないが、最適解での値は初期解での値のおよそ半分となっており、図 6.19 からわかるように剛性も向上している。

図 6.20 および図 6.21 をみると、応力も減少しており、初期形状を維持したまま、力学性能を向上させることが出来た。

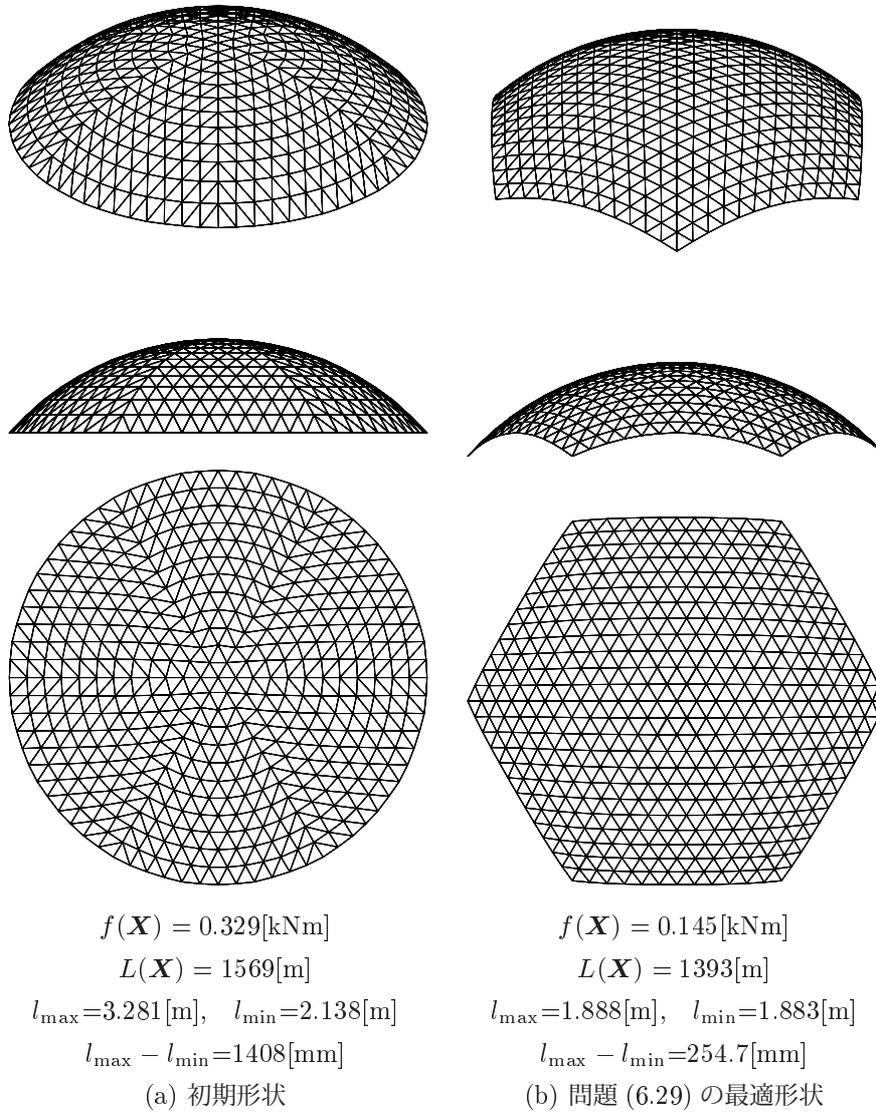


図 6.18 形状図

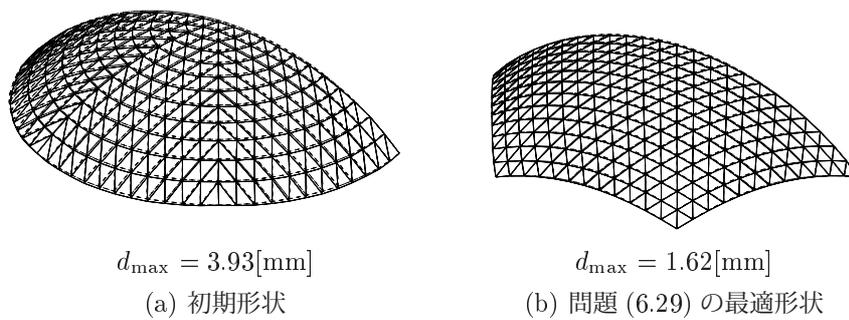


図 6.19 変形図 ($\times 100$)

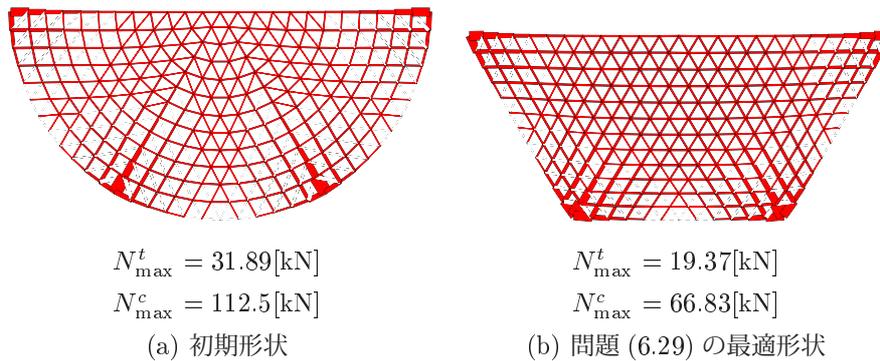


図 6.20 軸力図

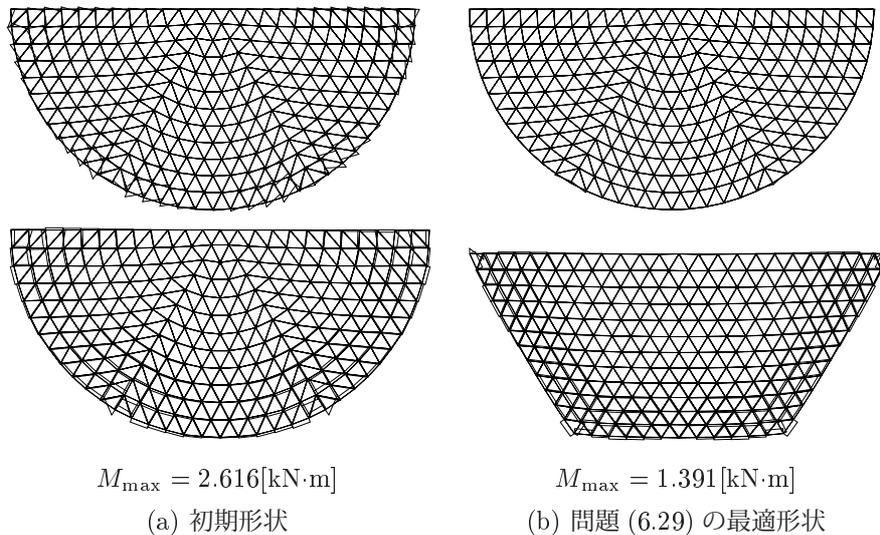


図 6.21 曲げモーメント図

この結果を踏まえて、 \bar{f} の値を変化させながら問題 (6.29) を解いた結果を順に示す。いずれの最適化問題も最適性条件を完全に満足し、最適化は終了した。図 6.44 には、 \bar{f} の値を様々に変えて繰り返し最適化をおこなって得られた、ひずみエネルギーと部材長の一様性の関係を表した相関図を示す。横軸にはひずみエネルギー、縦軸には最大部材長と最小部材長の差をとっている。 \bar{f} の値を様々に変えて繰り返し最適化をおこなった最適解群の中で代表的なものを図 6.22~6.25 の (a)~(f) にそれぞれ示す。先ほどと同様、図 6.22 に形状図、図 6.23 に変形図、図 6.24 に軸力図、図 6.25 に曲げモーメント図をそれぞれ示している。

図 6.44 から、例題 4 と同様、ひずみエネルギーと部材長一様性との間にトレードオフ関係があることが確認できる。例題 4 と同様に、ひずみエネルギーを小さくすると、部材長のばらつきは大きくなり、節点が支点の近傍に集まり、非現実的に短い部材が出現するので、 \bar{g} を適当な値に設定し、非現実的な解形状が得られることを防ぐことが必要である。

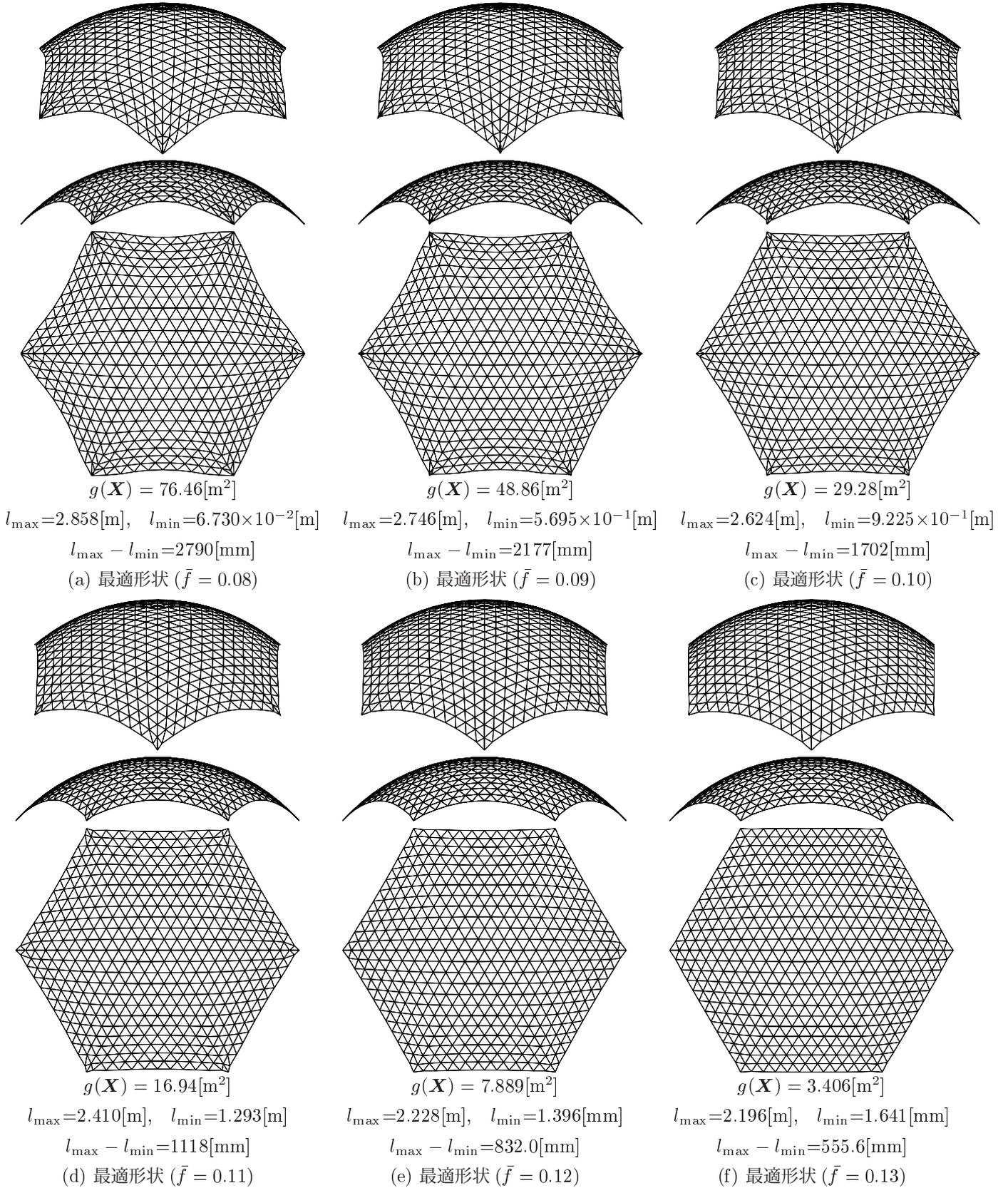
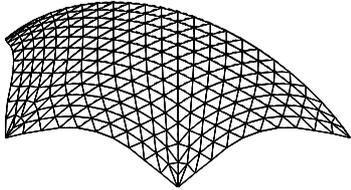
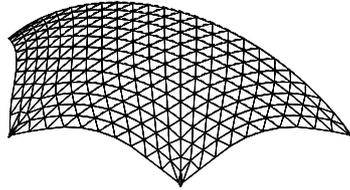


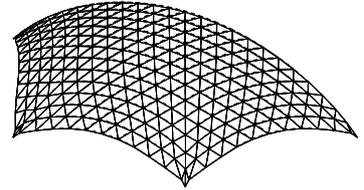
図 6.22 形状図



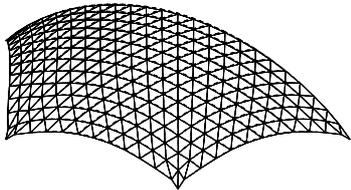
$d_{\max} = 1.146[\text{mm}]$
(a) 最適形状 ($\bar{f} = 0.08$)



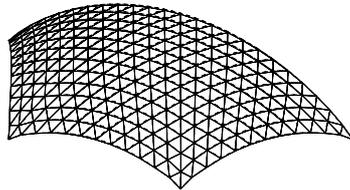
$d_{\max} = 1.241[\text{mm}]$
(b) 最適形状 ($\bar{f} = 0.09$)



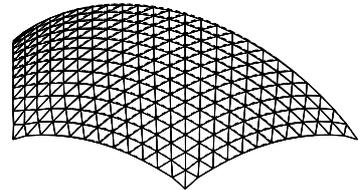
$d_{\max} = 1.322[\text{mm}]$
(c) 最適形状 ($\bar{f} = 0.10$)



$d_{\max} = 1.403[\text{mm}]$
(d) 最適形状 ($\bar{f} = 0.11$)

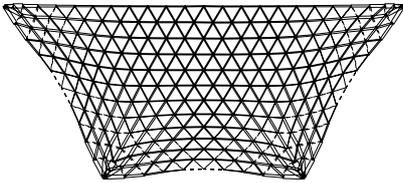


$d_{\max} = 1.482[\text{mm}]$
(e) 最適形状 ($\bar{f} = 0.12$)

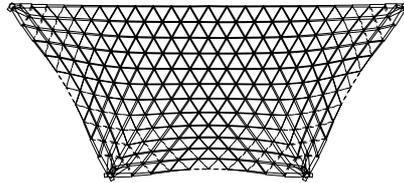


$d_{\max} = 1.541[\text{mm}]$
(f) 最適形状 ($\bar{f} = 0.13$)

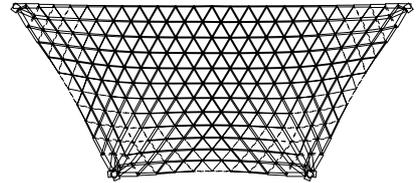
図 6.23 変形図 ($\times 100$)



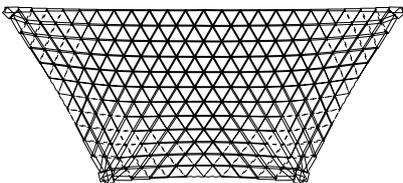
$N_{\max}^t = 9.247[\text{kN}]$
 $N_{\max}^c = 30.36[\text{kN}]$
(a) 最適形状 ($\bar{f} = 0.08$)



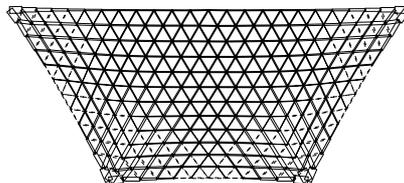
$N_{\max}^t = 9.573[\text{kN}]$
 $N_{\max}^c = 47.68[\text{kN}]$
(b) 最適形状 ($\bar{f} = 0.09$)



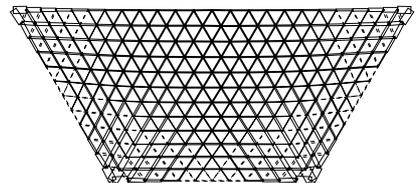
$N_{\max}^t = 9.134[\text{kN}]$
 $N_{\max}^c = 45.92[\text{kN}]$
(c) 最適形状 ($\bar{f} = 0.10$)



$N_{\max}^t = 9.149[\text{kN}]$
 $N_{\max}^c = 43.29[\text{kN}]$
(d) 最適形状 ($\bar{f} = 0.11$)



$N_{\max}^t = 10.12[\text{kN}]$
 $N_{\max}^c = 51.33[\text{kN}]$
(e) 最適形状 ($\bar{f} = 0.12$)



$N_{\max}^t = 13.17[\text{kN}]$
 $N_{\max}^c = 54.67[\text{kN}]$
(f) 最適形状 ($\bar{f} = 0.13$)

図 6.24 軸力図

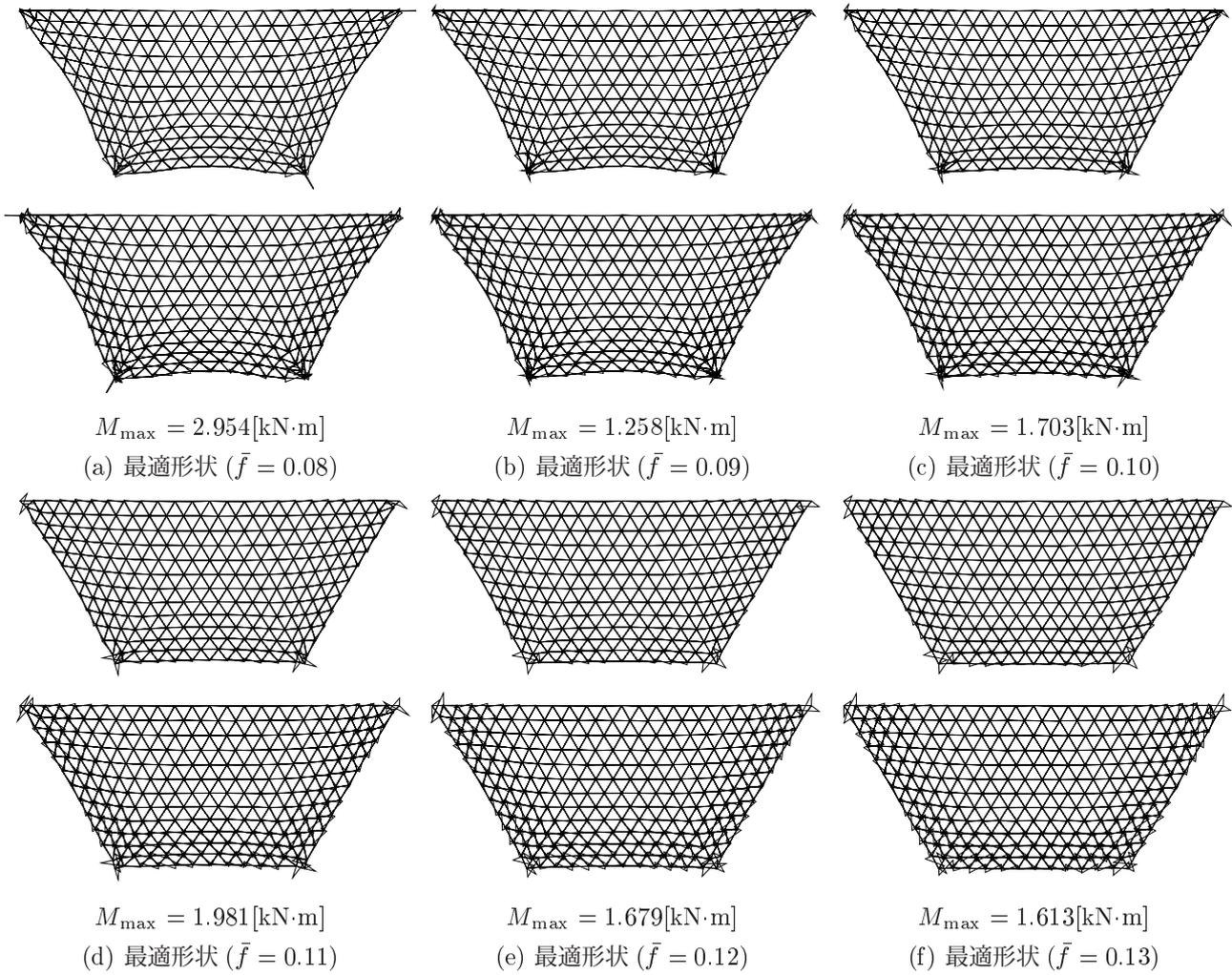


図 6.25 曲げモーメント図

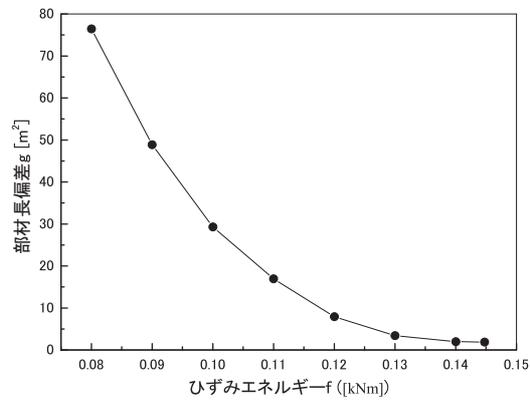


図 6.26 ひずみエネルギーと部材長の一様性の関係

6.6 四角形グリッドを有するラチスシェル

6.6.1 最適化モデル

2つ目の最適化モデルは、図 6.27 に示すような正方形平面を有し、四角形グリッドで構成される単層ラチスシェルとする。境界条件は図に示す 4 点を固定支持とする。初期形状は 9.8m のライズを有する裁断球殻とした。曲面形状はテンソル積ベジエ曲面により記述し、制御点は図のように 7×7 の格子状に配置する。最適化の際の設計変数 \mathbf{X} は、例題 1 と同様、下記 1 を基本とするが、問題に応じて 2 や 3 を選択する。

1. 制御点座標 q_x, q_y, q_z から選択
2. パラメータ u, v から選択
3. 節点座標 r_x, r_y, r_z を直接設計変数として選択

弾性解析は対称性を考慮し、1/4 領域を解析対象とし、対称面での法線方向の変位を全てゼロ、さらに対称面の面外への回転をゼロとする。1 部材 1 要素とし、要素数は 180 要素である。外力、材料定数、断面形状などは、6.1 項の最後に示した通りである。また、最適化結果の表記は、6.5.1 節と同じである。

例題 1 と同様、式 (6.28)~(6.30) の各最適化問題を考える。

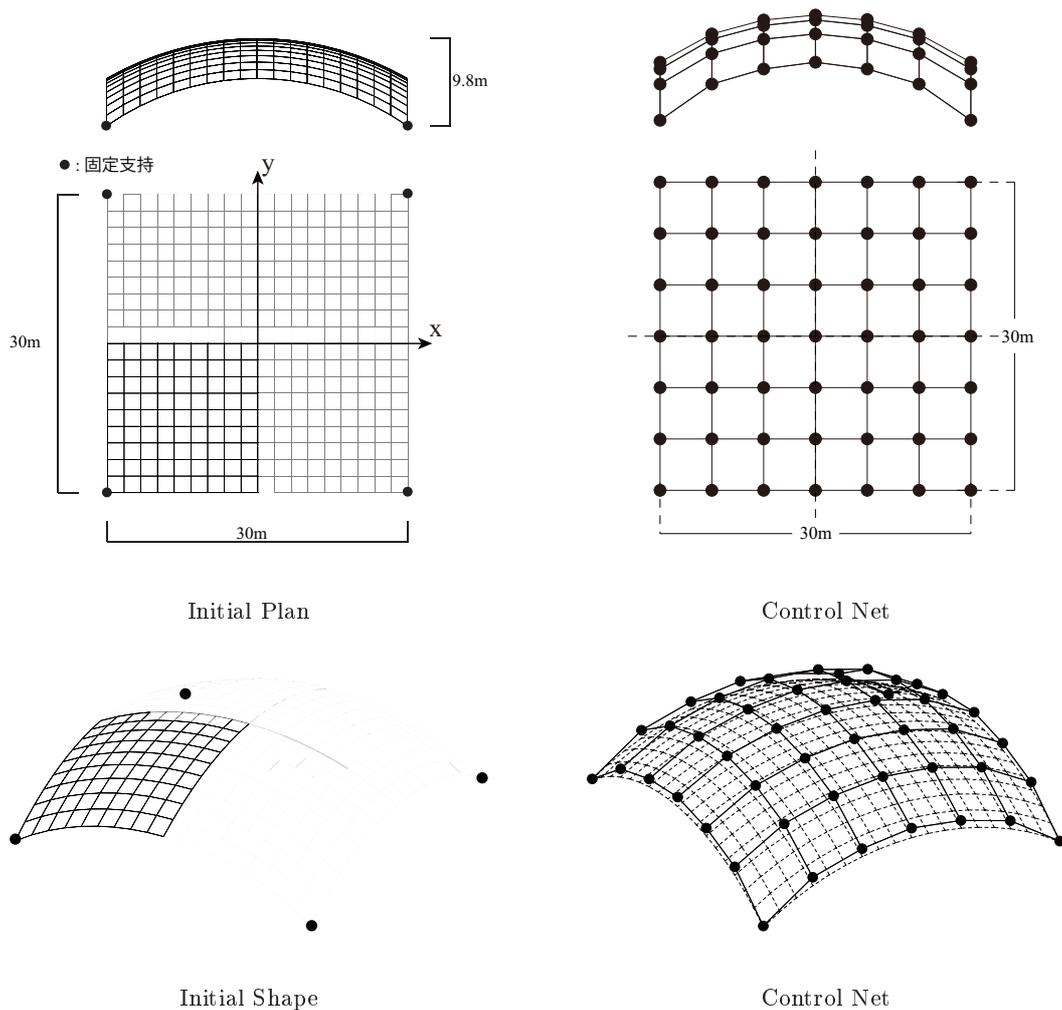


図 6.27 最適化モデル 1

6.6.2 例題 1：節点の z 座標を設計変数とした場合

最適化概要

まず、基本的な最適化問題として、パラメトリック曲面による形状定義を用いず、節点の鉛直方向座標を設計変数として ($\mathbf{X} = \mathbf{r}_z$)、ひずみエネルギー最小化問題 (6.28) を解き、高い剛性を有する形状が得られることを確認する。

最適化結果と考察

問題 (6.28) を解いた結果、最適性条件を満足し、最適化は終了した。得られた最適解曲面の形状を図 6.28(b) に示す。また、比較の対象として、初期解曲面の形状を図 6.28(a) に示す。各図で上方から順にアイソメトリック図、立面図、平面図をそれぞれ示す。また、初期形状および最適形状の、自重作用時の弾性変形の様子を図 6.29(a),(b) にそれぞれ示す。初期形状および最適形状の軸力図を図 6.30(a),(b) に示す。また、初期形状および最適形状の曲げモーメント図を図 6.31(a),(b) に示す。ここで、図の上段は平面方向の曲げモーメントを、下段は面外方向の曲げモーメントを表す。

図 6.28(b) からわかるように、最適解では支点間のライズがカタナリー状に上昇し、剛性が向上していることが分かる。

次節では、この最適形状を初期形状として、部材長一様化制約の導入を試みる。

6.6.3 例題 2：節点の xyz 座標を変数とした場合

最適化概要

続いて、6.6.2 項で得られたひずみエネルギー最小解を初期形状として、部材長一様化制約を導入した最適化問題 (6.29) を解く。ただし、設計変数を $\mathbf{X} = \{\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y, \mathbf{r}_z\}$ に拡張する。

最適化結果と考察

$\bar{g} = 0.0001 \text{ (m}^2\text{)}$ として問題 (6.29) を解いた結果、最適性条件を満足し、最適化は終了した。得られた最適解曲面の形状を図 6.28(c) に示す。また、比較の対象として、初期解曲面 (例題 1 のひずみエネルギー最小化形状) の形状を図 6.28(b) に示す。各図で上方から順にアイソメトリック図、立面図、平面図をそれぞれ示す。また、初期形状および最適形状の、自重作用時の弾性変形の様子を図 6.29(b),(c) にそれぞれ示す。初期形状および最適形状の軸力図を図 6.30(b),(c) に、曲げモーメント図を図 6.31(b),(c) に示す。

図 6.28 をみると、最適解において最大部材長と最小部材長の差は 3.0mm に抑えられ、部材長はほぼ完全に一様化されていることがわかる。最適形状は、部材長を一様化しつつも、初期形状からひずみエネルギーの値を更に低減することが出来ている。総部材長は初期形状の値が維持されている。しかしながら、節点を直接変数としているために、形状の滑らかさが保証されないため、最適形状では、支点近傍で滑らかさに欠ける形状となっている。図 6.29 をみると、大幅に剛性が向上していることが分かる。図 6.30 および図 6.31 をみると、曲げ応力が減少しており、軸力がより支配的となっている。

6.6.4 例題 3：制御点の z 座標を変数とした場合

最適化概要

曲面を三角形パッチベジエ曲面によりモデル化し、制御点の z 座標を設計変数として ($\mathbf{X} = \mathbf{q}_z$)、ひずみエネルギー最小化問題 (6.28) を解き、高い剛性を有する形状が得られることを確認する。

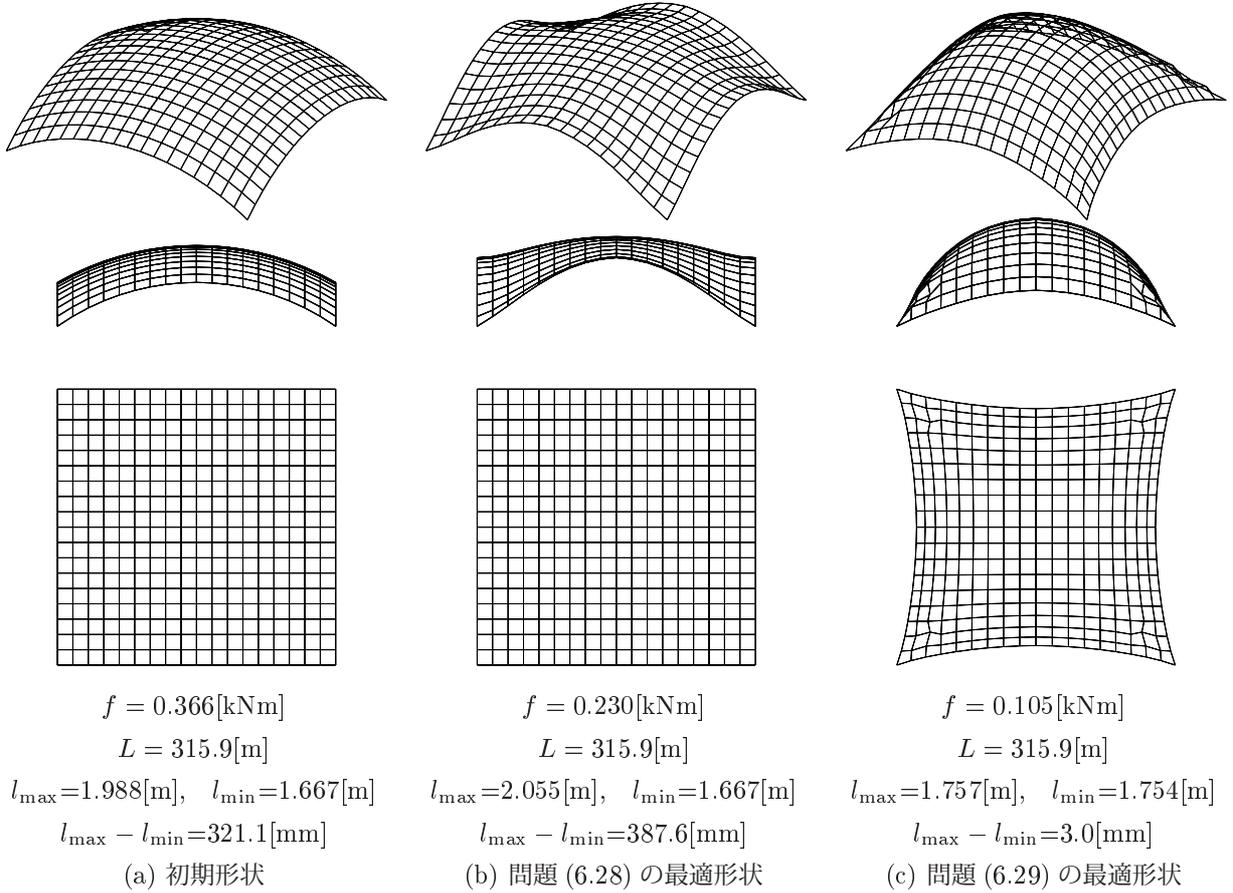


図 6.28 形状図

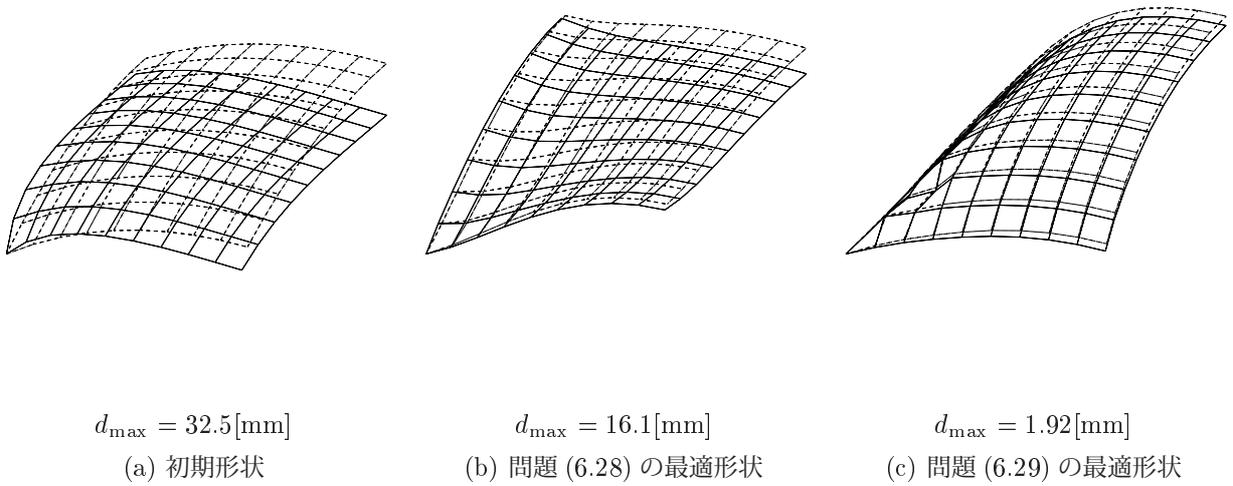


図 6.29 変形図 (×100)

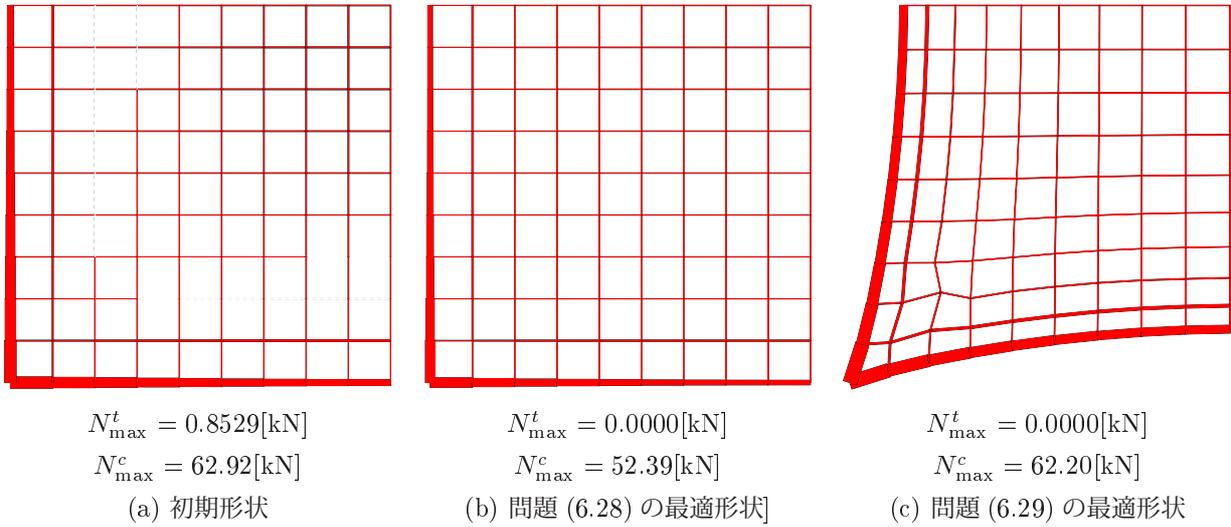


図 6.30 軸力図

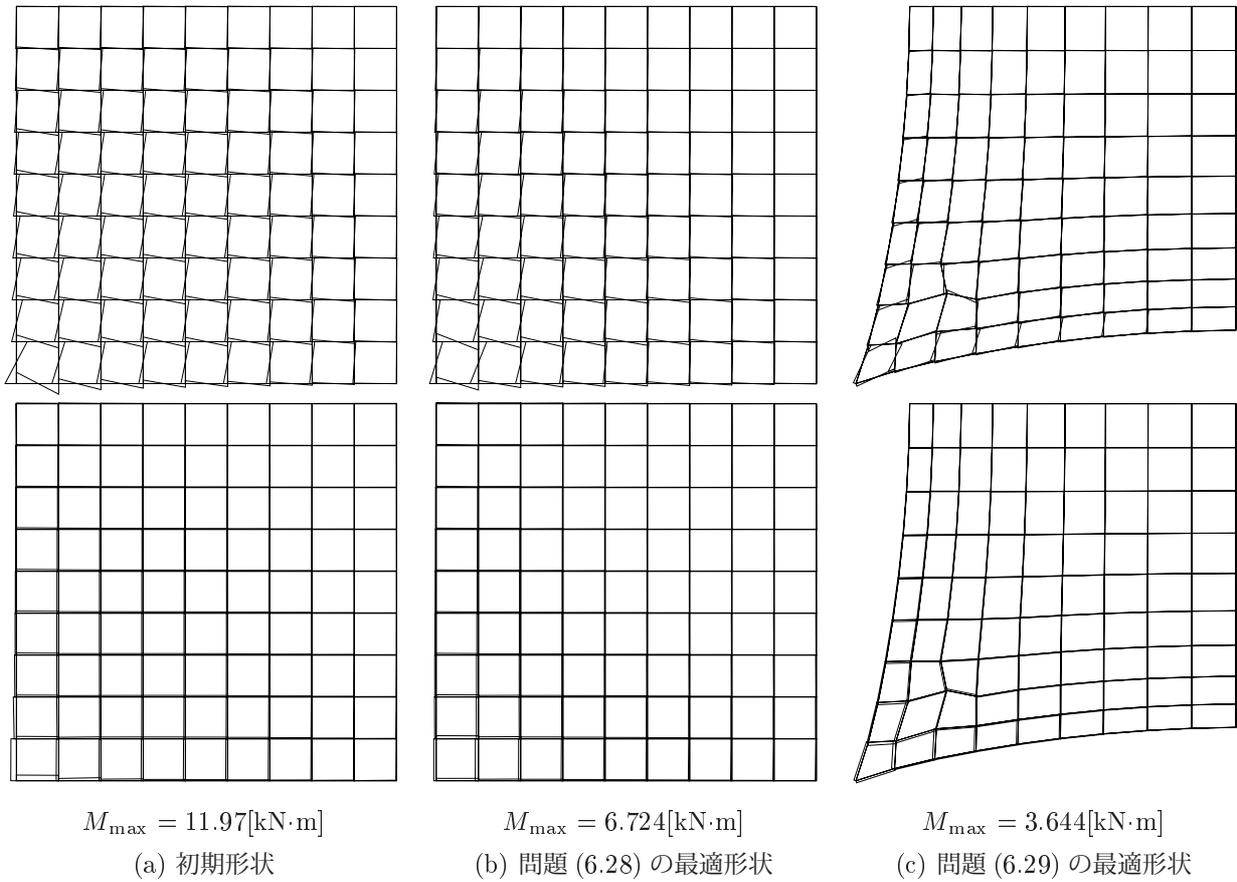


図 6.31 曲げモーメント図

最適化結果と考察

問題 (6.28) を解いた結果、最適性条件を満足し、最適化は終了した。得られた最適解曲面の形状を図 6.32(b) に示す。また、比較の対象として、初期解曲面の形状を図 6.32(a) に示す。各図で上方から順にアイソメトリック図、立面図、平面図をそれぞれ示す。また、初期形状および最適形状の、自重作用時の弾性変形の様子を図 6.33(a),(b) にそれぞれ示す。

初期形状および最適形状の軸力図を図 6.34(a),(b) に、曲げモーメント図を図 6.35(a),(b) に示す。

図 6.32(b) からわかるように、最適解では支点間のライズがカタナリー状に上昇し、高い剛性を持ったシェル形状が得られたことが分かる。

節点を直接設計変数とした場合の最適形状とほぼ同様の形状が得られており、古典的なひずみエネルギー最小化問題に対しては、節点をテンソル積ベジエ曲面で離散化し、設計変数の自由度を減じたことによる影響はほとんどないことが分かる。

次節では、この最適形状を初期形状として、部材長一様化制約の導入を試みる。

6.6.5 例題 4：制御点の xyz 座標を変数とした場合

最適化概要

続いて、6.6.4 項で得られたひずみエネルギー最小解を初期形状として、部材長一様化制約を導入した最適化問題 (6.29) を解く。ただし、設計変数を $\mathbf{X} = \{q_x, q_y, q_z\}$ に拡張する。

最適化結果と考察

$\bar{g} = 0.0001 \text{ (m}^2\text{)}$ として問題 (6.29) を解いた結果、最適性条件を満足し、最適化は終了した。得られた最適解曲面の形状を図 6.32(c) に示す。また、比較の対象として、初期解曲面 (例題 1 のひずみエネルギー最小化形状) の形状を図 6.32(b) に示す。各図で上方から順にアイソメトリック図、立面図、平面図をそれぞれ示す。また、初期形状および最適形状の、自重作用時の弾性変形の様子を図 6.33(b),(c) にそれぞれ示す。初期形状および最適形状の軸力図を図 6.34(b),(c) に、曲げモーメント図を図 6.35(b),(c) に示す。

図 6.32 をみると、最適解において最大部材長と最小部材長の差は 4.1mm に抑えられ、部材長はほぼ完全に一様化されていることがわかる。さらに、三角形グリッドの場合と異なり、節点を直接設計変数とした場合と同等の剛性を有し、節点を直接変数とした場合に見られた、支点近傍のいびつな形状が改善されていることがわかる。

その理由としては、四辺形グリッドでは、部材数の節点数に対する比 (部材密度) が、三角形グリッドと比べて小さく、幾何学的拘束が小さいことが考えられる。

ひずみエネルギーの値はさらに減少し、図 6.33 からわかるように剛性の高い形状となっている。図 6.34 および図 6.35 をみると、曲げ応力が減少しており、軸力がより支配的となっている。

6.6.6 例題 5：曲面上の節点位置を定めるパラメータを変数とした場合

最適化概要

続いて、制御点座標は動かさずに、曲面上の節点位置を定めるパラメータ \mathbf{u}, \mathbf{v} を設計変数として形状を最適化する ($\mathbf{X} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$)。これによって節点は常に与えられたベジエ曲面上を動かすため、初期形状を維持したままひずみエネルギーの値や部材長の偏差を改善することができる。部材長を完全に一様化するためには変数の自由度が十分でないため、まず、図 6.4 の初期形状に対して、 \bar{f} に十分大きな値を設定し、最適化問題 (6.30) を解くことで、部材長が最も一様化された形状を求める。その後、 \bar{f} の値を変化させながら問題 (6.30) の解を求めることにより、パレート解集

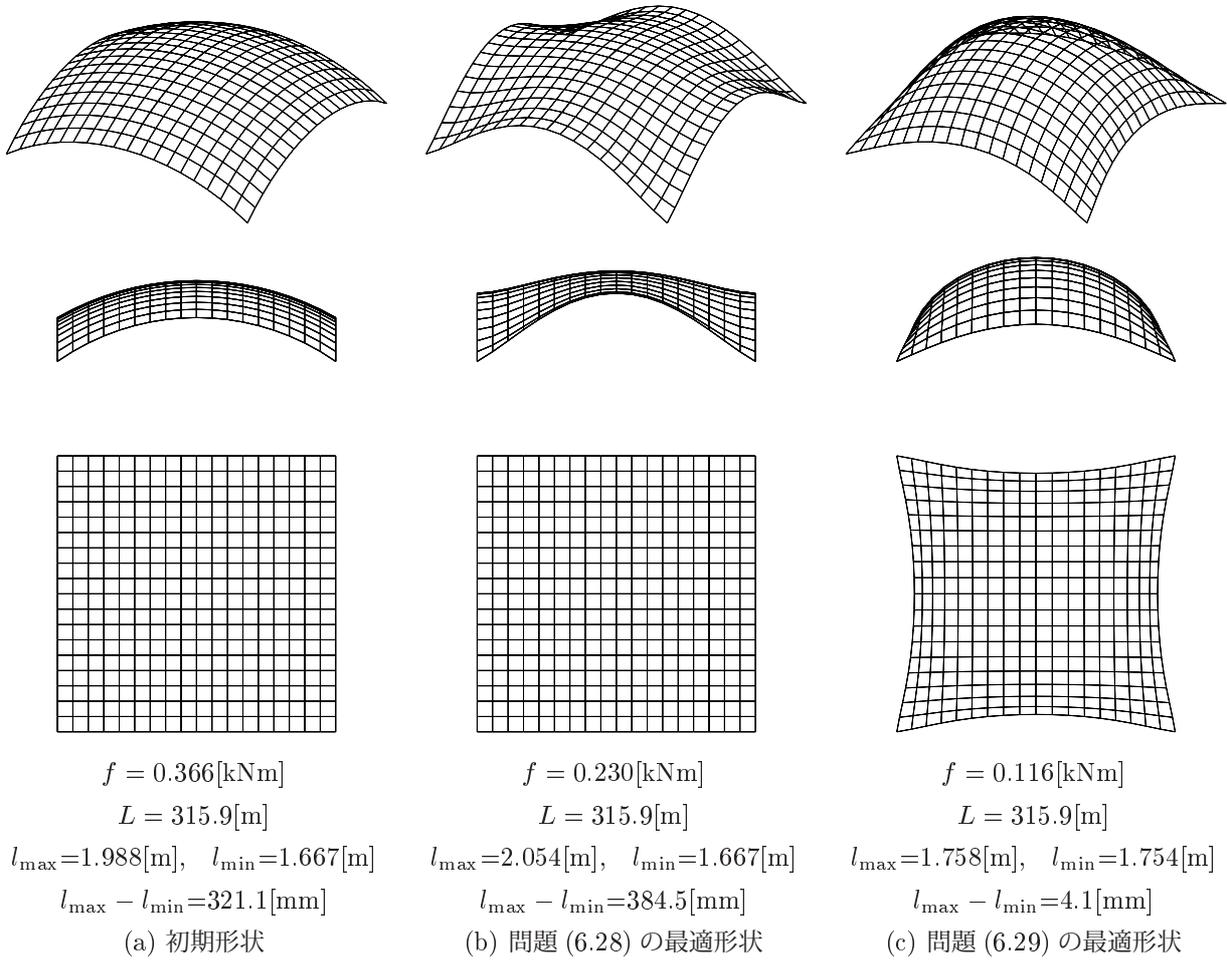


図 6.32 形状図

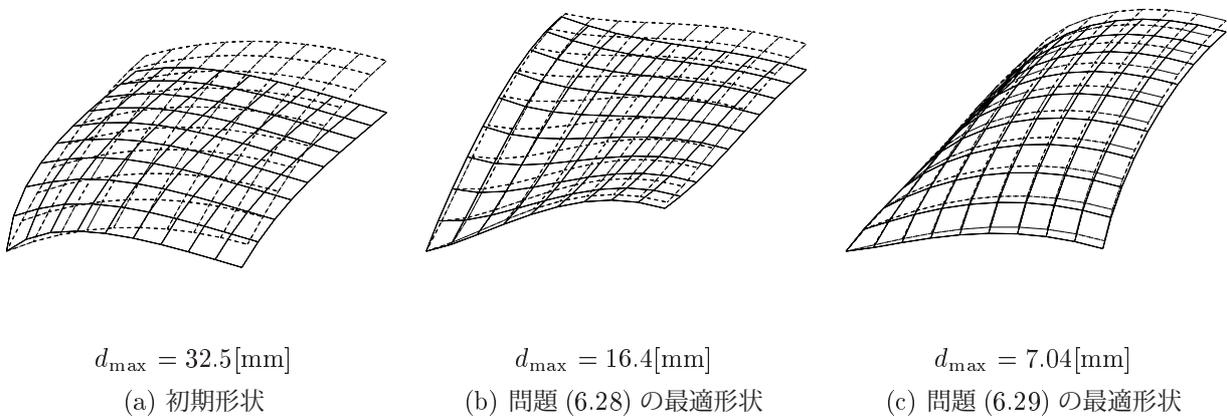


図 6.33 変形図 (×100)

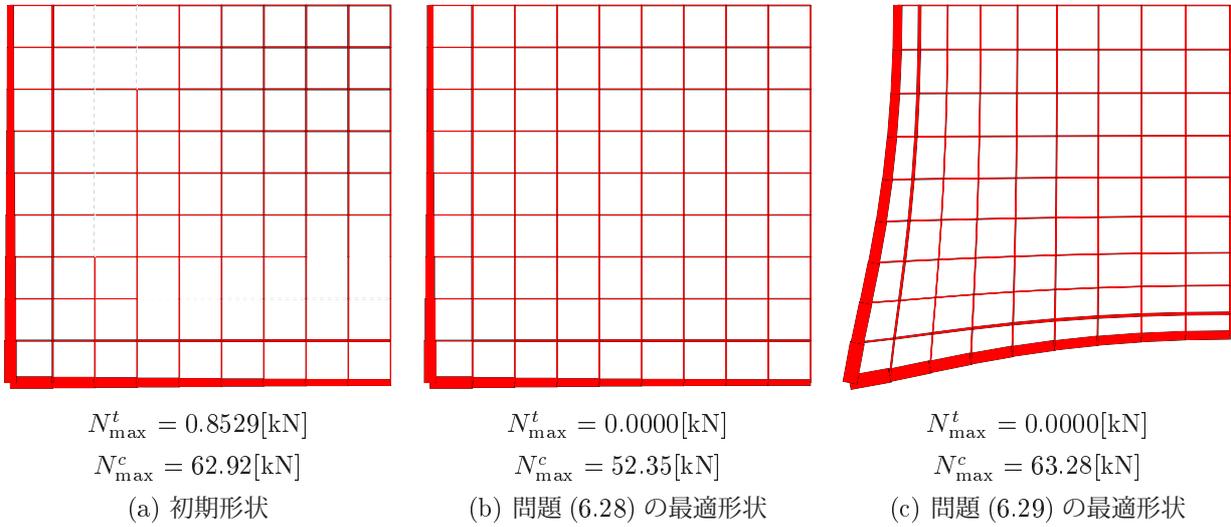


図 6.34 軸力図

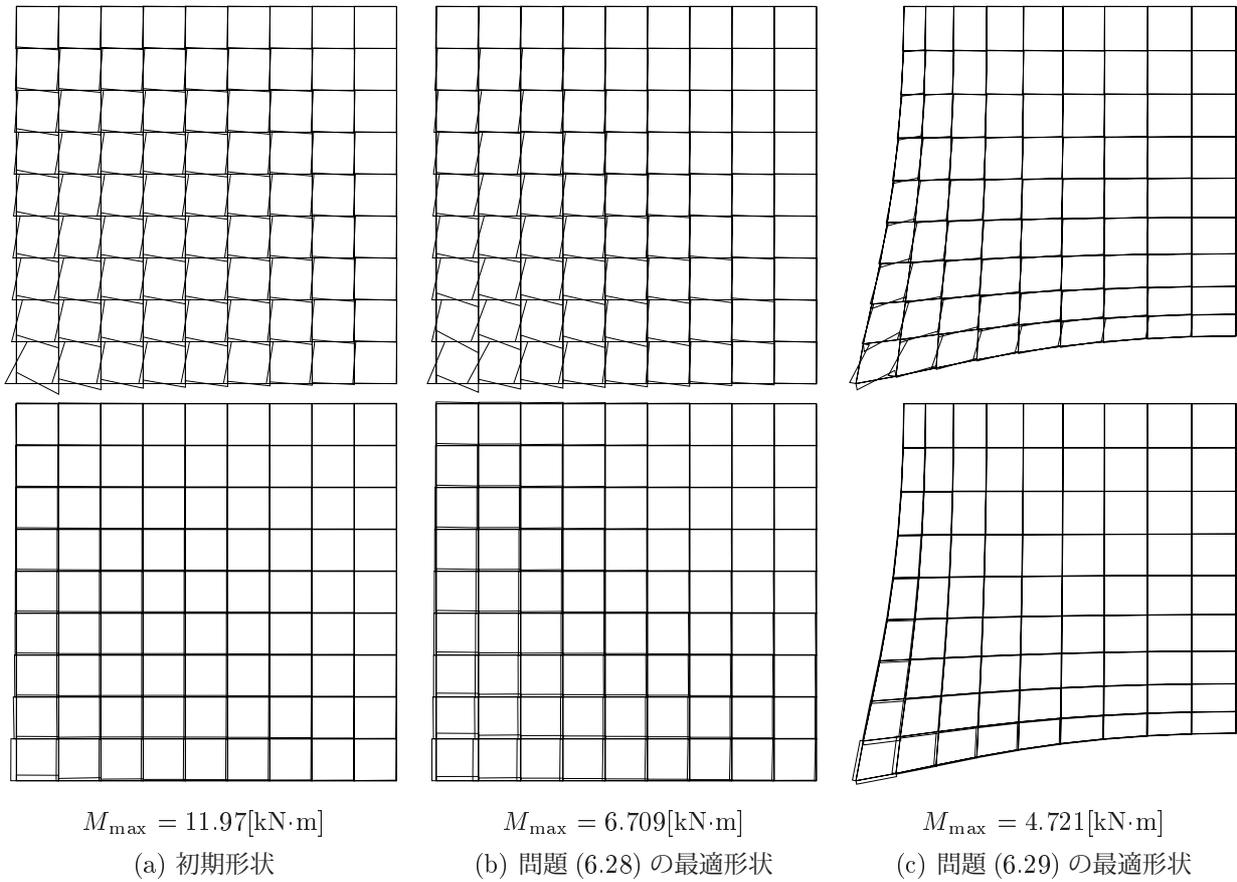


図 6.35 曲げモーメント図

合を得る。

最適化結果と考察

\bar{f} に十分大きな値を設定し、ひずみエネルギー制約を除いて問題 (6.30) を解いた結果、最適性条件を満足し、最適化は終了した。得られた最適解曲面の形状を図 6.36(b) に示す。また、比較の対象として、初期解曲面 (例題 1 のひずみエネルギー最小化形状) の形状を図 6.36(a) に示す。各図で上方から順にアイソメトリック図、立面図、平面図をそれぞれ示す。また、初期形状および最適形状の、自重作用時の弾性変形の様子を図 6.37(a),(b) にそれぞれ示す。初期形状および最適形状の軸力図を図 6.38(a),(b) に、曲げモーメント図を図 6.39(a),(b) に示す。

図 6.36 をみると、最適解において最大部材長と最小部材長の差は 34.28mm となっており、部材長にまだばらつきはあるものの、初期形状と比べると大幅に部材長を一様化できていることが分かる。総部材長は初期形状の値よりわずかに減少している。制御点座標は初期形状のままであり、裁断球殻を維持したまま形状が最適化されていることが分かる。

部材長はかなり一様化されているものの、マクロにみて初期形状からの形状修正量は小さいため、ひずみエネルギーについては、最適解での値は初期解での値と同等であり、図 6.37 からわかるように変位性状も類似したものとなっている。

図 6.38 および図 6.39 をみると、応力状態も初期形状と同様の傾向を示し、曲げ応力が大きく力学的に効率の悪い形態となっている。

この結果を踏まえて、 \bar{f} の値を変化させながら問題 (6.30) を解いた結果を順に示す。いずれの最適化問題も最適性条件を完全に満足し、最適化は終了した。図 6.44 には、 \bar{f} の値を様々に変えて繰り返し最適化をおこなって得られた、ひずみエネルギーと部材長の一様性の関係を表した相関図を示す。横軸にはひずみエネルギー、縦軸には最大部材長と最小部材長の差をとっている。 \bar{f} の値を様々に変えて繰り返し最適化をおこなった最適解群の中で代表的なものを図 6.40~6.43 の (a)~(f) にそれぞれ示す。先ほどと同様、図 6.40 に形状図、図 6.41 に変形図、図 6.42 に軸力図、図 6.43 に曲げモーメント図をそれぞれ示している。

図 6.44 から、三角形グリッドの場合と同様に、 f と g との間にはトレードオフ関係があり、 g の値を緩和するほど部材が支点に向かって流れるような配置へと変わり、剛性の向上と逆に部材長の一様性が失われていることが分かる。

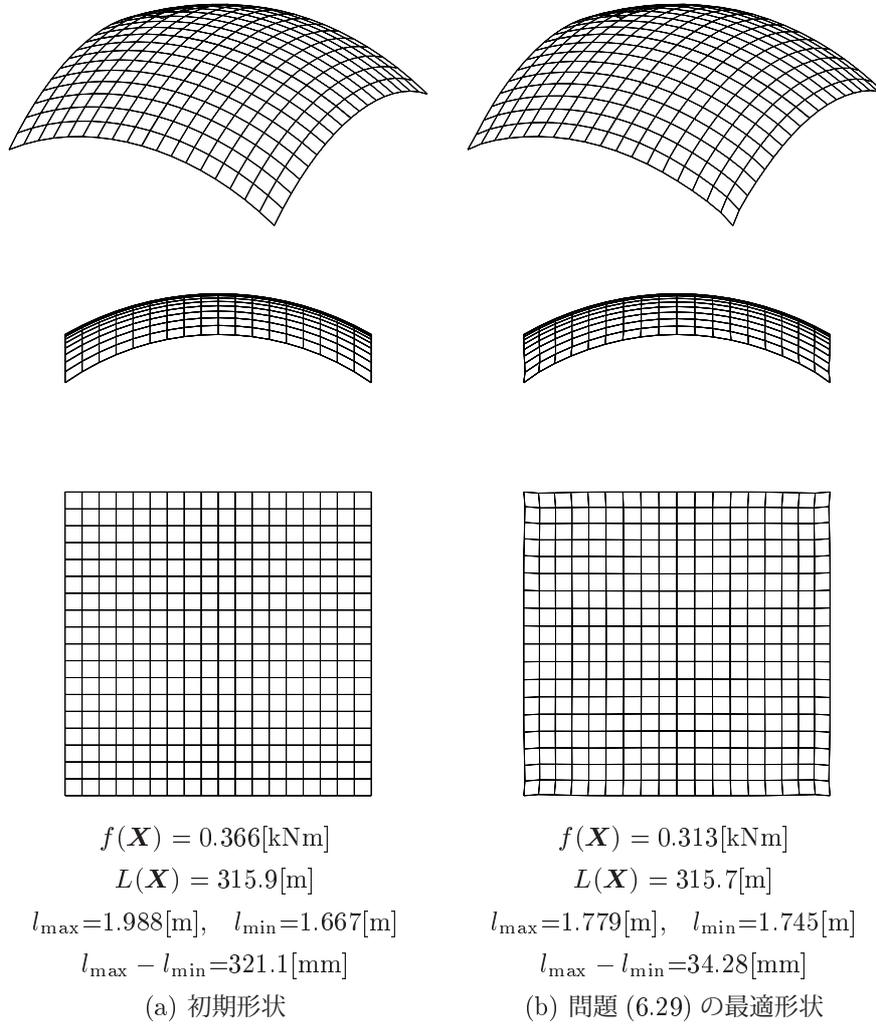


図 6.36 形状図

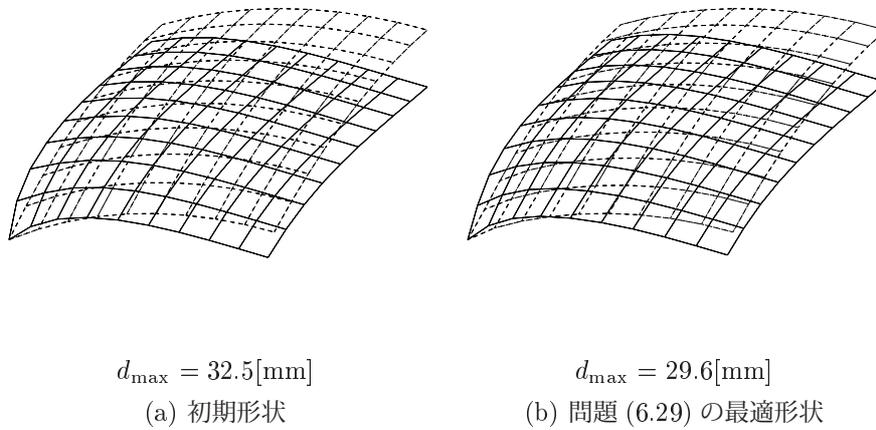


図 6.37 変形図 (×100)

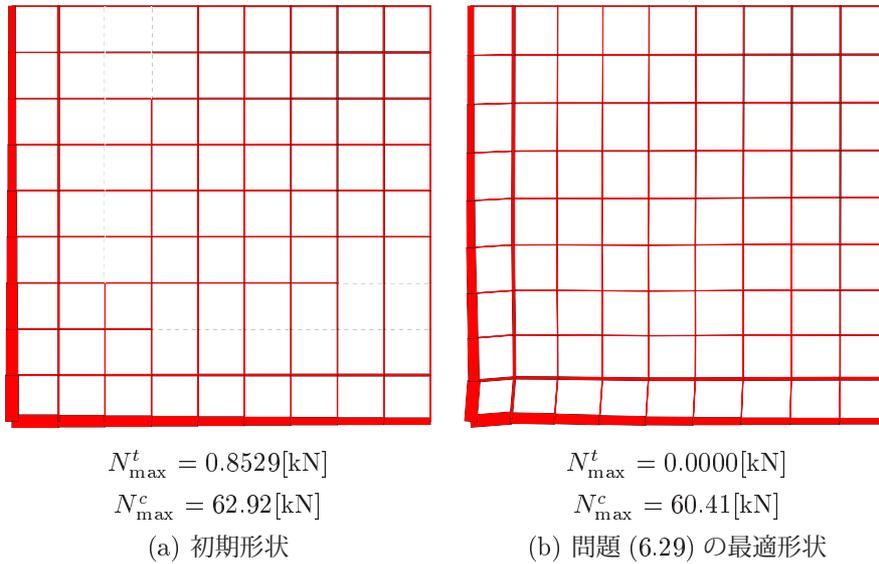


図 6.38 軸力図

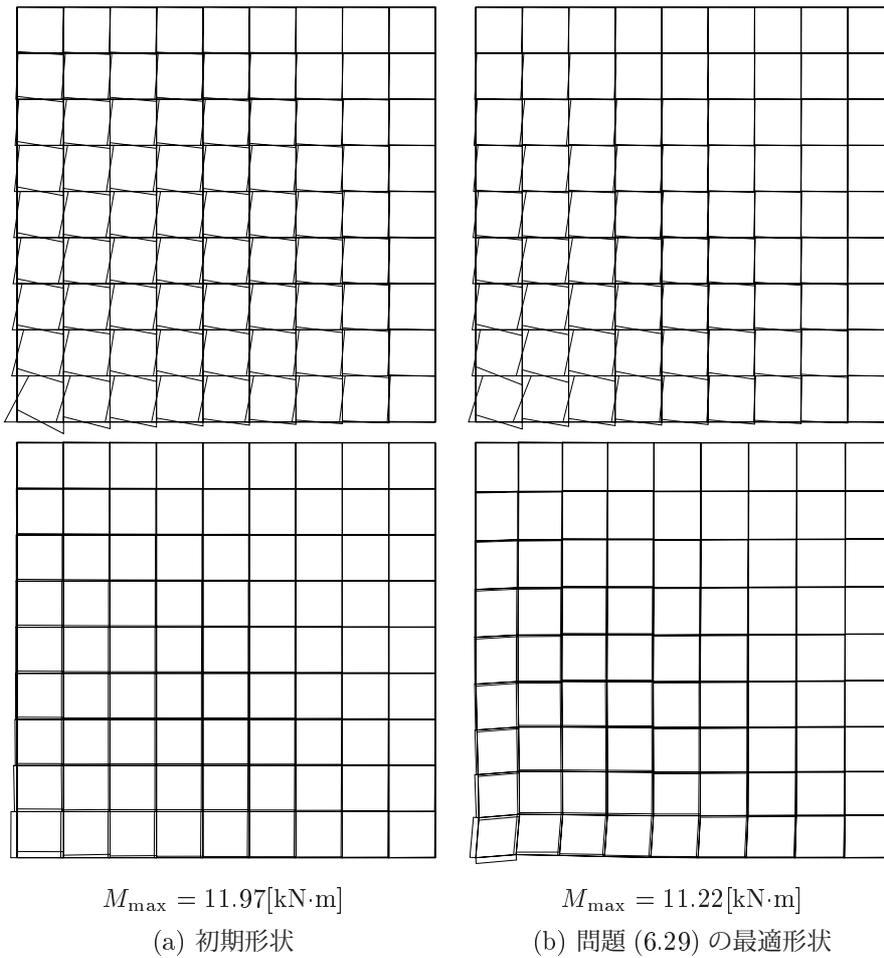


図 6.39 曲げモーメント図

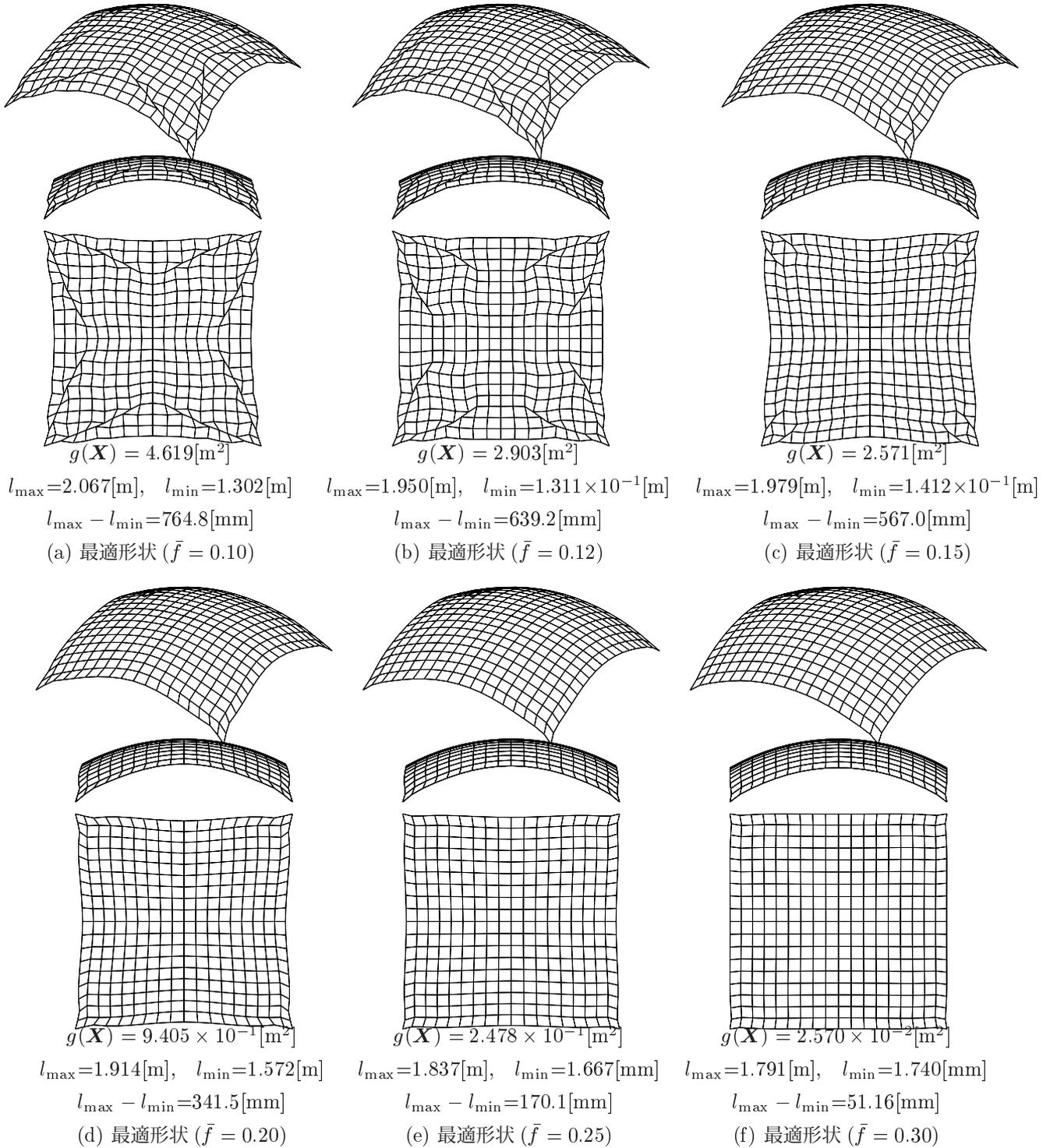
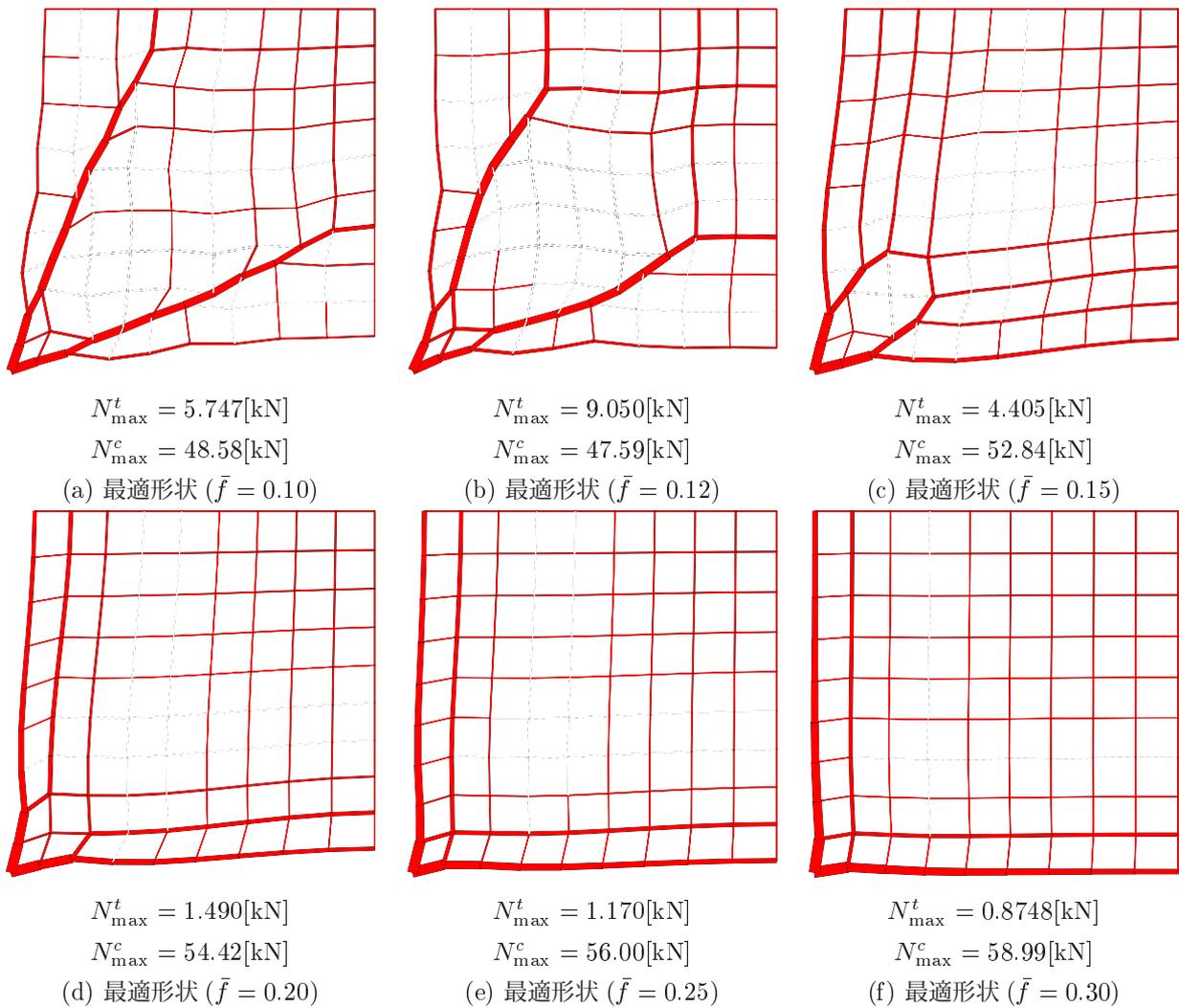
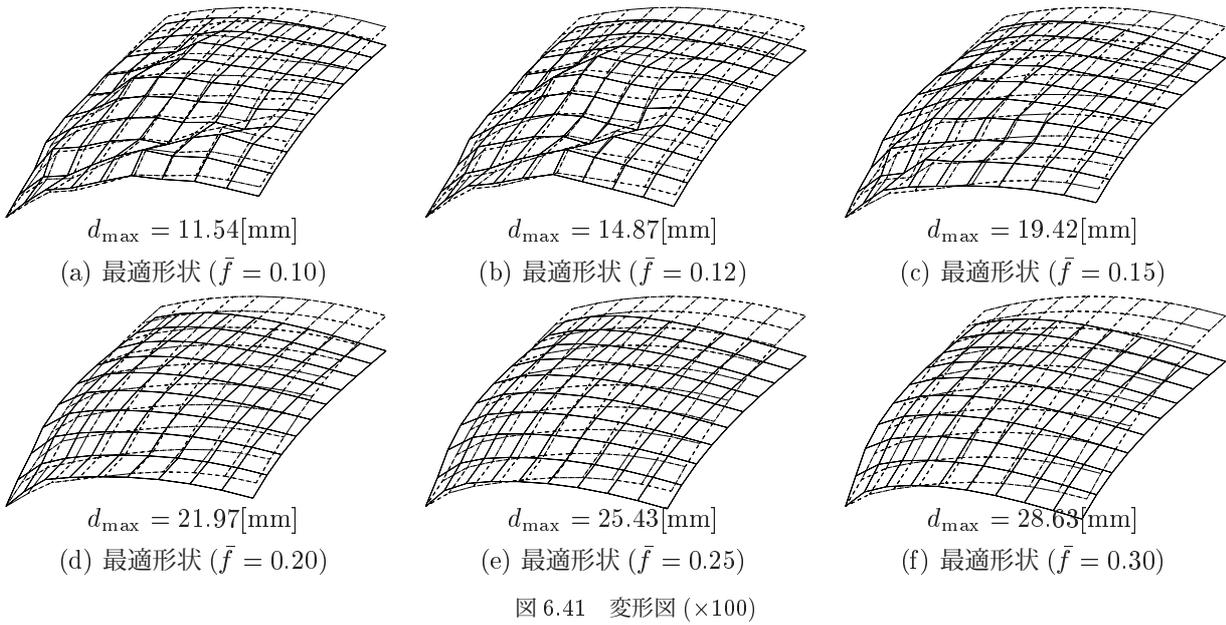
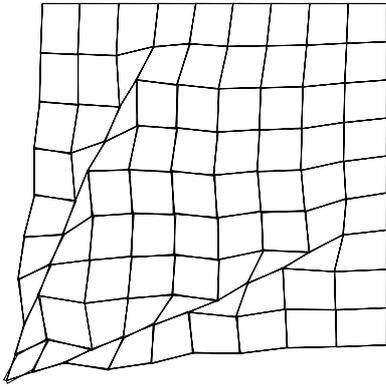


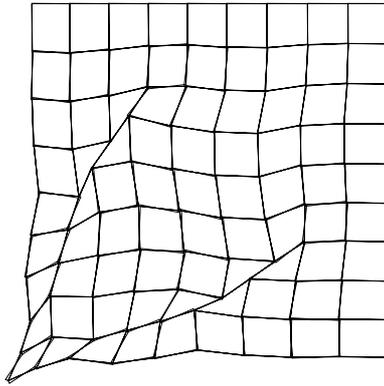
図 6.40 形状図





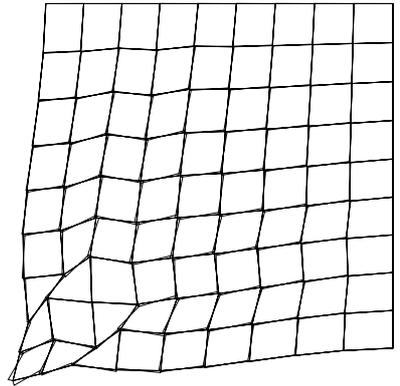
$$M_{\max} = 5.385[\text{kN}\cdot\text{m}]$$

(a) 最適形状 ($\bar{f} = 0.10$)



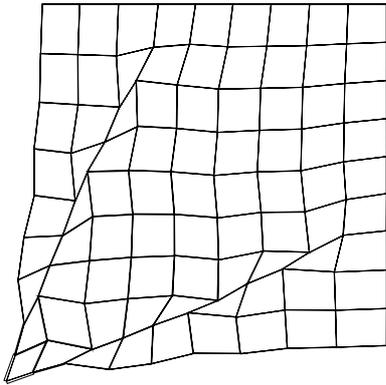
$$M_{\max} = 6.126[\text{kN}\cdot\text{m}]$$

(b) 最適形状 ($\bar{f} = 0.12$)



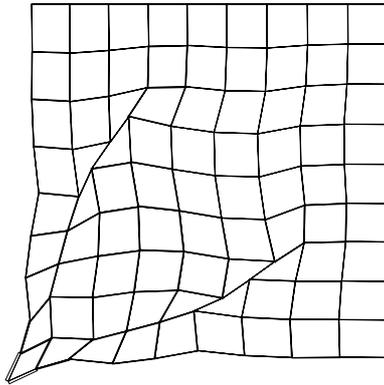
$$M_{\max} = 7.817[\text{kN}\cdot\text{m}]$$

(c) 最適形状 ($\bar{f} = 0.15$)



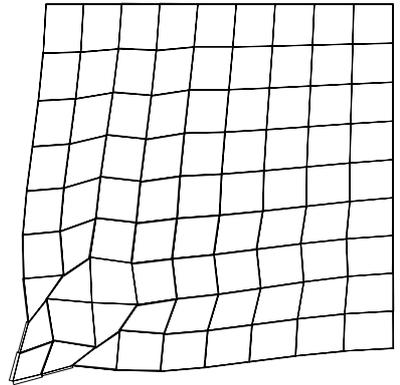
$$M_{\max} = 9.274[\text{kN}\cdot\text{m}]$$

(d) 最適形状 ($\bar{f} = 0.20$)



$$M_{\max} = 10.3[\text{kN}\cdot\text{m}]$$

(e) 最適形状 ($\bar{f} = 0.25$)



$$M_{\max} = 11.09[\text{kN}\cdot\text{m}]$$

(f) 最適形状 ($\bar{f} = 0.30$)

図 6.43 曲げモーメント図

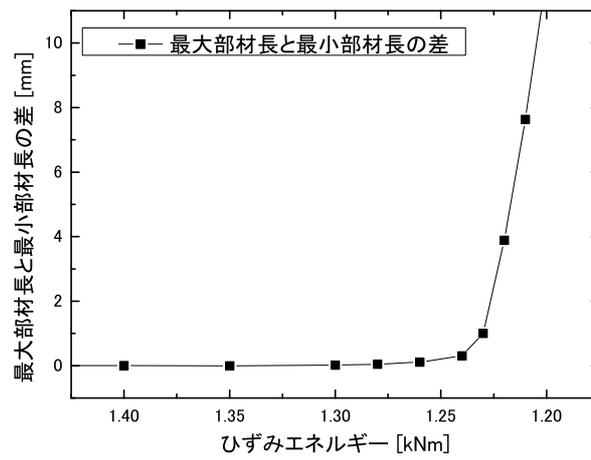


図 6.44 ひずみエネルギーと部材長の一様性の関係

6.7 数値解析例 4 – 部材グループを考慮した場合 –

6.7.1 最適化モデル

最適化モデルは 6.5.5 項と同様とし、6.5.4 項で得られたひずみエネルギー最小解を初期形状とする。

すべての部材長を完全に一様化した場合、特に三角形グリッドの場合においては、部材角が 60 度で均一化されるというメリットがある反面、図 6.9(c) からわかるように、設計変数の自由度によっては現実的な解が得られない場合がある。そこで本項では、すべての部材の部材長を一様化するのではなく、部材のグルーピングを行い、各グループごとに部材長を一様化するような最適化問題を扱う。

最適化概要

本項では、次の最適化問題を考える。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(\mathbf{X}) = \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{K} \mathbf{d} \\ & \text{subject to} && \begin{cases} L(\mathbf{X}) - L_0 \leq 0 \\ g(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^h \sum_{k=1}^{m^{(i)}} (l_k^{(i)} - l_{ave}^{(i)})^2 \leq \bar{g} \\ \mathbf{r}_x^*(\mathbf{X}) - \mathbf{r}_{x,0}^* = 0 \\ \mathbf{r}_y^*(\mathbf{X}) - \mathbf{r}_{y,0}^* = 0 \\ \mathbf{r}_z^*(\mathbf{X}) - \mathbf{r}_{z,0}^* = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.31)$$

これは、部材をいくつかのグループに分け、そのグループごとに部材長を一様化する問題である。 h は部材グループ数、 $m^{(i)}$ は i 番目のグループの部材数であり、 $l_k^{(i)}$ は、 i 番目のグループの k 番目の部材の部材長、 $l_{ave}^{(i)}$ は i 番目のグループに含まれる部材の平均部材長である。これによって、部材グループ内で部材長を一様化することができる。設計変数は $\mathbf{X} = \{\mathbf{q}_x, \mathbf{q}_y, \mathbf{q}_z\}$ とする。図 6.45(a)~(f) に示す 6 パターンのグルーピングに対して最適化を行う。

パターン (a) は、初期形状の部材を特に規則性を設けずに、部材長の近いもの同士を 10 にグループ分けしたものであり、必ずしも対称性を有しない。

パターン (b) は、円周方向と放射方向とで 2 つにグループ分けしたものである。

パターン (c) は、パターン (b) のグループ分けののち、円周方向について更に 6 つにグループ分けし、合計 7 グループとしたものである。

パターン (d) は、パターン (c) の円周方向についてのグルーピングをさらに細かくし、合計 13 グループとしたものである。

パターン (e) は、パターン (b) のグループ分けののち、放射方向について更に 12 個に細かくグループ分けし、合計 13 グループとしたものである。

パターン (f) は、パターン (b) のグループ分けののち、円周方向、放射方向それぞれについて更に 12 個に細かくグループ分けし、合計 24 グループとしたものである。

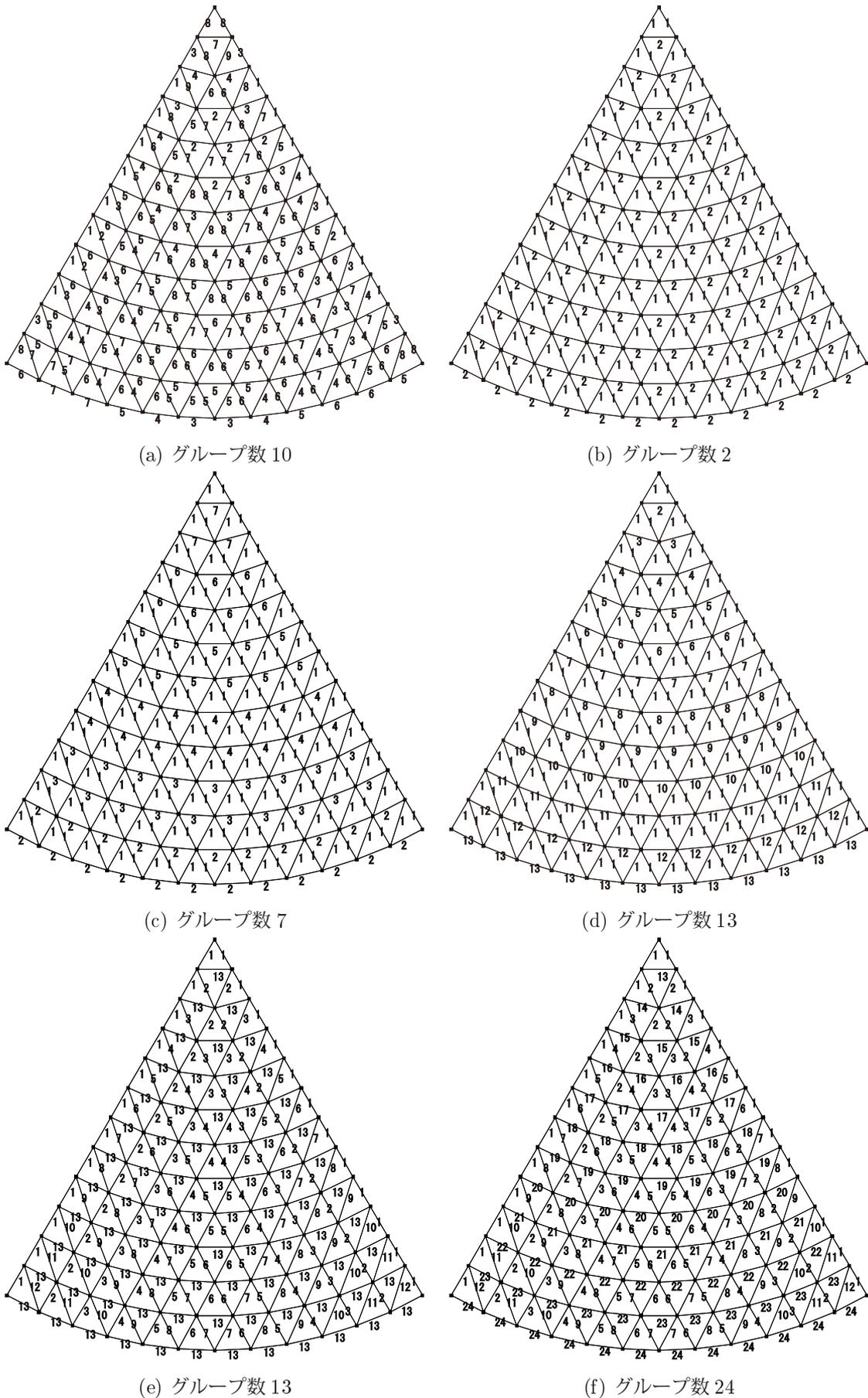


図 6.45 部材グループのパターン

最適化結果と考察

$g(\mathbf{X}) = 0.0001$ として問題 (6.31) を解いた結果、いずれのグルーピングパターンにおいても、最適性条件を完全に満足し、最適化は終了した。本手法により得られた最適解曲面のシェル形状を図 6.46~6.51 にそれぞれ示す。各図で上方から順に、シェル形状のアイソメトリック図、立面図、平面図をそれぞれ示す。

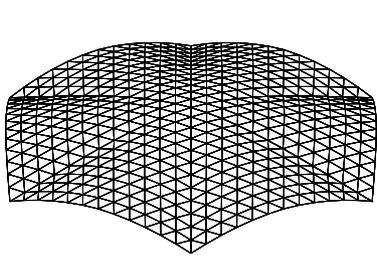
また、表 6.2 には、各グルーピングパターンの部材長のばらつきをまとめた。表中、 $l_{\max,0}$, $l_{\min,0}$ は、初期解 (6.5.4 項で得られたひずみエネルギー最小解) における各グループ内での最大部材長と最小部材長の値を、 l_{\max} , l_{\min} として示した値は、最適解における最大部材長と最小部材長の値をそれぞれ表す。また、最大部材長と最小部材長の差も合わせて示している。

また、最適形状の自重作用時の弾性変形の様子を図 6.53~6.58 の (a) にそれぞれ示す。また、最適形状の軸力図を図 6.53~6.58 の (b) に、曲げモーメント図を図 6.53~6.58 の (c) に示す。

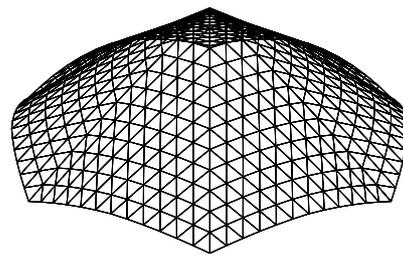
図 6.46 をみると、無作為に部材グループを設定した場合の最適形状は、全部材長を一様化した場合の最適形状と同様にライズの低い形状となり、部材をグルーピングしたことによる効果は小さいことがわかる。一方で、図 6.47 をみると、作為的に放射方向と円周方向とでグルーピングした場合、ライズを持った形状が得られており、ひずみエネルギーの値も抑えられていることがわかる。図 6.48~図 6.50 をみると、円周方向の部材を細かくグルーピングする場合と比べて、放射方向の部材を細かく部材をグルーピングする方がひずみエネルギーが抑えられていることが確認できる。図 6.50 をみると、両方向ともに細かく部材をグルーピングした場合、ひずみエネルギーの値は非常に小さく抑えられており、最適形状は鉛直方向のみならず平面形状も大きく変化していることがわかる。

図 6.53~6.58 の (a) をみると、ひずみエネルギーの値に比例して、変位も抑えられていることが確認できる。パターン (a) を除いて、6.5.4 項で得られたひずみエネルギー最小化形状よりもさらに高い剛性を持った形状が得られており、手法の有効性が確認できる。パターン (a) については、部材グループ数が 10 と比較的多いにもかかわらず、部材グループ数が 2 と少ないパターン (b) よりも剛性の小さい形状となっており、部材グループの取り方が得られる最適形状に与える影響が極めて大きいことがわかる。

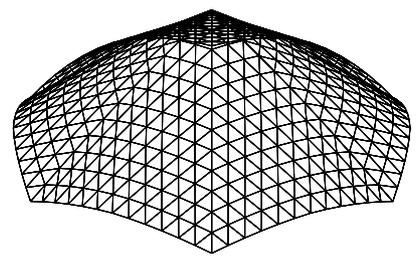
図 6.53~6.58 の (b), (c) をみると、応力も小さいオーダーに抑えられており、特に曲げモーメントと引張軸力値が小さくなっており、圧縮軸力が支配的な力学形態となっている。



(a) アイスメトリック



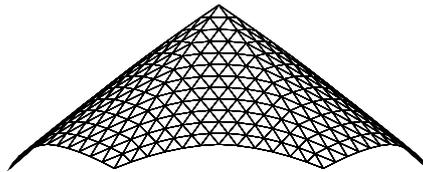
(a) アイスメトリック



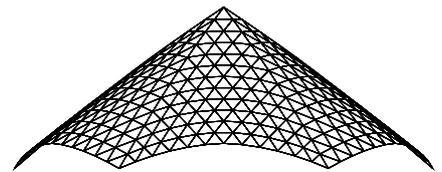
(a) アイスメトリック



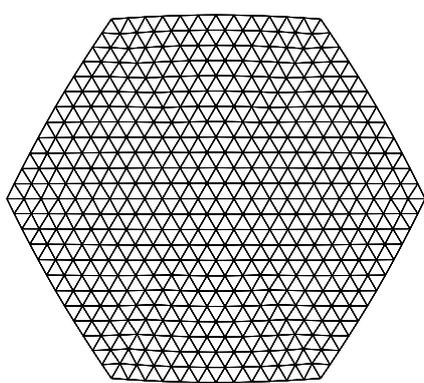
(b) 立面図



(b) 立面図



(b) 立面図

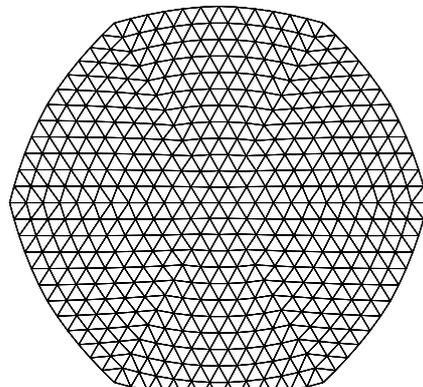


(c) 平面図

$$f = 0.321[\text{kNm}]$$

$$L = 1312[\text{m}]$$

図 6.46 パターン (a) の最適形状

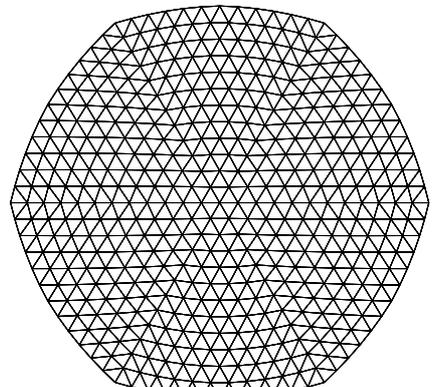


(c) 平面図

$$f = 0.179[\text{kNm}]$$

$$L = 1520[\text{m}]$$

図 6.47 パターン (b) の最適形状

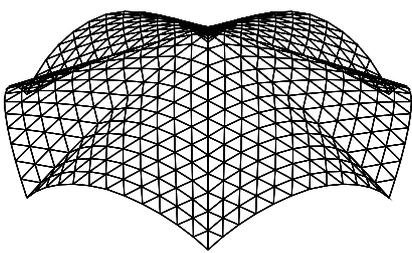


(c) 平面図

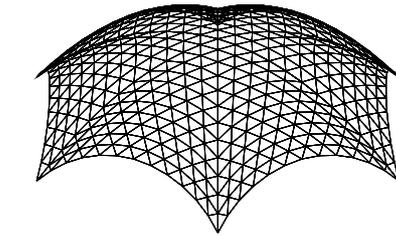
$$f = 0.176[\text{kNm}]$$

$$L = 1516[\text{m}]$$

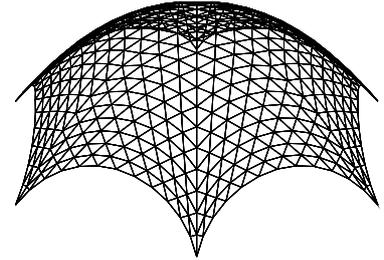
図 6.48 パターン (c) の最適形状



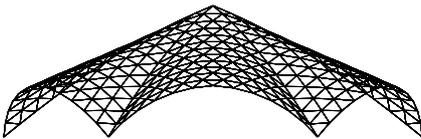
(a) アイソメトリック



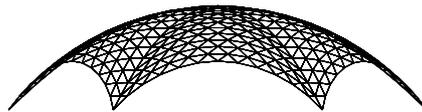
(a) アイソメトリック



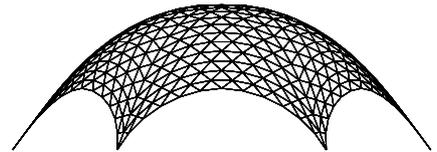
(a) アイソメトリック



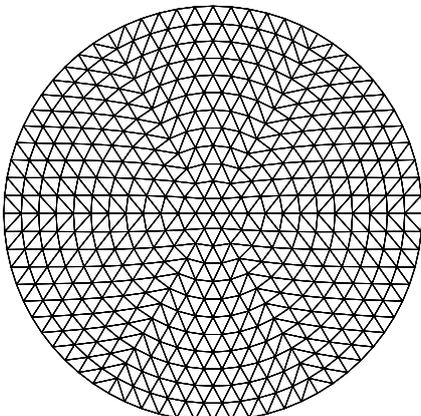
(b) 立面図



(b) 立面図



(b) 立面図

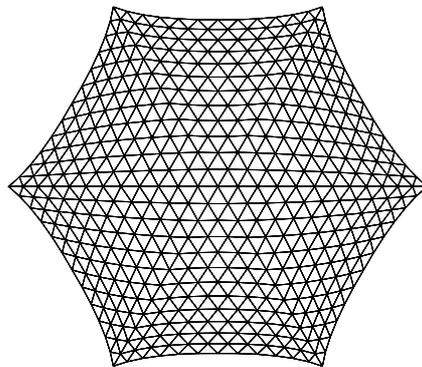


(c) 平面図

$$f = 0.143[\text{kNm}]$$

$$L = 1488[\text{m}]$$

図 6.49 パターン (d) の最適形状

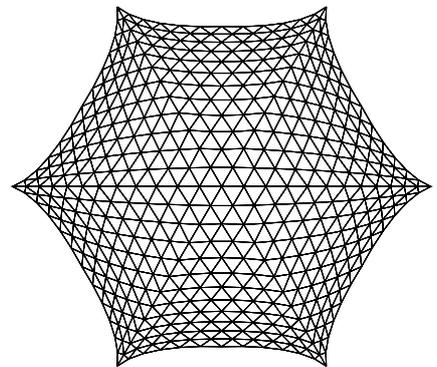


(c) 平面図

$$f = 0.088[\text{kNm}]$$

$$L = 1327[\text{m}]$$

図 6.50 パターン (e) の最適形状



(c) 平面図

$$f = 0.065[\text{kNm}]$$

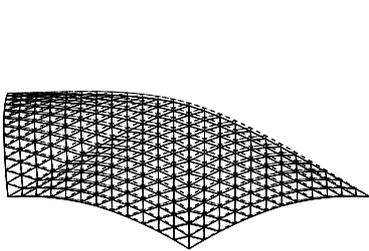
$$L = 1392[\text{m}]$$

図 6.51 パターン (f) の最適形状

図 6.52 形状図

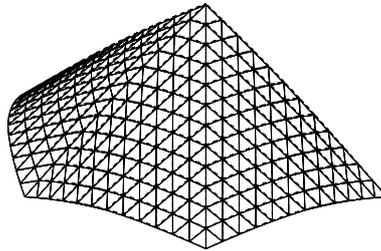
表 6.2 各パターンにおける各部材グループの最大, 最小部材長および最大部材長と最小部材長の差

グルーピングパターン	Group No.	$l_{\max,0}$ [m]	$l_{\min,0}$ [m]	l_{\max} [m]	l_{\min} [m]	$l_{\max,0} - l_{\min,0}$ [mm]	$l_{\max} - l_{\min}$ [mm]
パターン (a)	1	2.760	1.913	1.933	1.931	847.43	2.02
	2	2.694	1.891	1.934	1.932	803.05	2.32
	3	2.694	1.882	1.935	1.933	812.37	1.75
	4	2.675	1.897	1.936	1.934	778.17	1.79
	5	2.962	1.968	1.937	1.935	994.38	1.97
	6	2.962	1.875	1.938	1.936	1087.01	2.08
	7	2.920	1.875	1.939	1.937	1044.92	2.06
	8	2.736	1.876	1.940	1.938	860.13	1.32
	9	2.344	2.132	1.940	1.939	212.08	0.15
	10	2.344	2.132	1.940	1.939	212.08	0.15
パターン (b)	1	2.760	1.876	2.390	2.388	884.30	2.46
	2	2.962	1.875	1.964	1.962	1087.01	2.03
パターン (c)	1	2.760	1.876	2.378	2.376	884.30	2.06
	2	2.962	1.968	1.970	1.968	994.38	1.84
	3	2.777	1.962	1.969	1.968	815.22	0.94
	4	2.426	1.943	1.968	1.967	483.30	1.26
	5	2.126	1.916	1.967	1.966	209.80	0.92
	6	1.977	1.891	1.967	1.966	85.40	0.98
	7	1.897	1.875	1.969	1.967	21.92	1.98
パターン (d)	1	2.760	1.876	2.228	2.227	884.30	1.52
	2	1.875	1.875	2.045	2.045	0.00	0.00
	3	1.897	1.897	2.041	2.041	0.00	0.00
	4	1.934	1.891	2.046	2.045	42.84	0.98
	5	1.977	1.913	2.055	2.054	64.15	1.24
	6	2.035	1.916	2.069	2.068	118.69	0.34
	7	2.126	1.940	2.086	2.085	186.20	1.06
	8	2.259	1.943	2.106	2.105	316.03	0.88
	9	2.426	1.970	2.126	2.126	455.51	0.55
	10	2.608	1.962	2.147	2.146	645.85	0.88
	11	2.777	1.993	2.167	2.166	784.56	0.77
	12	2.904	1.968	2.184	2.181	936.85	2.62
	13	2.962	1.995	2.199	2.196	966.69	2.26
パターン (e)	1	2.760	1.876	2.155	2.154	884.30	1.51
	2	2.578	2.085	2.097	2.096	492.92	0.71
	3	2.398	2.197	2.031	2.030	201.53	0.67
	4	2.505	2.224	1.957	1.956	281.23	0.90
	5	2.614	2.161	1.875	1.874	453.27	0.90
	6	2.675	2.141	1.785	1.784	534.45	1.42
	7	2.694	2.179	1.687	1.686	515.44	1.09
	8	2.683	2.274	1.583	1.583	408.38	0.48
	9	2.655	2.392	1.473	1.472	263.61	1.26
	10	2.634	2.519	1.357	1.356	115.28	1.22
	11	2.649	2.637	1.236	1.235	11.23	0.83
	12	2.736	2.736	1.112	1.112	0.00	0.00
	13	2.962	1.875	2.151	2.149	1087.01	2.40
パターン (f)	1	2.760	1.876	2.397	2.395	884.30	2.02
	2	2.578	2.085	2.307	2.305	492.92	1.43
	3	2.398	2.197	2.202	2.202	201.53	0.72
	4	2.505	2.224	2.085	2.083	281.23	1.48
	5	2.614	2.161	1.953	1.952	453.27	0.93
	6	2.675	2.141	1.809	1.809	534.45	0.88
	7	2.694	2.179	1.653	1.652	515.44	0.99
	8	2.683	2.274	1.485	1.484	408.38	0.64
	9	2.655	2.392	1.307	1.305	263.61	1.12
	10	2.634	2.519	1.117	1.116	115.28	1.16
	11	2.649	2.637	0.917	0.917	11.23	0.53
	12	2.736	2.736	0.709	0.709	0.00	0.00
	13	1.875	1.875	2.395	2.395	0.00	0.00
	14	1.897	1.897	2.387	2.387	0.00	0.00
	15	1.934	1.891	2.377	2.375	42.84	1.88
	16	1.977	1.913	2.359	2.358	64.15	0.23
	17	2.035	1.916	2.339	2.339	118.69	0.62
	18	2.126	1.940	2.319	2.318	186.20	0.88
	19	2.259	1.943	2.301	2.300	316.03	0.58
	20	2.426	1.970	2.286	2.286	455.51	0.24
	21	2.608	1.962	2.278	2.277	645.85	0.39
	22	2.777	1.993	2.279	2.278	784.56	1.19
	23	2.904	1.968	2.291	2.289	936.85	1.55
	24	2.962	1.995	2.318	2.317	966.69	1.41



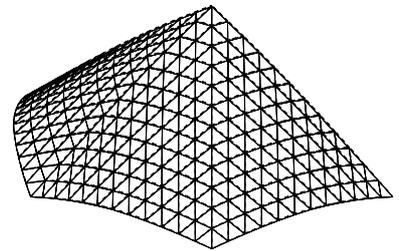
$d_{\max} = 4.44[\text{mm}]$

(a) 変形図 ($\times 100$)



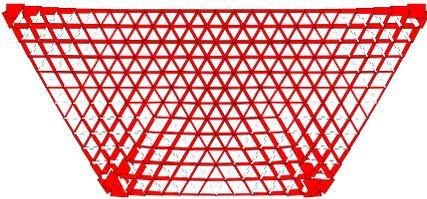
$d_{\max} = 1.66[\text{mm}]$

(a) 変形図 ($\times 100$)



$d_{\max} = 1.72[\text{mm}]$

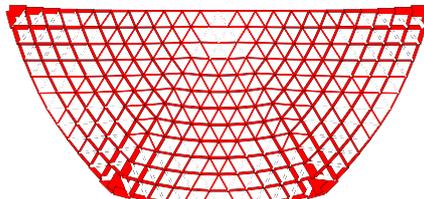
(a) 変形図 ($\times 100$)



$N_{\max}^t = 24.67[\text{kN}]$

$N_{\max}^c = 105.2[\text{kN}]$

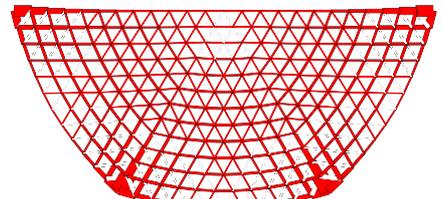
(b) 軸力図



$N_{\max}^t = 21.54[\text{kN}]$

$N_{\max}^c = 81.29[\text{kN}]$

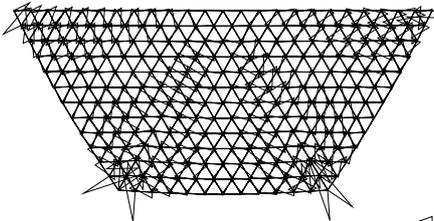
(b) 軸力図



$N_{\max}^t = 16.58[\text{kN}]$

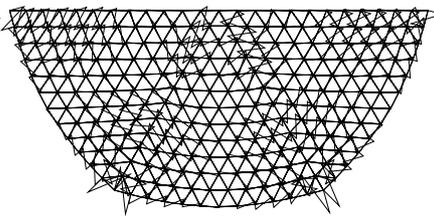
$N_{\max}^c = 80.64[\text{kN}]$

(b) 軸力図



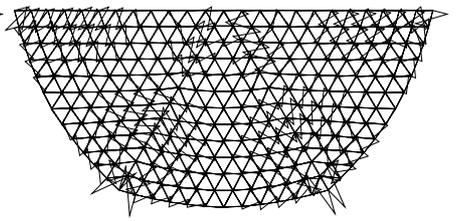
$M_{\max} = 1.298[\text{kN}\cdot\text{m}]$

(c) 曲げモーメント図



$M_{\max} = 0.975[\text{kN}\cdot\text{m}]$

(c) 曲げモーメント図



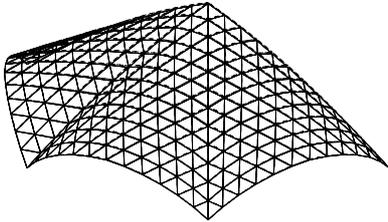
$M_{\max} = 0.935[\text{kN}\cdot\text{m}]$

(c) 曲げモーメント図

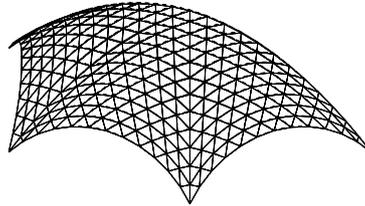
図 6.53 パターン (a) の最適形状

図 6.54 パターン (b) の最適形状

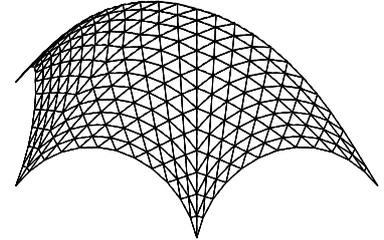
図 6.55 パターン (c) の最適形状



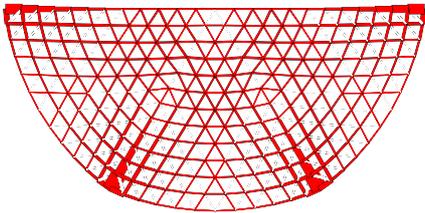
$d_{\max} = 2.11[\text{mm}]$
(a) 変形図 ($\times 100$)



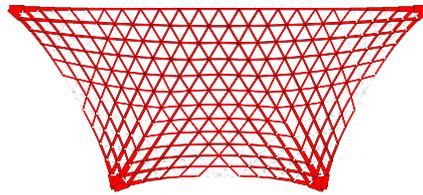
$d_{\max} = 1.46[\text{mm}]$
(a) 変形図 ($\times 100$)



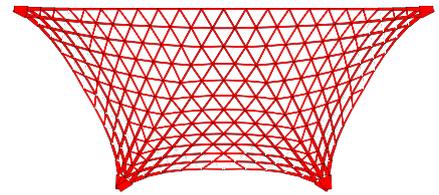
$d_{\max} = 0.89[\text{mm}]$
(a) 変形図 ($\times 100$)



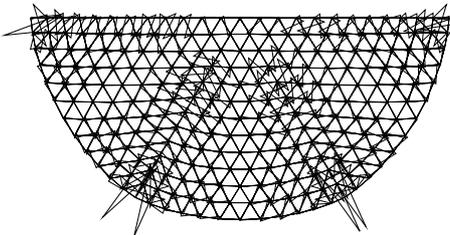
$N_{\max}^t = 13.80[\text{kN}]$
 $N_{\max}^c = 76.67[\text{kN}]$
(b) 軸力図



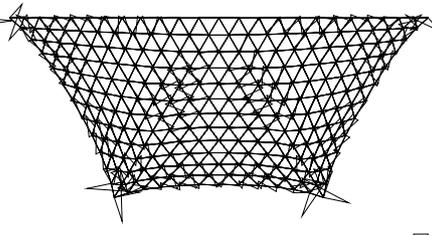
$N_{\max}^t = 4.807[\text{kN}]$
 $N_{\max}^c = 49.98[\text{kN}]$
(b) 軸力図



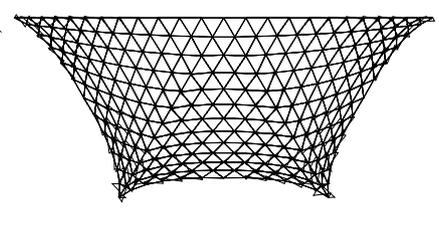
$N_{\max}^t = 1.489[\text{kN}]$
 $N_{\max}^c = 35.99[\text{kN}]$
(b) 軸力図



$M_{\max} = 1.078[\text{kN}\cdot\text{m}]$
(c) 曲げモーメント図



$M_{\max} = 1.135[\text{kN}\cdot\text{m}]$
(c) 曲げモーメント図



$M_{\max} = 0.413[\text{kN}\cdot\text{m}]$
(c) 曲げモーメント図

図 6.56 パターン (d) の最適形状

図 6.57 パターン (e) の最適形状

図 6.58 パターン (f) の最適形状

6.8 6章の結論

本章では、ラチスシェル構造の構成部材の部材長一様性に着目し、最適化問題の制約条件 (あるいは目的関数) に部材長一様性の評価指標を組み込んだ形状最適化手法の提案をおこない、様々な数値解析例を通じて手法の有効性を検証した。

まず、部材長の一様性の評価方法について検討した。複数ある部材長一様化の手法をすべて最適化問題として定式化し、厳密に感度解析をおこなって同じ最適化条件でベンチマーク問題を解いた結果、部材長一様性の評価指標として、部材長の平均部材長からの差の2乗和が有効であることを確認した。

ひずみエネルギー最小化と部材長の平均部材長からの差の2乗和の最小化を目的とする多目的最適化問題を、制約法を用いて解き、両者にトレードオフ関係があることを確認した。

なお、前章とは異なり、鉛直方向のみの形状修正ではなく、全方向に形状修正をおこなっている。最適化モデルは、3角形グリッドと4辺形グリッドとした。それぞれのモデルについて、設計変数を、

1. 節点
2. パラメトリック曲面の制御点座標
3. パラメトリック曲面のパラメータ

とした場合について検証をおこなった。パラメトリック曲面に関しては、三角形グリッドで構成されるラチスシェルは三角形パッチベジエ曲面により形状記述し、四角形グリッドで構成されるラチスシェルはテンソル積ベジエ曲面により形状記述をおこない、制御点の x, y, z 座標を設計変数とすることで未知量の低減を図った。

それぞれのモデルの最適化問題では、まずはじめに、総部材長の上限值制約のもとでひずみエネルギーを最小化することで、部材長が厳密に一様化され、かつ剛性の高いラチスシェルの形態創生を試みた。しかし、部材長の平均部材長からの差の2乗和が0であるという条件は幾何学的に非常に厳しい制約であるために、設計変数の取り方や、節点の拘束条件などによって実行可能領域が狭められると、極端にライズの小さい形状が得られたり、そもそも部材長一様解が存在しない場合がある。そのような場合には、ひずみエネルギーを目的関数ではなく制約条件として扱い、部材長の平均部材長からの差の2乗和を最小化することで、指定されたひずみエネルギー制約下で可能な限り部材長の一様化されたラチスシェルの形態創生をおこなった。得られた主要な結果は以下のようにまとめられる。

- 1) 剛性の指標としてのひずみエネルギーと、施工性の指標としての部材長の偏差は、トレードオフ関係にあるので、それらの両者を考慮した多目的最適化問題を定式化できる。この問題を、以下のように制約法で解いて、パレート解を求めることができる。
- 2) 部材長の平均部材長からの差の2乗和を0に制約することで、最適解が存在する場合には、厳密にすべての部材長が均一化されたラチスシェルの形態創生が可能である。この問題に許容解が存在しないときには、部材長の平均部材長からの差の2乗和を目的関数とすることで、与えられた制約条件下において可能な限り部材長の一様化されたラチスシェル形状を得ることができる。平均部材長からの差の2乗和は微分可能なので、部材長の差を直接制約するよりは、収束性が良い。すなわち、平均部材長からの差の2乗和を目的関数あるいは制約条件関数として考慮することは、計算時間の低減のために有効である。実際には部材長の最大値と最小値の差は数 mm 程度であれば接合部の誤差の許容範囲とみなすことも可能であり、厳密な一様化が困難な場合でも、数 mm の差を許容して可能な限り部材長を一様化することは大きな意味を持つといえる。
- 3) 3方向すべての節点を可動として形状修正をおこなった場合に現れる非現実的な解を、部材長の平均部材長からの差の2乗和の値を利用することによって制御することができる。また、曲面のパラメータを設計変数とすることで、指定された形状を表現するベジエ曲面上を節点が移動するので、形状表現は限定的であるが、曲面

形状を維持したまま最適化することができる。曲面のパラメータを設計変数として意匠設計者のイメージする曲面を初期形状として最適化を行うことにより、意匠のイメージする曲面形状を維持したまま各種性能を向上させるといった目的に対して有効であると考えられる。??項に示した最適化例にあるように、体積に制約を与えてひずみエネルギーを最小化すると、3方向すべての節点が可動である場合には、節点が中心に集まり平面方向の部材長を節約し、その分サイズの極端に大きい非現実的な形状が現れてしまう。これは、3方向すべての節点が可動という実行可能領域の広い問題において避けられない問題であるが、部材長の平均部材長からの差の2乗和の値を制御することで、すべての部材は有限の長さを有することとなり、結果として節点が近接、もしくは集中するといった現象を回避することが可能である。

- 4) 三角形グリッドで構成されるラチスシェルの部材長を一様化した場合、シェル形状はシリンダー型となる。一様な部材を用いて三角形グリッドで構成可能な形状が非常に限定的である理由は、部材長を一様化するとグリッド形状がすべて正三角形になってしまうからである。しかしながら、三角形グリッドで構成されるラチスシェルの部材長一様解は、逆にその性質により部材角が必ず60度となるので、接合部種別を均一化できるというメリットもある。ゆえに、シリンダー形状の架構を考える際には三角形グリッドとすることが施工上有効であるといえる。一方、四角形グリッドで構成されるラチスシェルの部材長を一様化した場合、三角形グリッドで構成されるラチスシェルと比べて形状修正の自由度が高く、節点の移動をある程度拘束しても、部材長の一様化された形状を得ることができる。四角形は三角形と異なり、辺の長さが全て等しくても必ずしも正方形とはならず、部材角に制限はないためである。
- 5) 全部材長を一様化することが難しい場合、部材を幾何学的な性質に応じて適切にグルーピングすることで、高い剛性を有し、各グループごとに完全に部材長が一様化された形状を得ることができる。三角形グリッドで構成されたラチスシェルに対して、曲面全体として部材長を一様化することは幾何学的制約の厳しさから難しい場合でも、部材をグルーピングしてあげることで幾何学的制約がかなり緩和されることを示している。

本論文では扱わないが、本章のような部材長一様化を目的とした問題に、3章の代数不変量制約を導入することも可能と考えられる。

グルーピングは有効であるが、各構成部材の幾何学的な特性に応じて適切にグルーピングする方法の開発が望まれる。適切なグルーピングの方法は形状によって異なるので、その都度設計者が判断することになるが、適切なグルーピング方法を解析的に決定する方法の確立が今後の課題である。

以上、本章では、ラチスシェルに与える幾何学的制約として部材長一様性に着目し、部材長の平均部材長からの差の2乗和を部材長一様性の評価指標として取り入れた形状最適化問題を定式化し、その有効性を確認した。ラチスシェルの部材長が一様化されれば、施工管理が容易となり、また場合によっては部材角を制限できるため、接合部コストの低減にもつながる。また、構造部材が意匠として現れる場合には、網目の一様性は重要な意匠的要素にもなり、部材長の一様性を数値的に制御することは意匠的側面から見ても有効な手段であるといえる。

第7章

結論

本論文では、シェル構造物を対象とし、幾何学的制約を考慮した形状最適化手法を提案し、手法の有効性を検討した。

本論文の内容および成果は以下のようにまとめられる。

第1章では、近年の建築デザインの動向について述べ、建築形態と力学形態に強い相関を有するシェル構造物において、力学的性能のみならず、施工性、経済性、社会性、審美性といった優れた建築物の創造のために求められる多様な条件を満たす設計手法の開発の必要性について論じた。さらに、シェル構造物の形状決定手法に関する既往の研究について論じ、本研究が求められるようになった背景と研究の目的について述べた。

第2章では、本論文で、曲面の幾何学的特性を定量的に評価するために用いている代数不変量について概説した。微分幾何学における各種ベクトル、テンソル、ならびにそれらを用いて計算される代数不変量について、本論文で使用するテンソル積ベジエ曲面と三角形パッチベジエ曲面という2種類のパラメトリック空間上においてそれらを定義し、詳細な定式化をおこなった。さらに、感度解析に必要な各種ベクトルおよびテンソルの制御点座標に関する微分についても合わせて導出した。また、型枠作成が容易で施工性に優れた曲面である可展面と線織面について、代数不変量との関係性と交えて概説した。

第3章では、連続体シェルを対象として、ベジエ曲面により未知量を低減させた上で、力学的性能の指標としてひずみエネルギーを採用し、意匠性や建築計画などに関わる幾何学的特性の指標として第2章で概説した代数不変量を採用することにより、力学的合理性と幾何学的特性の双方を考慮したシェル形状を解析的に求める新しい形状最適化手法を提案した。これらの不変量は元来、地形学の世界において国土の標高関数から抽出されるデータをもとに山谷などの地形を把握することを目的に提案されたものであるが、これをシェル曲面の幾何学的特性を定量的に測る物差しとして利用した。加えて、球らしさを定量的に評価する新たな代数不変量の提案も行った。テンソル積ベジエ曲面で形状記述されるシェルと、三角形パッチベジエ曲面で形状記述されるシェルという異なる解析モデルを複数取り扱い、手法の有効性、汎用性を検証した。数値解析例を通じて、本手法により、力学的合理性を大きく損なうことなしに、凹凸や山谷、球らしさといった意匠性や建築計画に関わる幾何学的特性を定量的にコントロール可能であることを示した⁴⁶⁾。

第4章では、連続体シェルを対象として、ひずみエネルギーに加え、施工性に関わる幾何学的な特性としてシェル曲面の展開可能性に着目し、可展条件を導入することにより、力学的合理性と施工性の双方を考慮したシェル形状を解析的に求める新しい形状最適化手法を提案した。シェル全体を可展面とすることは幾何学的な制約の厳しさから難しいため、本研究では曲面をいくつかの区分領域に分割し、それぞれを独立に可展面とし、そのつなぎ合わせで形成されるようなシェル形状(以下、区分的可展面)を創生することでこの問題を解決した。テンソル積ベジエ曲面と、三角形パッチベジエ曲面を用いて様々なモデルを最適化し、手法の有効性、汎用性を検証した。数値解析例を通じて、本手法により、力学的合理性を大きく損なうことなしに、線織面よりもさらに施工性に優れた曲面である可展面で構成されるシェル形状が創生可能であることを示した⁴⁷⁾。さらに、本手法により解析的に得られた展開図をもとに実際

に区分的可展面の模型作製をおこなった。

第5章では、連続体シェルを対象として、型枠作成が容易であり実構造物にも多く利用されている線織面に着目し、2つのベジエ曲線のパラメータの等しい点を結んだ直線の集合で線織面を定義し、ベジエ曲線の制御点座標を設計変数としてひずみエネルギーを最小化し、高い力学的合理性を有する線織面形状を解析的に求める新しい形状最適化手法を提案した。対称性を有する整形な曲面でガウス曲率が正の曲面、負の曲面、ならびに不整形な曲面という幾何学的特徴の異なる3つの解析モデルについて手法の有効性、汎用性を検証した。得られる形状の多様性確保のため、 x, y, z 全方向に形状修正をおこなったが、その場合に起こる解析的な問題(不良要素の出現)に対して、要素の面積と辺の長さのばらつきを抑える制約を課すことによってこの問題を解決した。また、本手法により得られる解の多くは、局所最適解に収束していると考えられることも確認された。数値解析例を通じて、本手法により、力学的合理性を大きく損なうことなしに、線織面で構成されるシェル形状が創生可能であることを示した。

第6章では、ラチスシェルを対象として、ひずみエネルギーに加えて、施工性に関わる幾何学的な制約としてとしてラチスシェルを構成する部材の部材長一様性に着目し、部材長の平均部材長からの差の2乗和を評価指標とすることで、力学的合理性と施工性の双方を考慮したシェル形状を解析的に求める形状最適化手法を提案した。三角形および四角形グリッドで構成されるラチスシェルを対象とし、それぞれ、三角形パッチベジエ曲面、テンソル積ベジエ曲面で形状記述をおこなうことで未知量の数を低減した。部材長の平均部材長からの差の2乗和の部材長一様性の評価指標としての有効性を示し、数値解析例を通じて、本手法により部材長の一様化が容易におこなえることを示した。部材長を完全に一様化するという制約条件は大変厳しいものであり、解析モデルや境界条件、節点の不動条件によっては部材長一様解が存在しないことがある。そのような場合においても、部材長の平均部材長からの差の2乗和を目的関数として最小化することによって、可能な限り部材長の一様化された形状を得ることができることを示した⁴⁸⁾。部材長の平均部材長からの差の2乗和という指標は、部材長の一様性を評価するものであると同時に、 x, y, z 全方向に形状修正をおこなったときに生じる非現実的な解を抑制する働きも持っており、非常に利用価値の高いものである。三角形グリッドで構成されるラチスシェルにおいては、部材角が60度に限定されるためジョイントの均一化が図れるというメリットがある反面、形成可能な形状は極めて限定的であるが、部材を適切にグルーピングし、部材グループごとに部材長を一様化することで、制御点座標を設計変数として、高い剛性を保ったまま部材グループごとに完全に一様化できることを示した⁴⁹⁾。本手法により部材長を一様化することで、施工管理が容易になり、解析モデルによっては部材角を制限することも可能であり、施工性の向上が期待できると考えられる。

最後に、本研究で明らかとなった、問題点及び今後の展望について言及する。まず、本論文はタイトルの通り、建築構造物に求められる多様な要求を満足する設計手法の確立に向けて、特に建築形態と力学形態に強い相関を有するシェル構造物を対象として、幾何学的制約を考慮する形状最適化手法の開発に重点を置いた。そのため、力学的性能の評価指標としては、既往の研究でもよく用いられているひずみエネルギーを採用したが、その他の力学的性能評価指標の導入が考えられる。例えば、筆者は自身の卒業論文において形状初期不整による座屈耐力の低下現象を考慮することを狙い、構造安定性の評価指標としてRS座屈荷重係数を採用した²⁷⁾が、そういったひずみエネルギー以外の力学的評価指標の導入が考えられるであろう。また、本論文は非力学的側面の考察に力点を置いたため、外力は自重のみを考慮していたが、地震荷重のように、実際の荷重の導入も必要である。これらは本研究の単純な拡張であり、容易に実現可能であると考えられる。また、連続体シェルの形状最適化における、設計変数の拡張が考えられる。本論文では、ベジエ曲面の制御点座標を設計変数とした形状最適化問題として非力学的性能を考慮した最適化問題を定式化し、シェルの板厚は定数として取り扱っていたが、既往の研究⁵⁰⁾にあるように、形状に加え、板厚分布やトポロジーを同時に最適化するような問題に非力学的性能の評価指標を導入することも考えられる。近年では機械工学の分野でレベルセット法に基づく非常に強力なトポロジー最適化手法の研究が成果を挙げており⁵¹⁾、これらの技術の建築への応用、ならびに本研究の形状最適化手法への適用も待たれるところである。ラチスシェルの形状最適化問題については、本研究で取り扱った、幾何学的特性と施工性という2つの非力学的性能を同時に考慮した形状最適化問題

も考えられる。問題の複雑化を避けるため本論文では取り扱わなかったが、施工性の評価指標として部材長の一様性を取り入れた形状最適化問題において、比較的形状表現の自由度の高かった、四角形グリッドや六角形グリッドで形成されるラチスシェルに対して、代数不変量制約を部材長一様制約に加えて導入することも可能であろう。また、ラチスシェルの場合、接合部の剛性、耐力がシェル全体の体力に及ぼす影響は少くない。本研究では、接合部は剛接合と仮定して最適化をおこなっているが、ジョイントの種類や接合方法によってその回転剛性や接合部耐力は様々であり、それらの内容を最適設計問題に取り入れることも必要である。ラチスシェルについても、連続体シェルの場合と同様、断面は一定とし、形状のみを最適化の対象としていたが、形状に加え、断面やトポロジーを同時に最適化するような問題も考えられる。ただし、連続体シェルと異なり、ラチスシェルは、一般には規格化された断面リストの中から適切なものを選ぶという離散変数問題となるので、遺伝的アルゴリズムをはじめとした発見的手法の導入が必要であろう。

本論文で示した一連の研究成果は、外力は自重のみ、力学的指標はひずみエネルギーのみという力学的には基礎的な問題を扱っている。従って、実務設計レベルで本手法を適用するには、より複雑な問題設定が必要である。研究と実務設計との距離を近づけていくことが今後の課題となるであろう。

付録 A

三角形平面シェル要素のマトリクス詳細

三角形平面シェル要素による各種マトリクスの詳細を示す。面内変形要素には定ひずみ三角形要素を、面外変形要素には Zienkiewicz らの非適合三角形要素を採用する。第 A.1 節では、三角形平面シェル要素の要素剛性マトリクスを導出するとともに、三角形平面シェル要素に対する座標変換マトリクスを定式化する。第 A.2 節では、感度解析を行う際に必要となる、第 A.1 節で定式化される各種マトリクスの節点 z 座標による微分を導出する。

A.1 三角形平面シェル要素

A.1.1 面内変形要素

要素内任意点におけるシェル中央面の面内変位 $\mathbf{u}_p = (u, v)$ を、要素節点変位 $\mathbf{u}_{pi} = (u_i, v_i)$ ($i = 1, 2, 3$) を用いて次式により仮定する。

$$u = \sum_{i=1}^3 L_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^3 L_i v_i \quad (\text{A.1})$$

ここに、 L_i ($i = 1, 2, 3$) は三角形の面積座標に対応しており、次式で表される。

$$L_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2\Delta} \quad (\text{A.2})$$

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j, \quad b_i = y_j - y_k, \quad c_i = x_k - x_j, \quad \Delta = \frac{1}{2} \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (\text{A.3})$$

ただし、 (i, j, k) は $(1, 2, 3)$ の巡回置換を表し、 x_i, y_i, z_i はそれぞれ要素頂点の x, y, z 座標を表す。

シェル中央面の面内ひずみ $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$ は、次式で表される。

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (\text{A.4})$$

式 (A.1) で定義された変位を上式に代入すると、シェル中央面のひずみは、節点変位の線形関数として次式のように表現される。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p = \mathbf{B}_p \mathbf{d}_p \quad (\text{A.5})$$

ここに、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_p &= [\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \varepsilon_{xy}]^T, \quad \mathbf{d}_p = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3]^T \\ \mathbf{B}_p &= \begin{bmatrix} L_{x1} & 0 & L_{x2} & 0 & L_{x3} & 0 \\ 0 & L_{y1} & 0 & L_{y2} & 0 & L_{y3} \\ L_{y1} & L_{x1} & L_{y2} & L_{x2} & L_{y3} & L_{x3} \end{bmatrix} \\ L_{xi} &= \frac{\partial L_i}{\partial x} = \frac{b_i}{2\Delta}, \quad L_{yi} = \frac{\partial L_i}{\partial y} = \frac{c_i}{2\Delta} \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

である。

膜応力 (合応力) N_x , N_y , N_{xy} は、次式によって表される。

$$\boldsymbol{\sigma}_p = \mathbf{D}_p \boldsymbol{\varepsilon}_p \quad (\text{A.7})$$

$$\boldsymbol{\sigma}_p = [N_x \ N_y \ N_{xy}]^\top, \quad \mathbf{D}_p = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

式 (A.5), (A.7) を用いて仮想仕事の原理を適用すると、最終的に次の剛性マトリクスが得られる。

$$\mathbf{k}_p = \iint \mathbf{B}_p^\top \mathbf{D}_p \mathbf{B}_p t dx dy \quad (\text{A.9})$$

ここに t は要素の厚さである。

応力-ひずみマトリクス \mathbf{D} およびひずみ-変位マトリクス \mathbf{B} は要素内で一定であるので、要素の厚さを一定とすれば、式 (A.9) の剛性マトリクス \mathbf{k}_p は次式で表される。

$$\mathbf{k}_p = \mathbf{B}_p^\top \mathbf{D}_p \mathbf{B}_p t \Delta \quad (\text{A.10})$$

A.1.2 面外変形要素

要素内任意点におけるシェル中央面のたわみ w を次式により仮定する。

$$w = \sum_{i=1}^3 \left(N_i^{(0)} w_i + N_i^{(1)} \theta_{xi} + N_i^{(2)} \theta_{yi} \right) \quad (\text{A.11})$$

ここに、

$$\begin{aligned} N_i^{(0)} &= L_i + L_i L_j (L_i - L_j) + L_i L_k (L_i - L_k) \\ N_i^{(1)} &= b_j (L_i^2 L_k + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3) - b_k (L_i^2 L_j + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3) \\ N_i^{(2)} &= c_j (L_i^2 L_k + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3) - c_k (L_i^2 L_j + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3) \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

ただし、 (i, j, k) は $(1, 2, 3)$ の巡回置換を表す。

シェル中央面における曲率 κ_x, κ_y およびねじれ率 κ_{xy} は次式で定義される。

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (\text{A.13})$$

式 (A.11) で定義された変位を上式に代入すると、シェル中央面の曲率とねじれ率は、要素節点変位の線形関数として次式のように表現される。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = \mathbf{B}_b \mathbf{d}_b \quad (\text{A.14})$$

ここに、

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_b &= [\kappa_x \ \kappa_y \ \kappa_{xy}]^\top \\ \mathbf{d}_b &= [w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ w_3 \ \theta_{x3} \ \theta_{y3}]^\top \\ \mathbf{B}_b &= [\mathbf{B}_{b1} \ \mathbf{B}_{b2} \ \mathbf{B}_{b3}] \\ \mathbf{B}_{bi} &= \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 N_i^{(0)}}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 N_i^{(1)}}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2 N_i^{(2)}}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 N_i^{(0)}}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 N_i^{(1)}}{\partial y^2} & -\frac{\partial^2 N_i^{(2)}}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 N_i^{(0)}}{\partial x \partial y} & -2 \frac{\partial^2 N_i^{(1)}}{\partial x \partial y} & -2 \frac{\partial^2 N_i^{(2)}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

B_{bi} の各成分の $\frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial x \partial y}$ ($m = 0, 1, 2$) を具体的に書き表せば次のようになる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial x^2} &= L_{xi}^2 \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_i^2} + L_{xj}^2 \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_j^2} + L_{xk}^2 \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_k^2} + 2L_{xi}L_{xj} \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_i \partial L_j} + 2L_{xj}L_{xk} \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_j \partial L_k} + 2L_{xk}L_{xi} \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_k \partial L_i} \\
\frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial y^2} &= L_{yi}^2 \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_i^2} + L_{yj}^2 \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_j^2} + L_{yk}^2 \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_k^2} + 2L_{yi}L_{yj} \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_i \partial L_j} + 2L_{yj}L_{yk} \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_j \partial L_k} + 2L_{yk}L_{yi} \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_k \partial L_i} \\
\frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial x \partial y} &= L_{xi}L_{yj} \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_i^2} + L_{xj}L_{yj} \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_j^2} + L_{xk}L_{yk} \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_k^2} \\
&\quad + (L_{xi}L_{yj} + L_{xj}L_{yi}) \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_i \partial L_j} + (L_{xj}L_{yk} + L_{xk}L_{yj}) \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_j \partial L_k} + (L_{xk}L_{yi} + L_{xi}L_{yk}) \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_k \partial L_i}
\end{aligned} \tag{A.16}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 N_i^{(0)}}{\partial L_i^2} &= 2(L_j + L_k) & \frac{\partial^2 N_i^{(1)}}{\partial L_i^2} &= 2(b_j L_k - b_k L_j) & \frac{\partial^2 N_i^{(2)}}{\partial L_i^2} &= 2(c_j L_k - c_k L_j) \\
\frac{\partial^2 N_i^{(0)}}{\partial L_j^2} &= -2L_i & \frac{\partial^2 N_i^{(1)}}{\partial L_j^2} &= 0 & \frac{\partial^2 N_i^{(2)}}{\partial L_j^2} &= 0 \\
\frac{\partial^2 N_i^{(0)}}{\partial L_k^2} &= -2L_i & \frac{\partial^2 N_i^{(1)}}{\partial L_k^2} &= 0 & \frac{\partial^2 N_i^{(2)}}{\partial L_k^2} &= 0 \\
\frac{\partial^2 N_i^{(0)}}{\partial L_i \partial L_j} &= 2(L_i - L_j) & \frac{\partial^2 N_i^{(1)}}{\partial L_i \partial L_j} &= -2b_k L_i + \frac{1}{2}(b_j - b_k)L_k & \frac{\partial^2 N_i^{(2)}}{\partial L_i \partial L_j} &= -2c_k L_i + \frac{1}{2}(c_j - c_k)L_k \\
\frac{\partial^2 N_i^{(0)}}{\partial L_j \partial L_k} &= 0 & \frac{\partial^2 N_i^{(1)}}{\partial L_j \partial L_k} &= \frac{1}{2}(b_j - b_k)L_i & \frac{\partial^2 N_i^{(2)}}{\partial L_j \partial L_k} &= \frac{1}{2}(c_j - c_k)L_i \\
\frac{\partial^2 N_i^{(0)}}{\partial L_k \partial L_i} &= 2(L_i - L_k) & \frac{\partial^2 N_i^{(1)}}{\partial L_k \partial L_i} &= 2b_j L_i + \frac{1}{2}(b_j - b_k)L_j & \frac{\partial^2 N_i^{(2)}}{\partial L_k \partial L_i} &= 2c_j L_i + \frac{1}{2}(c_j - c_k)L_j
\end{aligned} \tag{A.17}$$

ここで, (i, j, k) は $(1, 2, 3)$ の巡回置換である。

曲げモーメント M_x, M_y およびねじりモーメント M_{xy} は, 次式によって表される。

$$\boldsymbol{\sigma}_b = \mathbf{D}_b \boldsymbol{\varepsilon}_b \tag{A.18}$$

ここに,

$$\boldsymbol{\sigma}_b = [M_x \ M_y \ M_{xy}]^\top, \quad \mathbf{D}_b = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \tag{A.19}$$

式 (A.14), (A.18) を用いて仮想仕事の原理を適用すると, 最終的に次の剛性マトリクスが得られる。

$$\mathbf{k}_b = \iint \mathbf{B}_b^\top \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b dx dy \tag{A.20}$$

3 次の Gauss 型数値積分を適用すると式 (A.20) の剛性マトリクス \mathbf{k}_b は次のようになる。

$$\mathbf{k}_b = \sum_{i=1}^7 \alpha_i \mathbf{B}_b^\top(L_{1i}, L_{2i}, L_{3i}) \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b(L_{1i}, L_{2i}, L_{3i}) \Delta \tag{A.21}$$

分点と係数は表 A.1 のとおりである。

表 A.1 3 次の Gauss 型数値積分の分点・係数

i	α_i	L_{1i}	L_{2i}	L_{3i}
1	27/60	1/3	1/3	1/3
2	8/60	1/2	1/2	0
3	8/60	0	1/2	1/2
4	8/60	1/2	0	1/2
5	3/60	1	0	0
6	3/60	0	1	0
7	3/60	0	0	1

A.1.3 三角形平面シェル要素

数値計算上の不安定性を避けるため，面内の回転変位 θ_z に対して次のような剛性を付加する。

$$k_t = 0.03Et\Delta \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \tag{A.22}$$

上述した面内変形要素，面外変形要素および面内ねじり要素の各剛性マトリクスをともに 1 節点につき $u_i, v_i, w_i, \theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}$ の 6 成分をもつ剛性マトリクスに拡張して，各変位成分に対応した剛性マトリクスの係数を重ね合わせ，18 行 18 列の要素剛性マトリクス k を作成する。

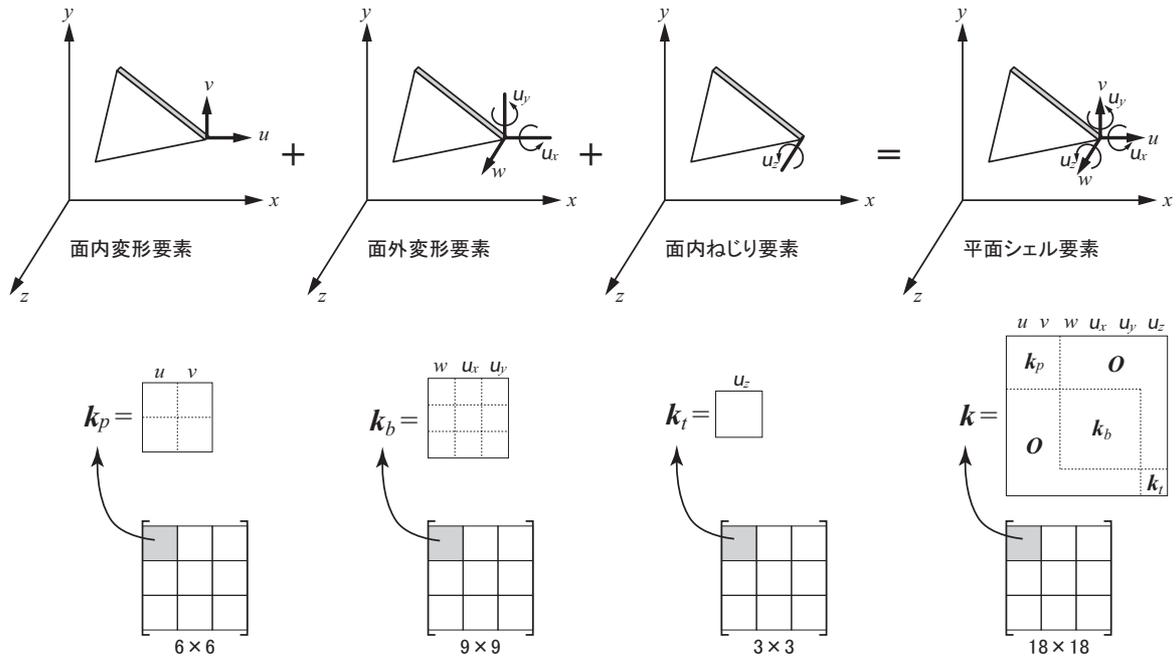


図 A.1 平面シェル要素

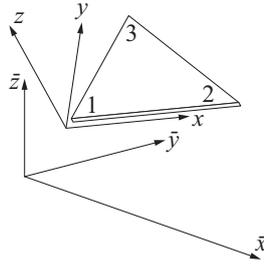


図 A.2 全体座標系と要素座標系

A.1.4 座標変換マトリクス

全体座標系における節点 i ($i = 1, 2, 3$) の節点座標ベクトルを $\bar{\mathbf{r}}_i = [\bar{x}_i \ \bar{y}_i \ \bar{z}_i]^\top$ のように表すものとする。節点 1 を要素座標系の原点にとり、節点 1→2 の方向を x 軸とする。要素面内で x 軸と垂直に y 軸を定め、 x, y 軸と右手系をなすように z 軸を定める。座標変換マトリクス \mathbf{L} をつぎのように表す。

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_{x\bar{x}} & l_{x\bar{y}} & l_{x\bar{z}} \\ l_{y\bar{x}} & l_{y\bar{y}} & l_{y\bar{z}} \\ l_{z\bar{x}} & l_{z\bar{y}} & l_{z\bar{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_x^\top \\ l_y^\top \\ l_z^\top \end{bmatrix} \quad (\text{A.23})$$

この時、たとえば全体座標系の要素剛性マトリクス $\bar{\mathbf{k}}$ と要素座標系での要素剛性マトリクス \mathbf{k} の関係は次のように表せる。

$$\bar{\mathbf{k}} = \mathbf{T}^\top \mathbf{k} \mathbf{T}, \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{L} & & & \\ & \mathbf{L} & & \\ & & \mathbf{L} & \\ & & & \mathbf{L} \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

\mathbf{L} の各成分を具体的に書き表せば、

$$\begin{aligned} l_x &= \frac{\bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{r}}_1}{\|\bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{r}}_1\|} \\ l_z &= \frac{(\bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{r}}_1) \times (\bar{\mathbf{r}}_3 - \bar{\mathbf{r}}_1)}{\|(\bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{r}}_1) \times (\bar{\mathbf{r}}_3 - \bar{\mathbf{r}}_1)\|} \\ &= \frac{(\bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{r}}_1) \times (\bar{\mathbf{r}}_3 - \bar{\mathbf{r}}_1)}{2\Delta} \\ l_y &= l_z \times l_x \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

A.1.5 要素座標系における節点座標

要素座標系における節点座標は次式により表される。

$$x_i = l_x^\top (\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_1), \quad y_i = l_y^\top (\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_1), \quad z_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{A.26})$$

A.1.6 等価節点力ベクトル (自重)

要素の単位面積あたりの重量を q とする。要素座標系における分布荷重 $\mathbf{q}(L_1, L_2, L_3) = [q_x \ q_y \ q_z]^\top$ は次式によって表される。

$$\mathbf{q} = \mathbf{L}\bar{\mathbf{q}}, \quad \bar{\mathbf{q}} = [0 \ 0 \ q]^\top \quad (\text{A.27})$$

要素中立面の任意位置における変位を $\mathbf{u}(L_1, L_2, L_3) = [u \ v \ w]^\top$ と表すと外力仕事 W は次式により表せる。

$$W = \iint \mathbf{u}^\top \mathbf{q} dx dy \quad (\text{A.28})$$

ここで、 \mathbf{u} は $\mathbf{d} = [u_1 \ v_1 \ w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ \theta_{z1} \ \cdots \ u_3 \ v_3 \ w_3 \ \theta_{x3} \ \theta_{y3} \ \theta_{z3}]$ を用いて次式のように表せる。

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{d} \quad (\text{A.29})$$

ここに、

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_1 \ \mathbf{N}_2 \ \mathbf{N}_3]$$

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} L_i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_i^{(0)} & N_i^{(1)} & N_i^{(2)} & 0 \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{A.30})$$

上式を用いると、外力仕事は次のように表される。

$$W = \iint \mathbf{u}^\top \mathbf{q} dx dy = \mathbf{d}^\top \iint \mathbf{N}^\top dx dy \mathbf{L} \bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{d}}^\top \mathbf{T}^\top \iint \mathbf{N}^\top dx dy \mathbf{L} \bar{\mathbf{q}} \quad (\text{A.31})$$

したがって、上式と外力仕事等価となる節点外力 $\bar{\mathbf{f}}$ は次式のように表すことができる。

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{T}^\top \iint \mathbf{N}^\top dx dy \mathbf{L} \bar{\mathbf{q}} \quad (\text{A.32})$$

上式の積分には、剛性マトリクスと同様に 3 次の Gauss 型数値積分を適用すると次式となる。

$$\iint \mathbf{N}^\top dx dy = \sum_{i=1}^7 \alpha_i \mathbf{N}^\top(L_{1i}, L_{2i}, L_{3i}) \Delta \quad (\text{A.33})$$

分点と係数は表 A.1 のとおりである。

A.2 各種マトリクスの微分

A.2.1 要素面積の微分

要素の法線ベクトル (単位ベクトルではない) は次のように表される。

$$\mathbf{n} = (\bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{r}}_1) \times (\bar{\mathbf{r}}_3 - \bar{\mathbf{r}}_1) \quad (\text{A.34})$$

上式で表される法線ベクトルの節点 z 座標に関する微分は次のようになる。

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \bar{z}_1} = [\bar{y}_3 - \bar{y}_2 \quad \bar{x}_2 - \bar{x}_3 \quad 0]^\top$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \bar{z}_2} = [\bar{y}_1 - \bar{y}_3 \quad \bar{x}_3 - \bar{x}_1 \quad 0]^\top$$

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \bar{z}_3} = [\bar{y}_2 - \bar{y}_1 \quad \bar{x}_1 - \bar{x}_2 \quad 0]^\top \quad (\text{A.35})$$

三角形要素の表面積は式 (A.34) で表される法線ベクトルを用いて次のようにかける。

$$\Delta = \frac{1}{2} \|\mathbf{n}\| \quad (\text{A.36})$$

上式で表される要素表面積の節点 z 座標に関する微分は次のようになる。

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \bar{z}_l} = \frac{\mathbf{n}^\top}{4\Delta} \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \bar{z}_l} \quad (\text{A.37})$$

A.2.2 座標変換マトリクスと要素座標系における節点座標の微分

式 (A.25) で表される座標変換マトリクス \mathbf{L} の節点 z 座標に関する微分は次のようになる。

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \bar{z}_l} = \begin{bmatrix} \frac{\partial l_x^\top}{\partial \bar{z}_l} \\ \frac{\partial l_y^\top}{\partial \bar{z}_l} \\ \frac{\partial l_z^\top}{\partial \bar{z}_l} \end{bmatrix} \quad (\text{A.38})$$

ただし,

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_x}{\partial \bar{z}_l} &= \frac{1}{\|\bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{r}}_1\|^3} \left\{ \begin{array}{l} (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) \\ (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) \\ -\{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2\} \end{array} \right\}, \quad \frac{\partial l_x}{\partial \bar{z}_2} = -\frac{\partial l_x}{\partial \bar{z}_1}, \quad \frac{\partial l_x}{\partial \bar{z}_3} = 0 \\ \frac{\partial l_z}{\partial \bar{z}_l} &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}_l} \left(\frac{\mathbf{n}}{2\Delta} \right) = \frac{1}{2\Delta^2} \left(\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \bar{z}_l} \Delta - \mathbf{n} \frac{\partial \Delta}{\partial \bar{z}_l} \right) \\ \frac{\partial l_y}{\partial \bar{z}_l} &= \frac{\partial l_z}{\partial \bar{z}_l} \times l_x + l_z \times \frac{\partial l_x}{\partial \bar{z}_l} \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

したがって、座標変換マトリクス \mathbf{T} の節点 z 座標に関する微分は次のようになる。

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \bar{z}_l} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \bar{z}_l} & & & & \\ & \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \bar{z}_l} & & & 0 \\ & & \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \bar{z}_l} & & \\ & & & \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \bar{z}_l} & \\ 0 & & & & \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \bar{z}_l} \\ & & & & & \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \bar{z}_l} \end{bmatrix} \quad (\text{A.40})$$

要素座標系における節点座標の節点 z 座標に関する微分は次式により与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial \bar{z}_l} &= \frac{\partial l_x^\top}{\partial \bar{z}_l} (\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_1) + l_x^\top \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_i}{\partial \bar{z}_l} - \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_1}{\partial \bar{z}_l} \right) \\ \frac{\partial y_i}{\partial \bar{z}_l} &= \frac{\partial l_y^\top}{\partial \bar{z}_l} (\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_1) + l_y^\top \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_i}{\partial \bar{z}_l} - \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_1}{\partial \bar{z}_l} \right) \\ \frac{\partial z_i}{\partial \bar{z}_l} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.41})$$

A.2.3 面内変形要素剛性マトリクスの微分

式 (A.10) で定式化される面内変形要素剛性マトリクス \mathbf{k}_p の節点 z 座標に関する微分は次式により与えられる。

$$\frac{\partial \mathbf{k}_p}{\partial \bar{z}_l} = \frac{\partial \mathbf{B}_p^\top}{\partial \bar{z}_l} \mathbf{D}_p \mathbf{B}_p t \Delta + \mathbf{B}_p^\top \mathbf{D}_p \frac{\partial \mathbf{B}_p}{\partial \bar{z}_l} t \Delta + \mathbf{B}_p^\top \mathbf{D}_p \mathbf{B}_p t \frac{\partial \Delta}{\partial \bar{z}_l} \quad (\text{A.42})$$

ただし,

$$\frac{\partial \mathbf{B}_p}{\partial \bar{z}_l} = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_{x1}}{\partial \bar{z}_l} & 0 & \frac{\partial L_{x2}}{\partial \bar{z}_l} & 0 & \frac{\partial L_{x3}}{\partial \bar{z}_l} & 0 \\ 0 & \frac{\partial L_{y1}}{\partial \bar{z}_l} & 0 & \frac{\partial L_{y2}}{\partial \bar{z}_l} & 0 & \frac{\partial L_{y3}}{\partial \bar{z}_l} \\ \frac{\partial L_{y1}}{\partial \bar{z}_l} & \frac{\partial L_{x1}}{\partial \bar{z}_l} & \frac{\partial L_{y2}}{\partial \bar{z}_l} & \frac{\partial L_{x2}}{\partial \bar{z}_l} & \frac{\partial L_{y3}}{\partial \bar{z}_l} & \frac{\partial L_{x3}}{\partial \bar{z}_l} \end{bmatrix} \quad (\text{A.43})$$

$$\frac{\partial L_{xi}}{\partial \bar{z}_l} = \frac{1}{2\Delta^2} \left(\frac{\partial b_i}{\partial \bar{z}_l} \Delta - b_i \frac{\partial \Delta}{\partial \bar{z}_l} \right), \quad \frac{\partial L_{yi}}{\partial \bar{z}_l} = \frac{1}{2\Delta^2} \left(\frac{\partial c_i}{\partial \bar{z}_l} \Delta - c_i \frac{\partial \Delta}{\partial \bar{z}_l} \right) \quad (\text{A.44})$$

$$\frac{\partial b_i}{\partial \bar{z}_l} = \frac{\partial y_j}{\partial \bar{z}_l} - \frac{\partial y_k}{\partial \bar{z}_l}, \quad \frac{\partial c_i}{\partial \bar{z}_l} = \frac{\partial x_k}{\partial \bar{z}_l} - \frac{\partial x_j}{\partial \bar{z}_l} \quad (\text{A.45})$$

(i, j, k) は $(1, 2, 3)$ の巡回置換を表す。

A.2.4 面外変形要素剛性マトリクスの微分

式 (A.21) で定式化される面外変形要素剛性マトリクス \mathbf{k}_b の節点 z 座標に関する微分は次式により与えられる。

$$\frac{\partial \mathbf{k}_b}{\partial \bar{z}_l} = \sum_{i=1}^7 \alpha_i \left(\frac{\partial \mathbf{B}_b^\top}{\partial \bar{z}_l} \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b \Delta + \mathbf{B}_b^\top \mathbf{D}_b \frac{\partial \mathbf{B}_b}{\partial \bar{z}_l} \Delta + \mathbf{B}_b^\top \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b \frac{\partial \Delta}{\partial \bar{z}_l} \right) \quad (\text{A.46})$$

ただし,

$$\frac{\partial \mathbf{B}_b}{\partial \bar{z}_l} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{B}_{b1}}{\partial \bar{z}_l} & \frac{\partial \mathbf{B}_{b2}}{\partial \bar{z}_l} & \frac{\partial \mathbf{B}_{b3}}{\partial \bar{z}_l} \end{bmatrix} \quad (\text{A.47})$$

$i = 1, 2, 3$ として

$$\frac{\partial \mathbf{B}_{bi}}{\partial \bar{z}_l} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^3 N_i^{(0)}}{\partial x^2 \partial \bar{z}_l} & -\frac{\partial^3 N_i^{(1)}}{\partial x^2 \partial \bar{z}_l} & -\frac{\partial^3 N_i^{(2)}}{\partial x^2 \partial \bar{z}_l} \\ -\frac{\partial^3 N_i^{(0)}}{\partial y^2 \partial \bar{z}_l} & -\frac{\partial^3 N_i^{(1)}}{\partial y^2 \partial \bar{z}_l} & -\frac{\partial^3 N_i^{(2)}}{\partial y^2 \partial \bar{z}_l} \\ -2\frac{\partial^3 N_i^{(0)}}{\partial x \partial y \partial \bar{z}_l} & -2\frac{\partial^3 N_i^{(1)}}{\partial x \partial y \partial \bar{z}_l} & -2\frac{\partial^3 N_i^{(2)}}{\partial x \partial y \partial \bar{z}_l} \end{bmatrix} \quad (\text{A.48})$$

$m = 0, 1, 2$ として

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 N_i^{(m)}}{\partial x^2 \partial \bar{z}_l} &= 2L_{xi} \frac{\partial L_{xi}}{\partial \bar{z}_l} \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_i^2} + L_{xi}^2 \frac{\partial^3 N_i^{(m)}}{\partial L_i^2 \partial \bar{z}_l} \\ &+ 2L_{xj} \frac{\partial L_{xj}}{\partial \bar{z}_l} \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_j^2} + L_{xj}^2 \frac{\partial^3 N_i^{(m)}}{\partial L_j^2 \partial \bar{z}_l} \\ &+ 2L_{xk} \frac{\partial L_{xk}}{\partial \bar{z}_l} \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_k^2} + L_{xk}^2 \frac{\partial^3 N_i^{(m)}}{\partial L_k^2 \partial \bar{z}_l} \\ &+ 2\frac{\partial L_{xi}}{\partial \bar{z}_l} L_{xj} \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_i \partial L_j} + 2L_{xi} \frac{\partial L_{xj}}{\partial \bar{z}_l} \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_i \partial L_j} + 2L_{xi} L_{xj} \frac{\partial^3 N_i^{(m)}}{\partial L_i \partial L_j \partial \bar{z}_l} \\ &+ 2\frac{\partial L_{xj}}{\partial \bar{z}_l} L_{xk} \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_j \partial L_k} + 2L_{xj} \frac{\partial L_{xk}}{\partial \bar{z}_l} \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_j \partial L_k} + 2L_{xj} L_{xk} \frac{\partial^3 N_i^{(m)}}{\partial L_j \partial L_k \partial \bar{z}_l} \\ &+ 2\frac{\partial L_{xk}}{\partial \bar{z}_l} L_{xi} \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_k \partial L_i} + 2L_{xk} \frac{\partial L_{xi}}{\partial \bar{z}_l} \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_k \partial L_i} + 2L_{xk} L_{xi} \frac{\partial^3 N_i^{(m)}}{\partial L_k \partial L_i \partial \bar{z}_l} \end{aligned} \quad (\text{A.49})$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 N_i^{(m)}}{\partial y^2 \partial \bar{z}_l} &= 2L_{yi} \frac{\partial L_{yi}}{\partial \bar{z}_l} \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_i^2} + L_{yi}^2 \frac{\partial^3 N_i^{(m)}}{\partial L_i^2 \partial \bar{z}_l} \\
&+ 2L_{yj} \frac{\partial L_{yj}}{\partial \bar{z}_l} \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_j^2} + L_{yj}^2 \frac{\partial^3 N_i^{(m)}}{\partial L_j^2 \partial \bar{z}_l} \\
&+ 2L_{yk} \frac{\partial L_{yk}}{\partial \bar{z}_l} \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_k^2} + L_{yk}^2 \frac{\partial^3 N_i^{(m)}}{\partial L_k^2 \partial \bar{z}_l} \\
&+ 2 \frac{\partial L_{yi}}{\partial \bar{z}_l} L_{yj} \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_i \partial L_j} + 2L_{yi} \frac{\partial L_{yj}}{\partial \bar{z}_l} \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_i \partial L_j} + 2L_{yi} L_{yj} \frac{\partial^3 N_i^{(m)}}{\partial L_i \partial L_j \partial \bar{z}_l} \\
&+ 2 \frac{\partial L_{yj}}{\partial \bar{z}_l} L_{yk} \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_j \partial L_k} + 2L_{yj} \frac{\partial L_{yk}}{\partial \bar{z}_l} \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_j \partial L_k} + 2L_{yj} L_{yk} \frac{\partial^3 N_i^{(m)}}{\partial L_j \partial L_k \partial \bar{z}_l} \\
&+ 2 \frac{\partial L_{yk}}{\partial \bar{z}_l} L_{yi} \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_k \partial L_i} + 2L_{yk} \frac{\partial L_{yi}}{\partial \bar{z}_l} \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_k \partial L_i} + 2L_{yk} L_{yi} \frac{\partial^3 N_i^{(m)}}{\partial L_k \partial L_i \partial \bar{z}_l}
\end{aligned} \tag{A.50}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 N_i^{(m)}}{\partial x \partial y \partial \bar{z}_l} &= \frac{\partial L_{xi}}{\partial \bar{z}_l} L_{yi} \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_i^2} + L_{xi} \frac{\partial L_{yi}}{\partial \bar{z}_l} \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_i^2} + L_{xi} L_{yi} \frac{\partial^3 N_i^{(m)}}{\partial L_i^2 \partial \bar{z}_l} \\
&+ \frac{\partial L_{xj}}{\partial \bar{z}_l} L_{yj} \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_j^2} + L_{xj} \frac{\partial L_{yj}}{\partial \bar{z}_l} \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_j^2} + L_{xj} L_{yj} \frac{\partial^3 N_i^{(m)}}{\partial L_j^2 \partial \bar{z}_l} \\
&+ \frac{\partial L_{xk}}{\partial \bar{z}_l} L_{yk} \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_k^2} + L_{xk} \frac{\partial L_{yk}}{\partial \bar{z}_l} \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_k^2} + L_{xk} L_{yk} \frac{\partial^3 N_i^{(m)}}{\partial L_k^2 \partial \bar{z}_l} \\
&+ \left(\frac{\partial L_{xi}}{\partial \bar{z}_l} L_{yj} + \frac{\partial L_{xj}}{\partial \bar{z}_l} L_{yi} \right) \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_i \partial L_j} + \left(L_{xi} \frac{\partial L_{yj}}{\partial \bar{z}_l} + L_{xj} \frac{\partial L_{yi}}{\partial \bar{z}_l} \right) \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_i \partial L_j} + (L_{xi} L_{yj} + L_{xj} L_{yi}) \frac{\partial^3 N_i^{(m)}}{\partial L_i \partial L_j \partial \bar{z}_l} \\
&+ \left(\frac{\partial L_{xj}}{\partial \bar{z}_l} L_{yk} + \frac{\partial L_{xk}}{\partial \bar{z}_l} L_{yj} \right) \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_j \partial L_k} + \left(L_{xj} \frac{\partial L_{yk}}{\partial \bar{z}_l} + L_{xk} \frac{\partial L_{yj}}{\partial \bar{z}_l} \right) \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_j \partial L_k} + (L_{xj} L_{yk} + L_{xk} L_{yj}) \frac{\partial^3 N_i^{(m)}}{\partial L_j \partial L_k \partial \bar{z}_l} \\
&+ \left(\frac{\partial L_{xk}}{\partial \bar{z}_l} L_{yi} + \frac{\partial L_{xi}}{\partial \bar{z}_l} L_{yk} \right) \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_k \partial L_i} + \left(L_{xk} \frac{\partial L_{yi}}{\partial \bar{z}_l} + L_{xi} \frac{\partial L_{yk}}{\partial \bar{z}_l} \right) \frac{\partial^2 N_i^{(m)}}{\partial L_k \partial L_i} + (L_{xk} L_{yi} + L_{xi} L_{yk}) \frac{\partial^3 N_i^{(m)}}{\partial L_k \partial L_i \partial \bar{z}_l}
\end{aligned} \tag{A.51}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 N_i^{(0)}}{\partial L_i^2 \partial \bar{z}_l} &= 0 & \frac{\partial^3 N_i^{(1)}}{\partial L_i^2 \partial \bar{z}_l} &= 2 \left(\frac{\partial b_j}{\partial \bar{z}_l} L_k - \frac{\partial b_k}{\partial \bar{z}_l} L_j \right) & \frac{\partial^2 N_i^{(2)}}{\partial L_i^2} &= 2 \left(\frac{\partial c_j}{\partial \bar{z}_l} L_k - \frac{\partial c_k}{\partial \bar{z}_l} L_j \right) \\
\frac{\partial^3 N_i^{(0)}}{\partial L_j^2 \partial \bar{z}_l} &= 0 & \frac{\partial^3 N_i^{(1)}}{\partial L_j^2 \partial \bar{z}_l} &= 0 & \frac{\partial^2 N_i^{(2)}}{\partial L_j^2} &= 0 \\
\frac{\partial^3 N_i^{(0)}}{\partial L_k^2 \partial \bar{z}_l} &= 0 & \frac{\partial^3 N_i^{(1)}}{\partial L_k^2 \partial \bar{z}_l} &= 0 & \frac{\partial^2 N_i^{(2)}}{\partial L_k^2} &= 0 \\
\frac{\partial^3 N_i^{(0)}}{\partial L_i \partial L_j \partial \bar{z}_l} &= 0 & \frac{\partial^3 N_i^{(1)}}{\partial L_i \partial L_j \partial \bar{z}_l} &= -2 \frac{\partial b_k}{\partial \bar{z}_l} L_i + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b_j}{\partial \bar{z}_l} - \frac{\partial b_k}{\partial \bar{z}_l} \right) L_k & \frac{\partial^2 N_i^{(2)}}{\partial L_i \partial L_j} &= -2 \frac{\partial c_k}{\partial \bar{z}_l} L_i + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial c_j}{\partial \bar{z}_l} - \frac{\partial c_k}{\partial \bar{z}_l} \right) L_k \\
\frac{\partial^3 N_i^{(0)}}{\partial L_j \partial L_k \partial \bar{z}_l} &= 0 & \frac{\partial^3 N_i^{(1)}}{\partial L_j \partial L_k \partial \bar{z}_l} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b_j}{\partial \bar{z}_l} - \frac{\partial b_k}{\partial \bar{z}_l} \right) L_i & \frac{\partial^2 N_i^{(2)}}{\partial L_j \partial L_k} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial c_j}{\partial \bar{z}_l} - \frac{\partial c_k}{\partial \bar{z}_l} \right) L_i \\
\frac{\partial^3 N_i^{(0)}}{\partial L_k \partial L_i \partial \bar{z}_l} &= 0 & \frac{\partial^3 N_i^{(1)}}{\partial L_k \partial L_i \partial \bar{z}_l} &= 2 \frac{\partial b_j}{\partial \bar{z}_l} L_i + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial b_j}{\partial \bar{z}_l} - \frac{\partial b_k}{\partial \bar{z}_l} \right) L_j & \frac{\partial^2 N_i^{(2)}}{\partial L_k \partial L_i} &= 2 \frac{\partial c_j}{\partial \bar{z}_l} L_i + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial c_j}{\partial \bar{z}_l} - \frac{\partial c_k}{\partial \bar{z}_l} \right) L_j
\end{aligned} \tag{A.52}$$

A.2.5 三角形シェル要素剛性マトリクスの微分

式 (A.22) で定式化される面内ねじり要素剛性マトリクスの \mathbf{k}_t の節点 z 座標に関する微分は次式により与えられる。

$$\frac{\partial \mathbf{k}_t}{\partial \bar{z}_l} = 0.03Et \frac{\partial \Delta}{\partial \bar{z}_l} \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.53})$$

第 A.1.3 節同様、上述した面内変形要素、面外変形要素および面内ねじり要素の各剛性マトリクスの節点 z 座標に関する微分を重ね合わせ、18 行 18 列の要素剛性マトリクスの節点 z 座標に関する微分 $\partial \mathbf{k} / \partial \bar{z}_l$ を作成する。全体座標系で表される剛性マトリクスの微分 $\partial \bar{\mathbf{k}} / \partial \bar{z}_l$ は次式で表される。

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{k}}}{\partial \bar{z}_l} = \frac{\partial \mathbf{T}^\top}{\partial \bar{z}_l} \mathbf{k} \mathbf{T} + \mathbf{T}^\top \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \bar{z}_l} \mathbf{T} + \mathbf{T}^\top \mathbf{k} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \bar{z}_l} \quad (\text{A.54})$$

A.2.6 等価節点力ベクトルの微分

式 (A.32) で定式化された等価節点力ベクトル $\bar{\mathbf{f}}$ の節点 z 座標に関する微分は次式となる。

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{f}}}{\partial \bar{z}_l} = \frac{\partial \mathbf{T}^\top}{\partial \bar{z}_l} \iint \mathbf{N}^\top dx dy \mathbf{L} \bar{\mathbf{q}} + \mathbf{T}^\top \frac{\partial}{\partial \bar{z}_l} \left(\iint \mathbf{N}^\top dx dy \right) \mathbf{L} \bar{\mathbf{q}} + \mathbf{T}^\top \iint \mathbf{N}^\top dx dy \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \bar{z}_l} \bar{\mathbf{q}} \quad (\text{A.55})$$

また、形状関数の積分の微分は次式で与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_l} \left(\iint \mathbf{N}^\top dx dy \right) = \sum_{i=1}^7 \alpha_i \frac{\partial \mathbf{N}^\top}{\partial \bar{z}_l} \Delta + \sum_{i=1}^7 \alpha_i \mathbf{N}^\top \frac{\partial \Delta}{\partial \bar{z}_l} \quad (\text{A.56})$$

形状関数の微分は次式により表される。

$$\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \bar{z}_l} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \bar{z}_l} & \frac{\partial N_2}{\partial \bar{z}_l} & \frac{\partial N_3}{\partial \bar{z}_l} \end{bmatrix} \quad (\text{A.57})$$

ここに、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{N}_i}{\partial \bar{z}_l} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial L_i}{\partial \bar{z}_l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial L_i}{\partial \bar{z}_l} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i^{(0)}}{\partial \bar{z}_l} & \frac{\partial N_i^{(1)}}{\partial \bar{z}_l} & \frac{\partial N_i^{(2)}}{\partial \bar{z}_l} & 0 \end{bmatrix} \\ \frac{\partial L_i}{\partial \bar{z}_l} &= 0 \\ \frac{\partial N_i^{(0)}}{\partial \bar{z}_l} &= 0 \\ \frac{\partial N_i^{(1)}}{\partial \bar{z}_l} &= \frac{\partial b_j}{\partial \bar{z}_l} (L_i^2 L_k + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3) - \frac{\partial b_k}{\partial \bar{z}_l} (L_i^2 L_j + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3) \\ \frac{\partial N_i^{(2)}}{\partial \bar{z}_l} &= \frac{\partial c_j}{\partial \bar{z}_l} (L_i^2 L_k + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3) - \frac{\partial c_k}{\partial \bar{z}_l} (L_i^2 L_j + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3) \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

(i, j, k) は $(1, 2, 3)$ の巡回置換を表す。

B.1.2 要素両端の断面力

要素両端の断面力 f は変位 d と行列 G を用いて次式で計算される。

$$f = Gd^T \quad (\text{B.4})$$

ここに、

$$f = [P \quad Q_y \quad Q_z \quad M_x \quad M_{y1} \quad M_{y2} \quad M_{z1} \quad M_{z2}]^T \quad (\text{B.5})$$

$$G = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & \frac{12EI_z}{l^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{l^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GK}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GK}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{4EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & \frac{2EI_y}{l} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{l^2} & 0 & -\frac{2EI_y}{l} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{l^2} & 0 & -\frac{4EI_y}{l} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{l} & 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{l} \\ 0 & -\frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{2EI_z}{l} & 0 & \frac{6EI_z}{l^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{4EI_z}{l} \end{bmatrix} \quad (\text{B.6})$$

B.1.3 座標変換マトリクス

全体座標系における節点 i ($i = 1, 2$) の節点座標ベクトルを $\bar{r}_i = [\bar{x}_i \ \bar{y}_i \ \bar{z}_i]^T$ のように表すものとする。節点 1 を要素座標系の原点にとり、節点 1 から要素の材軸方向 (節点 1→2 の方向) を x 軸とする。 y, z 軸の方向については後述する。座標変換マトリクス L を次のように表す。

$$L = \begin{bmatrix} l_x & m_x & n_x \\ l_y & m_y & n_y \\ l_z & m_z & n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_x^T \\ e_y^T \\ e_z^T \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

この時、たとえば全体座標系の要素剛性マトリクス \bar{k} と要素座標系での要素剛性マトリクス k の関係は次のように表せる。

$$\bar{k} = T^T k T, \quad T = \begin{bmatrix} L & & & \\ & L & & \\ & & L & \\ & & & L \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

ここで、 L の各成分は局所座標系の全体座標系への方向余弦であり、次のように定義される。

■ x 軸方向の方向余弦 要素の材軸方向である x 軸方向の方向余弦は次式であらわされる。

$$l_x = (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)/l, \quad m_x = (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)/l, \quad n_x = (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)/l \\ \text{ただし, } l = \|\bar{r}_2 - \bar{r}_1\| \quad (\text{B.9})$$

■ **y, z 軸方向の方向余弦** y, z 軸方向は，コードアングル (断面の回転角) を定義することによって与える。以下その方法について示す。

- (a) **部材 x 軸が全体 z 軸と平行でない場合** 部材の x 軸に垂直な平面 P を考え，その平面 P 上で， $\bar{x}\bar{y}$ 平面に平行な y' 軸を考え，つぎに，部材 x 軸および y' 軸と右手の関係をなす z' 軸を考える。ここに， y' 軸の正方向は， z' 軸の正方向が全体 z 座標値が増大する方向を向くように定める。そして，平面 P 上で， y' 軸から部材 y 軸へ測った角をコードアングル θ とする。ただし，この角度は，部材 x 軸まわりに右ねじ方向を正のコードアングルとする。

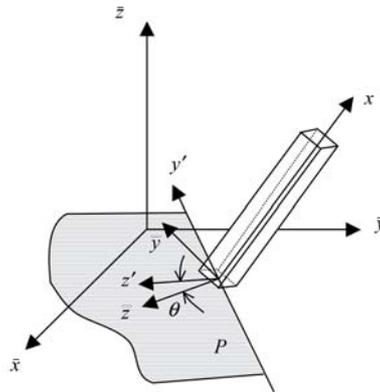


図 B.1 部材 x 軸が全体 z 軸と平行でない場合のコードアングル θ

- (b) **部材 x 軸が全体 z 軸と平行な場合** 全体 \bar{y} 軸から部材 z 軸へ測った角をコードアングル θ とする。ただし，部材 x 軸まわりに右ねじの方向を正のコードアングルとする。

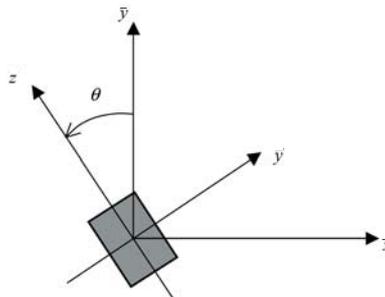


図 B.2 部材 x 軸が全体 z 軸と平行な場合のコードアングル θ

なお，一般的な建築構造物の場合，特別な場合を除いて，部材 y 軸は全体 $\bar{x}\bar{y}$ 平面と平行であるので，コードアングルはほとんどの場合 0 となる。

以上の (a),(b) の場合についての方向余弦の計算法を示す。まず，(a) の場合は， y' 軸は部材 x 軸に直交し，また $\bar{x}\bar{y}$ 平面に平行であるから全体 z 軸に対しても直交する。したがって，部材 x 軸方向の単位ベクトルを e_x ，全体 z 軸方向の単位ベクトルを e_z とすると， y' 軸方向の単位ベクトル $e_{y'}$ は， $e_x \times e_z$ に比例する。すなわち，

$$e_z = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}, \quad e_x = \begin{Bmatrix} l_x \\ m_x \\ n_x \end{Bmatrix}, \quad e_{y'} = \begin{Bmatrix} l_{y'} \\ m_{y'} \\ n_{y'} \end{Bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

とすると,

$$l_{y'} = \frac{\mp m_x}{\sqrt{l_x^2 + m_x^2}}, \quad m_{y'} = \frac{\pm l_x}{\sqrt{l_x^2 + m_x^2}}, \quad n_{y'} = 0 \quad (\text{復号同順}) \quad (\text{B.11})$$

複合のいずれをとるかは z' 軸によって決まる。

z' 軸方向の単位ベクトル $\mathbf{e}_{z'}$ は, \mathbf{e}_x および $\mathbf{e}_{y'}$ と右手系の関係をなすことから,

$$\mathbf{e}_{z'} = \begin{Bmatrix} l_{z'} \\ m_{z'} \\ n_{z'} \end{Bmatrix} = \mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_{y'} \quad (\text{B.12})$$

であるから, これを計算すると次式となる。

$$l_{z'} = m_z n_{y'}, \quad m_{z'} = n_z l_{y'} - l_x n_{y'}, \quad n_{z'} = l_x m_{y'} - m_x l_{y'} \quad (\text{B.13})$$

ここで, z' 軸の正の方向は, 全体 \bar{z} 座標値が増大する方向に正にとるので,

$$\cos(\mathbf{e}_{z'}, \mathbf{e}_z) = n_{z'} > 0 \quad (\text{B.14})$$

となる必要がある。 $n_{z'}$ を式 (B.11) と式 (B.13) を用いて計算すると,

$$n_{z'} = \pm \sqrt{l_x^2 + m_x^2} \quad (\text{B.15})$$

となるので, $n_{z'} > 0$ となるためには, 複号の前者の方を採用しなければならない。

以上より, y', z' の方向余弦は次のようになる。

$$\begin{aligned} l_{y'} &= \frac{-m_x}{\sqrt{l_x^2 + m_x^2}}, & m_{y'} &= \frac{l_x}{\sqrt{l_x^2 + m_x^2}}, & n_{y'} &= 0 \\ l_{z'} &= \frac{-n_x l_x}{\sqrt{l_x^2 + m_x^2}}, & m_{z'} &= \frac{-m_x n_x}{\sqrt{l_x^2 + m_x^2}}, & n_{z'} &= \sqrt{l_x^2 + m_x^2} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

部材 y 軸方向の単位ベクトル \mathbf{e}_y , 部材 z 軸方向の単位ベクトル \mathbf{e}_z と $\mathbf{e}_{y'}, \mathbf{e}_{z'}$ との関係は, コードアングル θ を用いて,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_y &= \mathbf{e}_{y'} \cos \theta + \mathbf{e}_{z'} \sin \theta \\ \mathbf{e}_z &= -\mathbf{e}_{y'} \sin \theta + \mathbf{e}_{z'} \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

と表わされる。したがって,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_y &= \begin{Bmatrix} l_y \\ m_y \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} l_{y'} \\ m_{y'} \\ n_{y'} \end{Bmatrix} \cos \theta + \begin{Bmatrix} l_{z'} \\ m_{z'} \\ n_{z'} \end{Bmatrix} \sin \theta \\ \mathbf{e}_z &= \begin{Bmatrix} l_z \\ m_z \\ n_z \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} l_{y'} \\ m_{y'} \\ n_{y'} \end{Bmatrix} \sin \theta + \begin{Bmatrix} l_{z'} \\ m_{z'} \\ n_{z'} \end{Bmatrix} \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

一方, (b) の場合は, z' 軸を全体 \bar{y} 軸と一致させることになるから, 部材 y' 軸は,

$$\mathbf{e}_{y'} = \begin{Bmatrix} l_{y'} \\ m_{y'} \\ n_{y'} \end{Bmatrix} = \mathbf{e}_{z'} \times \mathbf{e}_x = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} l_x \\ m_x \\ n_x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{B.19})$$

上式を式 (B.18) に代入すると,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_y &= \begin{Bmatrix} l_y \\ m_y \\ n_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \cos \theta + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \sin \theta \\ \mathbf{e}_z &= \begin{Bmatrix} l_z \\ m_z \\ n_z \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} n_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \sin \theta + \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

B.1.4 要素座標系における節点座標

要素座標系における節点座標は次式により表される。

$$x_i = \mathbf{e}_x^\top (\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_1), \quad y_i = \mathbf{e}_y^\top (\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_1), \quad z_i = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (\text{B.21})$$

B.1.5 等価節点力ベクトル (自重)

要素の単位長さあたりの重量を q とする。要素座標系における分布荷重 $\mathbf{q} = [q_x \ q_y \ q_z]^\top$ は次式によって表される。

$$\mathbf{q} = \mathbf{L}\bar{\mathbf{q}}, \quad \bar{\mathbf{q}} = [0 \ 0 \ q]^\top \quad (\text{B.22})$$

要素断面の図心軸上の任意点における変位を $\mathbf{u} = [u^c \ v^c \ w^c]^\top$ と表すと外力仕事 W は次式により表せる。

$$W = \int \mathbf{u}^\top \mathbf{q} dx \quad (\text{B.23})$$

ここで \mathbf{u} は式 (??) より次のように表せる。

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d} \quad (\text{B.24})$$

ここに,

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & l\left\{\left(\frac{x}{l}\right) - 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right\} \\ 0 & 0 & 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 & 0 & -l\left\{\left(\frac{x}{l}\right) - 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right\} & 0 & 0 \\ \frac{x}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & l\left\{-\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right\} \\ 0 & 0 & 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 & 0 & -l\left\{-\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right\} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.25})$$

上式を用いると、外力仕事は次のように表される。

$$W = \int \mathbf{u}^\top \mathbf{q} dx = \mathbf{d}^\top \int \mathbf{N}^\top dx \mathbf{L}\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{d}}^\top \mathbf{T}^\top \int \mathbf{N}^\top dx \mathbf{L}\bar{\mathbf{q}} \quad (\text{B.26})$$

したがって、上式と外力仕事が等価となる節点外力 $\bar{\mathbf{f}}$ は次式のように表すことができる。

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{T}^\top \int \mathbf{N}^\top dx \mathbf{L}\bar{\mathbf{q}} \quad (\text{B.27})$$

ここで、上式の積分は次のように陽に計算できる。

$$\int \mathbf{N}^\top dx = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}l & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{12}l^2 & 0 & \frac{1}{2}l & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{12}l^2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}l & 0 & -\frac{1}{12}l^2 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}l & 0 & \frac{1}{12}l^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.28})$$

これより, \bar{f} ば次のようになる。

$$\bar{f} = \mathbf{T}^\top \mathbf{f} \quad (\text{B.29})$$

ここに,

$$\mathbf{f} = q \left\{ \frac{1}{2}ln_x \quad \frac{1}{2}ln_y \quad \frac{1}{2}ln_z \quad 0 \quad -\frac{1}{12}l^2n_z \quad \frac{1}{12}l^2n_y \quad \frac{1}{2}ln_x \quad \frac{1}{2}ln_y \quad \frac{1}{2}ln_z \quad 0 \quad \frac{1}{12}l^2n_z \quad -\frac{1}{12}l^2n_y \right\}^\top \quad (\text{B.30})$$

B.2 三次元梁要素の各種マトリクスの節点 z 座標に関する微分

B.2.1 要素長さの微分

梁要素の要素長さの節点 z 座標に関する微分は次式で表される。

$$\frac{\partial l}{\partial \bar{z}_l} = \begin{cases} \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}{l} & (l = 1) \\ -\frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}{l} & (l = 2) \end{cases} \quad (\text{B.31})$$

B.2.2 座標変換マトリクスの微分

本論文で扱うモデルはコードアングルはすべて 0 であるので, 定式化の簡単のため, $\theta = 0$ とする。式 (B.7) で示される座標変換マトリクスの \mathbf{L} の節点 z 座標に関する微分は次のようになる。

$$\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \bar{z}_l} = \begin{bmatrix} \frac{\partial l_x}{\partial \bar{z}_l} & \frac{\partial m_x}{\partial \bar{z}_l} & \frac{\partial n_x}{\partial \bar{z}_l} \\ \frac{\partial l_y}{\partial \bar{z}_l} & \frac{\partial m_y}{\partial \bar{z}_l} & \frac{\partial n_y}{\partial \bar{z}_l} \\ \frac{\partial l_z}{\partial \bar{z}_l} & \frac{\partial m_z}{\partial \bar{z}_l} & \frac{\partial n_z}{\partial \bar{z}_l} \end{bmatrix} \quad (\text{B.32})$$

ただし, l は 1 もしくは 2 である。

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_x}{\partial \bar{z}_1} &= \frac{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{\sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2}^3} = \frac{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{l^3} \\ \frac{\partial l_x}{\partial \bar{z}_2} &= \frac{-(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{\sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2}^3} = \frac{-(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{l^3} \\ \frac{\partial m_x}{\partial \bar{z}_1} &= \frac{(\bar{y}_2 - \bar{y}_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{\sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2}^3} = \frac{(\bar{y}_2 - \bar{y}_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{l^3} \\ \frac{\partial m_x}{\partial \bar{z}_2} &= \frac{-(\bar{y}_2 - \bar{y}_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{\sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2}^3} = \frac{-(\bar{y}_2 - \bar{y}_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{l^3} \\ \frac{\partial n_x}{\partial \bar{z}_1} &= \frac{-\sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2} + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2}{\sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2}^3} = \frac{-l^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2}{l^3} \\ \frac{\partial n_x}{\partial \bar{z}_2} &= \frac{\sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2} - (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2}{\sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2}^3} = \frac{l^2 - (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2}{l^3} \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

(a) のとき,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l_y}{\partial \bar{z}_1} &= \frac{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)\{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2\} - (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)}{\sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2} \sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2}^3} \\
&= \frac{l^2(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) - (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)}{l^3 \sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2}} \\
\frac{\partial l_y}{\partial \bar{z}_2} &= \frac{-(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)\{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2\} + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)}{\sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2} \sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2}^3} \\
&= \frac{-l^2(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)}{l^3 \sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2}} \\
\frac{\partial m_y}{\partial \bar{z}_1} &= \frac{(\bar{y}_2 - \bar{y}_1)\{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2\} - (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2(\bar{y}_2 - \bar{y}_1)}{\sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2} \sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2}^3} \\
&= \frac{l^2(\bar{y}_2 - \bar{y}_1) - (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2(\bar{y}_2 - \bar{y}_1)}{l^3 \sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2}} \\
\frac{\partial m_y}{\partial \bar{z}_2} &= \frac{-(\bar{y}_2 - \bar{y}_1)\{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2\} + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2(\bar{y}_2 - \bar{y}_1)}{\sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2} \sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2}^3} \\
&= \frac{-l^2(\bar{y}_2 - \bar{y}_1) + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2(\bar{y}_2 - \bar{y}_1)}{l^3 \sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2}} \\
\frac{\partial n_y}{\partial \bar{z}_1} &= \frac{\partial n_y}{\partial \bar{z}_2} = \frac{\partial l_z}{\partial \bar{z}_1} = \frac{\partial l_z}{\partial \bar{z}_2} = \frac{\partial m_z}{\partial \bar{z}_1} = \frac{\partial m_z}{\partial \bar{z}_2} = \frac{\partial n_z}{\partial \bar{z}_1} = \frac{\partial n_z}{\partial \bar{z}_2} = 0
\end{aligned} \tag{B.34}$$

一方, (b) のとき,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial l_y}{\partial \bar{z}_1} &= \frac{\partial l_y}{\partial \bar{z}_2} = \frac{\partial m_y}{\partial \bar{z}_1} = \frac{\partial m_y}{\partial \bar{z}_2} = \frac{\partial n_y}{\partial \bar{z}_1} = \frac{\partial n_y}{\partial \bar{z}_2} = 0 \\
\frac{\partial l_z}{\partial \bar{z}_1} &= \frac{-\sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2} + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2}{\sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2}^3} = \frac{-l + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2}{l^3} \\
\frac{\partial l_z}{\partial \bar{z}_2} &= \frac{\sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2} - (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2}{\sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2}^3} = \frac{l - (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2}{l^3} \\
\frac{\partial m_z}{\partial \bar{z}_1} &= \frac{\partial m_z}{\partial \bar{z}_2} = \frac{\partial n_z}{\partial \bar{z}_1} = \frac{\partial n_z}{\partial \bar{z}_2} = 0
\end{aligned} \tag{B.35}$$

したがって座標変換マトリックス T_g の節点 z 座標に関する微分は次のようになる。

$$\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \bar{z}_l} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \bar{z}_l} & & & \\ & \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \bar{z}_l} & & O \\ & & \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \bar{z}_l} & \\ & O & & \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \bar{z}_l} \end{bmatrix} \tag{B.36}$$

B.2.3 要素座標系における剛性マトリクスの微分

要素剛性マトリクスの微分に際しては、式 (B.2) の成分のうち、式 (B.3) に示した k_{11} , k_{22} , k_{33} , k_{44} , k_{53} , k_{55} , k_{62} , k_{66} の合計 8 成分の微分が得られれば良い。それぞれの微分は次式で計算される。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial k_{11}}{\partial \bar{z}_1} &= \frac{EA(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{\sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2}^3} = \frac{EA(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{l^3} \\
\frac{\partial k_{11}}{\partial \bar{z}_2} &= \frac{-EA(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{\sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2}^3} = \frac{-EA(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{l^3} \\
\frac{\partial k_{22}}{\partial \bar{z}_1} &= \frac{36EI_z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{\sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2}^5} = \frac{36EI_z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{l^5} \\
\frac{\partial k_{22}}{\partial \bar{z}_2} &= \frac{-36EI_z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{\sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2}^5} = \frac{-36EI_z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{l^5} \\
\frac{\partial k_{33}}{\partial \bar{z}_1} &= \frac{36EI_y(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{\sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2}^5} = \frac{36EI_y(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{l^5} \\
\frac{\partial k_{33}}{\partial \bar{z}_2} &= \frac{-36EI_y(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{\sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2}^5} = \frac{-36EI_y(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{l^5} \\
\frac{\partial k_{44}}{\partial \bar{z}_1} &= \frac{GK(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{\sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2}^3} = \frac{GK(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{l^3} \\
\frac{\partial k_{44}}{\partial \bar{z}_2} &= \frac{-GK(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{\sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2}^3} = \frac{-GK(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{l^3} \\
\frac{\partial k_{53}}{\partial \bar{z}_1} &= \frac{-12EI_y(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{\{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2\}^2} = \frac{-12EI_y(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{l^4} \\
\frac{\partial k_{53}}{\partial \bar{z}_2} &= \frac{12EI_y(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{\{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2\}^2} = \frac{12EI_y(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{l^4} \\
\frac{\partial k_{55}}{\partial \bar{z}_1} &= \frac{4EI_y(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{\sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2}^3} = \frac{4EI_y(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{l^3} \\
\frac{\partial k_{55}}{\partial \bar{z}_2} &= \frac{-4EI_y(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{\sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2}^3} = \frac{-4EI_y(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{l^3} \\
\frac{\partial k_{62}}{\partial \bar{z}_1} &= \frac{12EI_z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{\{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2\}^2} = \frac{12EI_z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{l^4} \\
\frac{\partial k_{62}}{\partial \bar{z}_2} &= \frac{-12EI_z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{\{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2\}^2} = \frac{-12EI_z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{l^4} \\
\frac{\partial k_{66}}{\partial \bar{z}_1} &= \frac{4EI_z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{\sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2}^3} = \frac{4EI_z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{l^3} \\
\frac{\partial k_{66}}{\partial \bar{z}_2} &= \frac{-4EI_z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{\sqrt{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2}^3} = \frac{-4EI_z(\bar{z}_2 - \bar{z}_1)}{l^3}
\end{aligned} \tag{B.37}$$

ここで、要素座標系における等価節点力ベクトル \mathbf{f} の微分は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \bar{z}_l} = q \left\{ \begin{array}{cccc} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial l}{\partial \bar{z}_l} n_x + l \frac{\partial n_x}{\partial \bar{z}_l} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial l}{\partial \bar{z}_l} n_y + l \frac{\partial n_y}{\partial \bar{z}_l} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial l}{\partial \bar{z}_l} n_z + l \frac{\partial n_z}{\partial \bar{z}_l} \right) & 0 \\ -\frac{1}{12} \left(2l \frac{\partial l}{\partial \bar{z}_l} n_z + l^2 \frac{\partial n_z}{\partial \bar{z}_l} \right) & \frac{1}{12} \left(2l \frac{\partial l}{\partial \bar{z}_l} n_y + l^2 \frac{\partial n_y}{\partial \bar{z}_l} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial l}{\partial \bar{z}_l} n_x + l \frac{\partial n_x}{\partial \bar{z}_l} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial l}{\partial \bar{z}_l} n_y + l \frac{\partial n_y}{\partial \bar{z}_l} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial l}{\partial \bar{z}_l} n_z + l \frac{\partial n_z}{\partial \bar{z}_l} \right) & 0 & \frac{1}{12} \left(2l \frac{\partial l}{\partial \bar{z}_l} n_z + l^2 \frac{\partial n_z}{\partial \bar{z}_l} \right) & -\frac{1}{12} \left(2l \frac{\partial l}{\partial \bar{z}_l} n_y + l^2 \frac{\partial n_y}{\partial \bar{z}_l} \right) \end{array} \right\}^\top \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

各種マトリクスの節点 x, y 座標に関する微分についても z 座標の場合と同様に導出できる。

付録 C

ベジエ曲面による形状表現

本論では、ベジエ曲面でシェルの形状を表現する。本節では、ベジエ曲線・曲面の定義について述べる。

C.1 ベジエ曲線

Pierre Bézier は、切断べき関数の問題点を解決するためベジエ曲線を提案した。Pierre Bézier により導かれた基底関数は、その後の研究で Forrest⁵²⁾ および Gordon と Riesenfeld⁵³⁾ によって、バーンスタイン基底関数であることが示されている⁵⁴⁾。ベジエ曲線あるいは曲面は、端部を除き、データ点を通らない。データ点は各小区間を形作る結び目である節点とはならず、曲線、曲面の形状を制御する結合係数として利用されるその性質から、このような性質を持つデータ点のことを一般に制御点と呼び、その集合を制御ネットと呼ぶ。本節では、2次元空間におけるベジエ曲線について述べる。

C.1.1 ベジエ曲線の構成

ベジエ曲線は、バーンスタイン基底関数と制御ネットにより決定される。

2次元空間座標はそれぞれパラメータ $t \in [0, 1]$ を介して表される。

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \end{aligned} \tag{C.1}$$

n 次のバーンスタイン基底関数は次式で定義される*1。

$$B_{n,i} = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i} \quad (i = 0, \dots, n) \tag{C.2}$$

また、 $B_{n,i}$ は、ド・カステリョのアルゴリズムと呼ばれる次の再帰的表現を用い、 $n = 0$ の場合から順に導くこともできる。

$$\begin{aligned} B_{n,i} &= (1-t)B_{n-1,i}(t) + tB_{n-1,i-1}(t) \\ B_{0,0} &= 1 \\ B_{n,j} &= 0 \quad (j < 0 \text{ または } j > n \text{ のとき}) \end{aligned} \tag{C.3}$$

例えば、3 次のバーンスタイン基底関数 $B_{3,i}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} B_{3,0}(t) &= (1-t)^3 & B_{3,1}(t) &= 3t(1-t)^2 \\ B_{3,2}(t) &= 3t^2(1-t) & B_{3,3}(t) &= t^3 \end{aligned} \tag{C.4}$$

*1 $0^0 = 0! = 1$ とする。

3 次のバーンスタイン基底関数を図 C.1 に示す。また、3 次のベジエ曲線の例を図 C.2 に示す。図 C.2 で塗りつぶした部分のように、制御点を含む最小の凸多角形を凸包と呼ぶ。

$B_{n,i}$ を用いて、 n 次のベジエ曲線 $P_n(t)$ は次式で定義される。

$$P_n(t) = \sum_{i=0}^n q_i B_{n,i}(t) \quad (C.5)$$

$$P_n(t) = [x(t), y(t)]^T, \quad q_i = [q_{x,i}, q_{y,i}]^T$$

ここで、 q_i は制御ネットの i 番目の制御点座標ベクトルである。このように、 n 次のベジエ曲線は $n+1$ 個の制御点で構成される制御ネットにより定義され、その基底関数は t の n 次多項式である。

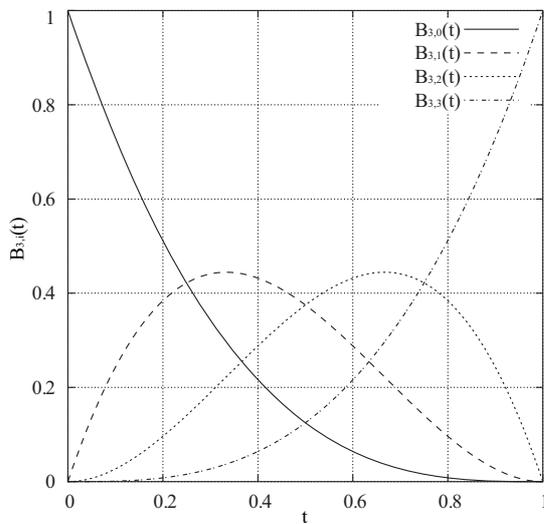


図 C.1 3 次のバーンスタイン基底関数

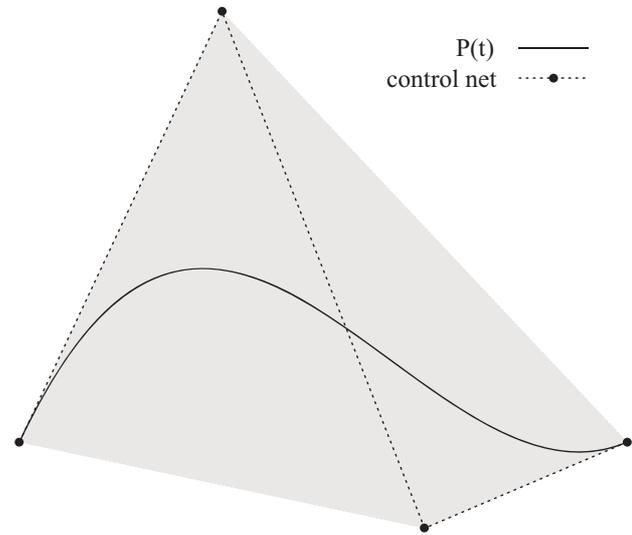


図 C.2 3 次のベジエ曲線と凸包

式 (C.2) から明らかなように、バーンスタイン基底関数は、 $t=0$ では $B_{n,0}$ のみ 1 で他は 0 である。また、 $t=1$ では $B_{n,n}$ のみ 1 で他は 0 である。したがって式 (C.5) より、 $t=0$ および $t=1$ の端点におけるベジエ曲線はそれぞれ制御点 q_0 、 q_n に一致することが分かる。

また、式 (C.2) から、

$$\sum_{i=0}^n B_{n,i}(t) = 1 \quad (C.6)$$

となることも容易に確かめられる。

C.1.2 ベジエ曲線の性質

ベジエ曲面の性質をまとめると、次のようになる。

C.1.2.1 アフィン不変性

平行移動と回転を合成した変換

$$y = Ax + b \quad (C.7)$$

をアフィン変換と呼ぶ。ベジエ曲線のアフィン変換は次式で表わされる。

$$AP_n(t) + c = A \sum_{i=0}^n q_i B_i^n(t) + c \quad (C.8)$$

一方、制御点のアフィン変換は次式で表わされる。

$$Aq_i + c \quad (C.9)$$

ここで、式 (C.6) を考慮すれば次式が成り立つ。

$$AP_n(t) + c = \sum_{i=0}^n (Aq_i + c) B_i^n(t) \quad (C.10)$$

以上より、ベジエ曲線をアフィン変換した結果は、制御点をアフィン変換してからベジエ曲線を描いたものに等しい。このように、ベジエ曲線はアフィン変換に対して不変であり、この性質をアフィン不変性と呼ぶ。

C.1.2.2 凸包性

$t \in [0, 1]$ において、ベジエ曲線は必ず制御点が構成する凸包内に存在する。この性質は凸包性と呼ばれ、 $t \in [0, 1]$ においてバーンスタイン基底関数が非負であることおよび式 (C.6) から導かれる。この性質により、曲線の大まかな形状を制御点の位置から予測することができる。

C.1.2.3 端点一致

C.1.1 節で述べた通り、ベジエ曲線は q_0 と q_n を通過し、 $P_n(0) = q_0$ 、 $P_n(1) = q_n$ である。これは、次式より明らかである。

$$\begin{aligned} B_{n,0}(0) &= 1 & B_{n,i}(0) &= 0 \quad (i \neq 0) \\ B_{n,n}(1) &= 1 & B_{n,i}(1) &= 0 \quad (i \neq n) \end{aligned} \quad (C.11)$$

C.1.2.4 対称性

恒等式

$$B_{n,j}(t) = B_{n,n-j}(1-t) \quad (C.12)$$

より、次式のように、制御点の順序が異なる曲線は同じである。

$$\sum_{i=0}^n q_i B_{n,i}(t) = \sum_{i=0}^n q_{n-i} B_{n,i}(1-t) \quad (C.13)$$

C.1.2.5 その他の性質

そのほか、ベジエ曲線の主な性質には以下のものがある。

次数と制御点数 ベジエ曲線の次数は、制御点の数より 1 つ少ないものとなる。

変動減少性 曲線は制御点列の形状を滑らかにした形状となり、その変動は、制御点の変動より小さい。

直線再現性 制御点を直線状に配置すると直線になる。

疑似局所制御性 制御点 i を動かした時、その影響はパラメータ値 i/n 付近で最大になるため、曲線の変化が予想できる。

C.2 ベジエ曲面

ここでは、ベジエ曲線を 3 次元空間内に拡張し、3 次元空間内の制御点により構成される曲面について考える。そのためにまず、パラメータ t のほかに新たに s を導入する。3 次元空間座標 $[x, y, z]^T$ はそれぞれ 2 つのパラメータ

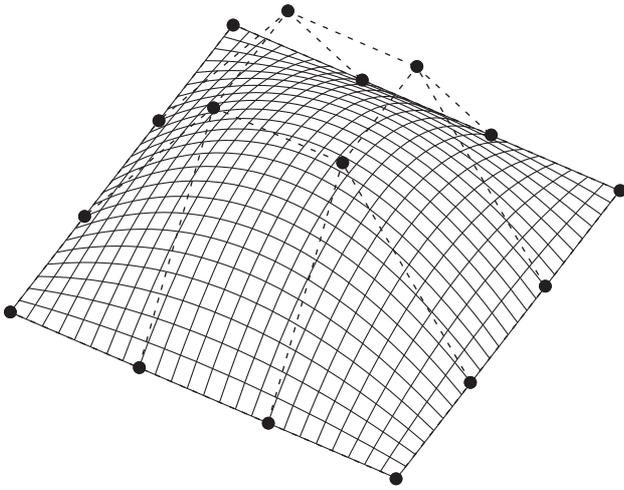


図 C.3 3 次のテンソル積ベジエ曲面の例

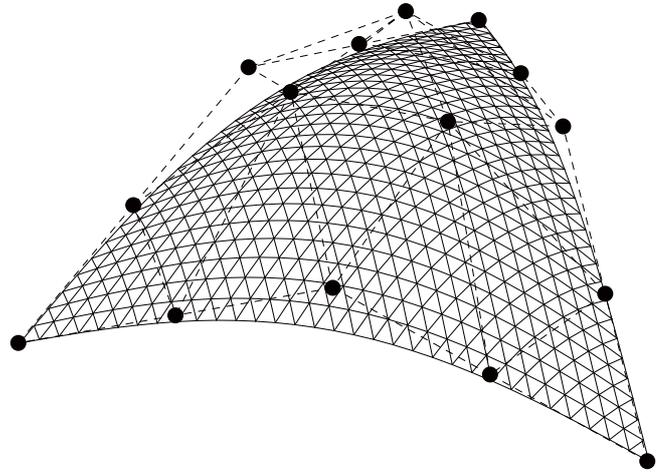


図 C.4 4 次の三角形パッチベジエ曲面の例

$s, t \in [0, 1]$ を使って表わされる。

$$\begin{aligned} x &= x(s, t) \\ y &= y(s, t) \\ z &= z(s, t) \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

C.2.1 テンソル積ベジエ曲面

パラメータ表現による3次元空間座標 $[x(s, t), y(s, t), z(s, t)]^\top$ は曲線からの拡張として、 s, t をそれぞれ変数とするバーンスタイン基底関数の積として表すことができる。

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{n,m}(s, t) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{q}_{ij} B_{n,i}(s) B_{m,j}(t) \\ \mathbf{S}_{n,m}(s, t) &= (x, y, z)^\top, \quad \mathbf{q}_{ij} = [q_{x,ij}, q_{y,ij}, q_{z,ij}]^\top \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

ここで、 $\mathbf{q}_{ij} = [q_{x,ij}, q_{y,ij}, q_{z,ij}]^\top$ は制御点座標、 $B_{n,i}(s)$ 、 $B_{m,j}(t)$ は、パラメータ s, t 方向のバーンスタイン基底関数である。 n, m は $B_{n,i}(s)$ 、 $B_{m,j}(t)$ それぞれの次数であり、 $n+1, m+1$ は1本の s 曲線、 t 曲線をつくる制御点の個数に等しい。

このようにして表現される曲面を、テンソル積ベジエ曲面と呼ぶ。

制御点は s, t それぞれの方向に同数の制御点を持たなければならないが、 $n = m$ である必要はない。また、 s, t のいずれかを一定とすると、曲面上の曲線が得られ、それらは3次元空間上に位置するベジエ曲線となる。したがって、境界曲線はベジエ曲線である。 $n = m = 3$ のときのテンソル積ベジエ曲面の例を図 C.3 に示す。

C.2.2 三角形パッチベジエ曲面

テンソル積ベジエ曲面により、ほとんどの構造物の形状は十分な精度で表現することができる。しかしながら、例えば曲面の形状が扇形の場合など、上記のテンソル積ベジエ曲面では表現しにくい曲面も存在する。そのような場合、三角形パッチベジエ曲面が有効である^{25, 55)}。 n 次の三角形パッチベジエ曲面は、制御点 \mathbf{q}_{ijk} ($i + j + k = n$) により定義され、図 C.5 のような三角形の制御ネットを形成する。

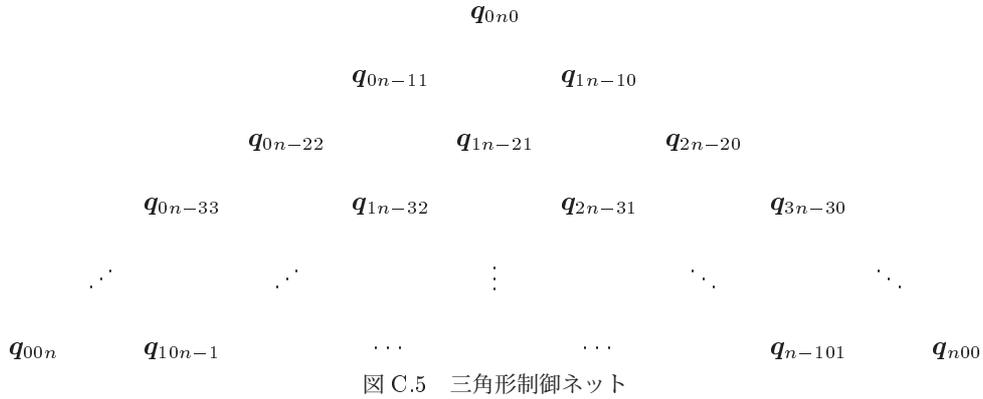


図 C.5 三角形制御ネット

n 次ベジエ三角形パッチにより形成される曲面上の任意の点 S_n は、パラメータ $u, v, w \in [0, 1](u + v + w = 1)^{*2}$ が与えられた時、2 変数のバースタイン基底関数^{*3}

$$B_{n,ijk}(u, v, w) = \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k \tag{C.16}$$

を導入することで、次式により求めることができる^{*4}。

$$S_n(u, v, w) = \sum_{i+j+k=n} q_{ijk} B_{n,ijk}(u, v, w), \quad (i, j, k = 0, 1, \dots, n) \tag{C.17}$$

三角形パッチベジエ曲面は、制御ネットが三角形形状となることが前提であるので、 u, v, w それぞれの方向に同数の制御点を持ち、かつその数が 3 方向すべて等しくなければならない。 $n = 4$ のときの三角形パッチベジエ曲面の例を図 C.4 に示す。なお、以降本論文では、 $w = 1 - u - v, k = n - i - j$ より、 u, v および i, j をそれぞれ独立変数とみなし、式 (C.16) および式 (C.17) を次式により記述することとする。

$$B_{n,ij}(u, v) = \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} u^i v^j (1-u-v)^{n-i-j} \tag{C.18}$$

$$S_n(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} q_{ij} B_{n,ij}(u, v), \quad (i, j = 0, 1, \dots, n, \quad i + j \leq n) \tag{C.19}$$

C.2.3 ベジエ曲面の性質

ベジエ曲面は、ベジエ曲線を 3 次元空間に拡張したものであるため、C.1.2 項に示したベジエ曲線の性質と同一の性質を有する。

C.3 ベジエ曲面の制御点と有限要素の節点との関係

本研究では、ベジエ曲面で曲面形状を表現した上で、曲面を離散化して、最適化計算の各ステップにおいて有限要素法による線形弾性解析を行う。離散化された曲面の節点座標は制御点座標の関数として表現されるため、有限要素法により算定される曲面の応力は制御点座標の関数として扱うことができる。

本節では、曲面を離散化し、有限要素メッシュ分割された際の節点座標とベジエ曲面の制御点座標との関係について詳細を述べる。

^{*2} $u + v + w = 1$ となるようなパラメトリック座標 $\mathbf{u} = [u, v, w]^T$ のことを一般に重心座標と呼ぶ。

^{*3} $0^0 = 0! = 1$ とする。

^{*4} $\sum_{i+j+k=n}$ は、 $i + j + k = n$ となるすべての組み合わせについて和をとることを意味するものとする。

C.3.1 テンソル積ベジエ曲面の制御点と有限要素の節点との関係

曲面上の位置を定めるパラメータを $s, t \in [0, 1]$ とする。曲面形状を定義するテンソル積ベジエ曲面の制御点を 1 本の s 曲線および t 曲線上にそれぞれ $I + 1$ 個, $J + 1$ 個配置し, 全体として $N = (I + 1) \times (J + 1)$ 個網状に配置するものとする。曲面の任意点における通常 3 次元座標での位置ベクトルを $\mathbf{S}_{I,J}(s, t) = [x(s, t), y(s, t), z(s, t)]^\top$, 各制御点での通常 3 次元座標での位置ベクトルを $\mathbf{q}_{ij} = [q_{x,ij}, q_{y,ij}, q_{z,ij}]^\top$ ($i = 0, 1, \dots, I$) ($j = 0, 1, \dots, J$) と表す。このとき, 曲面上の任意の点の位置ベクトル $\mathbf{S}_{I,J}(s, t)$ は式 (C.15) より次のようにかける。

$$\mathbf{S}_{I,J}(s, t) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \mathbf{q}_{ij} B_{I,i}(s) B_{J,j}(t) \quad (\text{C.20})$$

今, 有限要素法における要素分割において, 式 (C.20) の曲面を, s, t 方向にそれぞれ I' 個, J' 個に分割し, 全体として $n = (I' + 1) \times (J' + 1)$ 個網状に節点を配置するものとする。通常 3 次元座標での節点座標ベクトルを次のようにおく。

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_x &= [x(s_0, t_0), \dots, x(s_0, t_{I'}), \dots, x(s_{I'}, t_0), \dots, x(s_{I'}, t_{J'})]^\top \\ \mathbf{r}_y &= [y(s_0, t_0), \dots, y(s_0, t_{I'}), \dots, y(s_{I'}, t_0), \dots, y(s_{I'}, t_{J'})]^\top \\ \mathbf{r}_z &= [z(s_0, t_0), \dots, z(s_0, t_{I'}), \dots, z(s_{I'}, t_0), \dots, z(s_{I'}, t_{J'})]^\top \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

制御点座標ベクトルを次のようにおく。

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_x &= [q_{x,00}, \dots, q_{x,0J}, \dots, q_{x,I0}, \dots, q_{x,IJ}]^\top \\ \mathbf{q}_y &= [q_{y,00}, \dots, q_{y,0J}, \dots, q_{y,I0}, \dots, q_{y,IJ}]^\top \\ \mathbf{q}_z &= [q_{z,00}, \dots, q_{z,0J}, \dots, q_{z,I0}, \dots, q_{z,IJ}]^\top \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

このとき, 通常 3 次元座標の節点座標と制御点座標の関係式は次のようにかける。

$$\begin{aligned} x(s_k, t_l) &= \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J q_{x,ij} B_{I,i}(s_k) B_{J,j}(t_l) \\ y(s_k, t_l) &= \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J q_{y,ij} B_{I,i}(s_k) B_{J,j}(t_l) \quad (k = 0, 1, \dots, I') \quad (l = 0, 1, \dots, J') \\ z(s_k, t_l) &= \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J q_{z,ij} B_{I,i}(s_k) B_{J,j}(t_l) \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

マトリクスの形で書くと次式のように表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_x &= \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{q}_x \\ \mathbf{r}_y &= \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{q}_y \\ \mathbf{r}_z &= \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{q}_z \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

ただし

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} B_{I,1}(s_0)B_{J,0}(t_0) & \cdots & B_{I,0}(s_0)B_{J,J}(t_0) & \cdots & B_{I,I}(s_0)B_{J,0}(t_0) & \cdots & B_{I,I}(s_0)B_{J,J}(t_0) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{I,0}(s_0)B_{J,0}(t_{J'}) & \cdots & B_{I,0}(s_0)B_{J,J}(t_{J'}) & \cdots & B_{I,I}(s_0)B_{J,0}(t_{J'}) & \cdots & B_{I,I}(s_0)B_{J,J}(t_{J'}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{I,0}(s_{I'})B_{J,0}(t_0) & \cdots & B_{I,0}(s_{I'})B_{J,J}(t_0) & \cdots & B_{I,I}(s_{I'})B_{J,0}(t_0) & \cdots & B_{I,I}(s_{I'})B_{J,J}(t_0) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{I,0}(s_{I'})B_{J,0}(t_{J'}) & \cdots & B_{I,0}(s_{I'})B_{J,J}(t_{J'}) & \cdots & B_{I,I}(s_{I'})B_{J,0}(t_{J'}) & \cdots & B_{I,I}(s_{I'})B_{J,J}(t_{J'}) \end{bmatrix} \quad (\text{C.25})$$

式 (C.23) を 1 つにまとめると次のようにかける。

$$\mathbf{S}_{I,J}(s_k, t_l) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^J \mathbf{q}_{ij} B_{I,i}(s_k) B_{J,j}(t_l) \quad (k = 0, 1, \dots, I') \quad (l = 0, 1, \dots, J') \quad (\text{C.26})$$

節点位置ベクトルを $\mathbf{r} = [\mathbf{r}_x^\top \ \mathbf{r}_y^\top \ \mathbf{r}_z^\top]^\top$ ，制御点位置ベクトルを $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_x^\top \ \mathbf{q}_y^\top \ \mathbf{q}_z^\top]^\top$ すれば，上式は次のようにマトリクスで表される。

$$\mathbf{r} = \mathbf{B}\mathbf{q} \quad (\text{C.27})$$

ただし

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \quad (\text{C.28})$$

ここで \mathbf{B} の次元は $3n \times 3N$ であり，通常正方形行列ではなく，節点数 n の方が制御点数 N よりも大きいので縦長マトリクスとなる。したがって，制御点位置ベクトルが決まると節点位置ベクトルは従属的に決定されることになる一方，節点位置ベクトルと制御点位置ベクトルは多対多対応となっており，節点位置ベクトルに關与する制御点位置ベクトルは一般に複数個存在するが，その影響度は C.1.2 項で示した疑似局所制御性に従う。

C.3.2 三角形パッチベジエ曲面の制御点と有限要素の節点との関係

曲面上の位置を定めるパラメータを $u, v \in [0, 1]$ ($u + v \leq 1$) とする。曲面形状を定義する三角形パッチベジエ曲面の制御点を 1 本の u 曲線および v 曲線上にそれぞれ $I + 1$ 個配置し，全体として $N = \frac{(I+1) \times (I+2)}{2}$ 個三角形の網目状に配置するものとする。曲面の任意点における通常 3 次元座標での位置ベクトルを $\mathbf{S}_I(u, v) = [x(u, v), y(u, v), z(u, v)]^\top$ ，各制御点での通常 3 次元座標での位置ベクトルを $\mathbf{q}_{ij} = [q_{x,ij}, q_{y,ij}, q_{z,ij}]^\top$ ($i, j = 0, \dots, I, i + j \leq I$) と表す。このとき，曲面上の任意の点の位置ベクトル $\mathbf{S}_I(u, v)$ は式 (C.17) より次のようにかける。

$$\mathbf{S}_I(u, v) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \mathbf{q}_{ij} B_{I,ij}(u, v) \quad (\text{C.29})$$

今，有限要素法における要素分割において，式 (C.20) の曲面を， u, v 方向にそれぞれ I' 個に分割し，全体として $n = \frac{(I'+1) \times (I'+2)}{2}$ 個三角形の網目状に節点を配置するものとする。通常 3 次元座標での節点座標ベクトルを次

のようにおく。

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_x &= [x(u_0, v_0), \dots, x(u_{I'}, v_0), x(u_0, v_1), \dots, x(u_{I'-1}, v_1), \dots, x(u_0, v_{I'})]^\top \\ \mathbf{r}_y &= [y(u_0, v_0), \dots, y(u_{I'}, v_0), y(u_0, v_1), \dots, y(u_{I'-1}, v_1), \dots, y(u_0, v_{I'})]^\top \\ \mathbf{r}_z &= [z(u_0, v_0), \dots, z(u_{I'}, v_0), z(u_0, v_1), \dots, z(u_{I'-1}, v_1), \dots, z(u_0, v_{I'})]^\top \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

制御点座標ベクトルを次のようにおく。

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_x &= [q_{x,00}, \dots, q_{x,I0}, q_{x,01}, \dots, q_{x,I-11}, \dots, q_{x,0I}]^\top \\ \mathbf{q}_y &= [q_{y,00}, \dots, q_{y,I0}, q_{y,01}, \dots, q_{y,I-11}, \dots, q_{y,0I}]^\top \\ \mathbf{q}_z &= [q_{z,00}, \dots, q_{z,I0}, q_{z,01}, \dots, q_{z,I-11}, \dots, q_{z,0I}]^\top \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

このとき、通常 3 次元座標の節点座標と制御点座標の関係式は次のようにかける。

$$\begin{aligned} x(u_\alpha, v_\beta) &= \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} q_{x,ij} B_{I,ij}(u_\alpha, v_\beta) \\ y(u_\alpha, v_\beta) &= \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} q_{y,ij} B_{I,ij}(u_\alpha, v_\beta) \quad (\alpha, \beta = 0, \dots, I', \quad \alpha + \beta \leq I') \\ z(u_\alpha, v_\beta) &= \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} q_{z,ij} B_{I,ij}(u_\alpha, v_\beta) \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

マトリクスの形で書くと次式のように表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_x &= \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{q}_x \\ \mathbf{r}_y &= \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{q}_y \\ \mathbf{r}_z &= \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{q}_z \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

ただし

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} B_{I,00}(u_0, v_0) & \cdots & B_{I,I0}(u_0, v_0) & B_{I,01}(u_0, v_0) & \cdots & B_{I,I-11}(u_0, v_0) & \cdots & B_{I,0I}(u_0, v_0) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{I,00}(u_{I'}, v_0) & \cdots & B_{I,I0}(u_{I'}, v_0) & B_{I,01}(u_{I'}, v_0) & \cdots & B_{I,I-11}(u_{I'}, v_0) & \cdots & B_{I,0I}(u_{I'}, v_0) \\ B_{I,00}(u_0, v_1) & \cdots & B_{I,I0}(u_0, v_1) & B_{I,01}(u_0, v_1) & \cdots & B_{I,I-11}(u_0, v_1) & \cdots & B_{I,0I}(u_0, v_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{I,00}(u_{I'-1}, v_1) & \cdots & B_{I,I0}(u_{I'-1}, v_1) & B_{I,01}(u_{I'-1}, v_1) & \cdots & B_{I,I-11}(u_{I'-1}, v_1) & \cdots & B_{I,0I}(u_{I'-1}, v_1) \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ B_{I,00}(u_0, v_{I'}) & \cdots & B_{I,I0}(u_0, v_{I'}) & B_{I,01}(u_0, v_{I'}) & \cdots & B_{I,I-11}(u_0, v_{I'}) & \cdots & B_{I,0I}(u_0, v_{I'}) \end{bmatrix} \quad (\text{C.34})$$

式 (C.32) を 1 つにまとめると次のようにかける。

$$\mathbf{S}_I(u_\alpha, v_\beta) = \sum_{i=0}^I \sum_{j=0}^{I-i} \mathbf{q}_{ij} B_{I,ij}(u_\alpha, v_\beta) \quad (\alpha, \beta = 0, \dots, I', \quad \alpha + \beta \leq I') \quad (\text{C.35})$$

節点位置ベクトルを $\mathbf{r} = [\mathbf{r}_x^\top \ \mathbf{r}_y^\top \ \mathbf{r}_z^\top]^\top$, 制御点位置ベクトルを $\mathbf{q} = [\mathbf{q}_x^\top \ \mathbf{q}_y^\top \ \mathbf{q}_z^\top]^\top$ すれば, 上式は次のようにマトリクス形で表され, テンソル積ベジエ曲面の場合と同様の形に帰着できる。

$$\mathbf{r} = \mathbf{B}\mathbf{q} \quad (\text{C.36})$$

ただし

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{B}} & & \mathbf{0} \\ & \tilde{\mathbf{B}} & \\ \mathbf{0} & & \tilde{\mathbf{B}} \end{bmatrix} \quad (\text{C.37})$$

付録 D

最適化手法

D.1 概説

本論では、曲面構造物を対象とした様々な構造最適化問題を、単一目的最適化問題として定式化し、数学的根拠に基づく理論的手法である数理計画法によって構造形態創生を試みている。本節ではまず、単一目的最適化問題の一般的な定義と考え方を概説する。本論で扱う単一目的最適化問題は、そのすべてが制約条件を含む制約付き単一目的最適化問題であるが、ここではまず、より簡単な無制約単一目的最適化問題について概説したのち、その応用である制約付き単一目的最適化問題について述べる。最後に、複数の目的関数を評価する多目的最適化問題を、単一目的最適化手法を用いて解く手法について概説する。

本節において、便宜上 2 つの n 次元ベクトル $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^\top$, $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_n]^\top$ の大小関係を表す記号を次のように定義することとする。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x} = \mathbf{y} &\iff x_i = y_i \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y} &\iff x_i \neq y_i \text{ for at least one of } i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ \mathbf{x} \leq \mathbf{y} &\iff x_i \leq y_i \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \mathbf{x} < \mathbf{y} &\iff x_i < y_i \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right\} \quad (\text{D.1})$$

なお、以降本論文においてベクトルの大小関係を評価するときは、特に断ることなく上記の定義を活用することとする。

D.2 単一目的最適化問題

一般に非線形計画問題は、「目的関数

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (\text{D.2})$$

を m 個の不等式制約条件

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (\text{D.3})$$

及び l 個の等式制約条件

$$h_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, l \quad (\text{D.4})$$

のもとで最小にする解を求めよ。」という最適化問題として定式化される。目的関数を最大化する問題に対しては目的関数に (-1) をかけて目的関数を最小化する問題に変換できるため、以下では最小化問題の場合に限定して議論する。ここで f, g_i ($i = 1, 2, \dots, m$), h_j ($j = 1, 2, \dots, l$) は変数 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^\top \in R^n$ の全ての有限な値に対して定義される非線形実数値関数である。なお、本論文のように工学分野の形状最適化問題を扱う場合、この変数は特に設計変数とよばれるが、 n 次元ユークリッド空間 E^n における実行可能解集合 X を R^n の閉集合とすると、このよ

うな非線形計画問題は次のように書き表される。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(\mathbf{x}) \\ & \text{subject to} && \begin{cases} \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

ここに

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= [x_1, x_2, \dots, x_n]^\top && : n \text{ 次元設計変数ベクトル} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= [g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x})]^\top && : m \text{ 次元ベクトル制約関数} \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) &= [h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \dots, h_l(\mathbf{x})]^\top && : l \text{ 次元ベクトル制約関数} \end{aligned}$$

である。目的関数が単一であるこのような問題は、単一目的最適化問題とよばれる。

D.3 大域的最適解と局所的最適解

大域的最適解

単一目的最適化問題に対して、大域的最適解と局所的最適解が定義されている。

定義 全ての $\mathbf{x} \in X$ に対して、 $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$ となる $\mathbf{x}^* \in X$ が存在するとき、 \mathbf{x}^* を大域的最適解という。

また、特に等号を含まない条件が成立するときは、 \mathbf{x}^* は強意大域的最適解と呼ばれる。

局所的最適解

大域的最適解の実行可能解集合 X に対し、 \mathbf{x}^* の ε 近傍における実行可能解集合を $N(\mathbf{x}^*, \varepsilon) = \{\mathbf{y} \in X \mid \|\mathbf{y} - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon\}$ とするとき、局所的最適解が定義できる。

定義 全ての $\mathbf{x} \in N(\mathbf{x}^*, \varepsilon)$ に対して、 $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$ となる $\mathbf{x}^* \in N(\mathbf{x}^*, \varepsilon)$ が存在するとき、 \mathbf{x}^* を局所的最適解という。

また、特に等号を含まない条件が成立するときは、 \mathbf{x}^* は強意局所的最適解と呼ばれる。局所最適解の概念は近傍の概念であるので、 $f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}^*)$ となる \mathbf{x} が $N(\mathbf{x}^*, \varepsilon)$ の外に存在する可能性が残されている。

単一目的最適化問題における大域的最適解及び局所的最適解の概念図を図 D.1 に示す。

D.4 最適性条件

最適化問題の最適解が局所的最適解であろうと大域的最適解であろうと、制約条件のある単一目的最適化問題において、特異な場合を除いて必ず満たされていなければならない必要条件として、Karuch-Kuhn-Tucker 条件がある。

ここでは Karuch-Kuhn-Tucker の制約想定を導入して、Karuch-Kuhn-Tucker 条件を示すこととする。

定義 非線形計画問題 (D.5) の制約条件 $g_i(\mathbf{x})$, $h_j(\mathbf{x})$ は全て C^1 級の関数であり、 $\bar{\mathbf{x}} \in X$ とする。このとき

$$\nabla g_i(\bar{\mathbf{x}})^\top \mathbf{z} \leq 0 \quad \forall i \in I(\bar{\mathbf{x}}), \nabla h_j(\bar{\mathbf{x}})^\top \mathbf{z} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, l$$

を満たす零でない任意の $\mathbf{z} \in R^n$ に対して、 $0 \leq \theta \leq \delta$ で定義されたベクトル関数

$$\boldsymbol{\alpha}(\theta) = (\alpha_1(\theta), \alpha_2(\theta), \dots, \alpha_n(\theta))^\top$$

が存在して

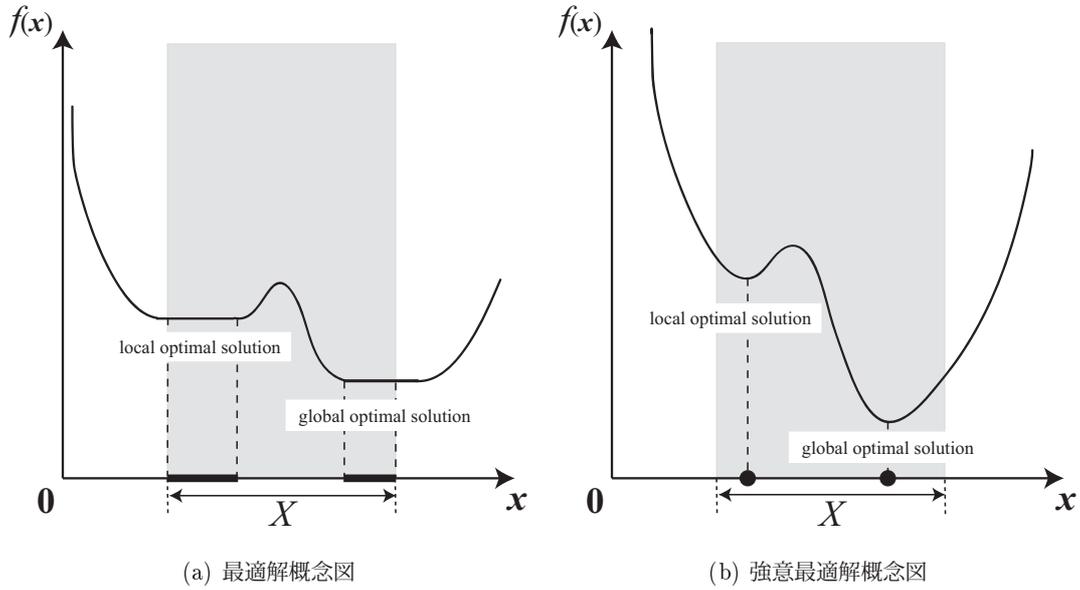


図 D.1 大域的最適解と局所的最適解

- (1) $\alpha(0) = \bar{x}$
- (2) $\alpha(\theta)$ は $\theta = 0$ で微分可能で $\frac{d\alpha(0)}{d\theta} = z$
- (3) $\alpha(\theta) \in X$ (すなわち $g_i(\alpha(\theta)) \leq 0, i = 1, \dots, m, h_j(\alpha(\theta)) = 0, j = 1, \dots, l \forall \theta \in [0, \delta]$) が成立するとき $g_i(x)$ $i = 1, 2, \dots, m$ 及び $h_j(x), j = 1, 2, \dots, l$ は $\bar{x} \in X$ において Karuch-Kuhn-Tucker の制約想定を満たすという。

Karuch-Kuhn-Tucker の必要性定理

非線形計画問題 (D.5) において $f(x), g_i(x), h_j(x)$ は全て C^1 級の関数であり, $x^o \in X$ を局所最適解とする。このとき, もし x^o において Karuch-Kuhn-Tucker の制約想定が満たされるならば, Karuch-Kuhn-Tucker 条件

$$\begin{aligned}
 \nabla f(x^o) + \nabla g(x^o)\lambda^o + \nabla h(x^o)\mu^o &= \mathbf{0} \\
 g_i(x^o) \leq 0, \quad \lambda_i^o g_i(x^o) &= 0, \quad \lambda_i^o \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \\
 h_j(x^o) &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, l
 \end{aligned} \tag{D.6}$$

を満たすようなラグランジュ乗数ベクトル $\lambda^o = (\lambda_1^o, \lambda_2^o, \dots, \lambda_m^o)^\top$, $\mu^o = (\mu_1^o, \mu_2^o, \dots, \mu_l^o)^\top$ が存在する。

ただし、 $\nabla f(\mathbf{x}^o)$, $\nabla g(\mathbf{x}^o)$, $\nabla h(\mathbf{x}^o)$ は以下のように表されるものとする。

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{x}^o) &= \left\{ \frac{\partial f(\mathbf{x}^o)}{\partial x_1^o} \quad \frac{\partial f(\mathbf{x}^o)}{\partial x_2^o} \quad \dots \quad \frac{\partial f(\mathbf{x}^o)}{\partial x_n^o} \right\}^\top \\ \nabla g(\mathbf{x}^o) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1(\mathbf{x}^o)}{\partial x_1^o} & \frac{\partial g_2(\mathbf{x}^o)}{\partial x_1^o} & \dots & \frac{\partial g_m(\mathbf{x}^o)}{\partial x_1^o} \\ \frac{\partial g_1(\mathbf{x}^o)}{\partial x_2^o} & \frac{\partial g_2(\mathbf{x}^o)}{\partial x_2^o} & & \frac{\partial g_m(\mathbf{x}^o)}{\partial x_2^o} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_1(\mathbf{x}^o)}{\partial x_n^o} & \frac{\partial g_2(\mathbf{x}^o)}{\partial x_n^o} & \dots & \frac{\partial g_m(\mathbf{x}^o)}{\partial x_n^o} \end{bmatrix} \\ \nabla h(\mathbf{x}^o) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1(\mathbf{x}^o)}{\partial x_1^o} & \frac{\partial h_2(\mathbf{x}^o)}{\partial x_1^o} & \dots & \frac{\partial h_l(\mathbf{x}^o)}{\partial x_1^o} \\ \frac{\partial h_1(\mathbf{x}^o)}{\partial x_2^o} & \frac{\partial h_2(\mathbf{x}^o)}{\partial x_2^o} & & \frac{\partial h_l(\mathbf{x}^o)}{\partial x_2^o} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_1(\mathbf{x}^o)}{\partial x_n^o} & \frac{\partial h_2(\mathbf{x}^o)}{\partial x_n^o} & \dots & \frac{\partial h_l(\mathbf{x}^o)}{\partial x_n^o} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{D.7})$$

また、 $\lambda_i^o g_i(\mathbf{x}^o) = 0$ は、不活性な不等式制約式に対応するラグランジュ乗数が零になることを意味しており、相補条件と呼ばれる。Karuch-Kuhn-Tucker 条件の幾何学的解釈を例示した図を図 D.2 に示す。

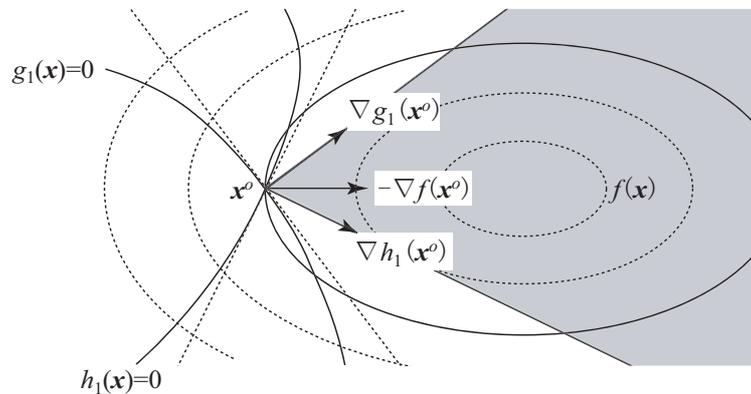


図 D.2 Karuch-Kuhn-Tucker 条件の幾何学的解釈

D.5 制約付き単一目的最適化手法

制約付き単一目的最適化手法には、いくつかのアルゴリズムが存在するが、本研究では制約付き単一目的最適化問題の解法として現在最も広く一般に用いられている逐次二次計画法を適用するため、ここでは逐次二次計画法についてのみ述べる。

D.5.1 逐次二次計画法

逐次二次計画法は、無制約単一目的最適化問題における準ニュートン法の原理を、制約付き単一目的最適化問題 (D.5) に上手く組み入れることによって優れた性能の実現をねらった数値解法といえる。逐次二次計画法では非線形計画問題を二次計画問題で近似し、反復計算によって求める解に収束させる。

非線形計画問題 (D.5) に対するラグランジュ関数は次のように表される。

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\mu}^\top \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (\text{D.8})$$

今、非線形計画問題 (D.5) に対して、Karuch-Kuhn-Tucker の必要性定理を満足する”強意”局所最適解 \mathbf{x}° と対応するラグランジュ乗数 $\boldsymbol{\lambda}^\circ, \boldsymbol{\mu}^\circ$ が存在するものとする。このとき、Karuch-Kuhn-Tucker 条件の等式部分よりなる $(\mathbf{x}^\circ, \boldsymbol{\lambda}^\circ, \boldsymbol{\mu}^\circ)$ に関する $(n + m + l)$ 個の連立非線形方程式

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^\circ, \boldsymbol{\lambda}^\circ) &= \mathbf{0} \\ \lambda_i^\circ g_i(\mathbf{x}^\circ) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \mu_i^\circ h_i(\mathbf{x}^\circ) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, l \end{aligned} \quad (\text{D.9})$$

の左辺の $(n + m + l) \times (n + m + l)$ ヤコビ行列

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}^\circ, \boldsymbol{\lambda}^\circ, \boldsymbol{\mu}^\circ) = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{x}\mathbf{x}}^2 L(\mathbf{x}^\circ, \boldsymbol{\lambda}^\circ) & \nabla g_1(\mathbf{x}^\circ) & \cdots & \nabla g_m(\mathbf{x}^\circ) \\ \lambda_1^\circ \nabla g_1(\mathbf{x}^\circ)^\top & g_1(\mathbf{x}^\circ) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_m^\circ \nabla g_m(\mathbf{x}^\circ)^\top & 0 & \cdots & g_m(\mathbf{x}^\circ) \\ \mu_1^\circ \nabla h_1(\mathbf{x}^\circ)^\top & h_1(\mathbf{x}^\circ) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_l^\circ \nabla h_l(\mathbf{x}^\circ)^\top & 0 & \cdots & h_l(\mathbf{x}^\circ) \end{bmatrix} \quad (\text{D.10})$$

は正則となるので、式 (D.9) を $(\mathbf{x}^\circ, \boldsymbol{\lambda}^\circ, \boldsymbol{\mu}^\circ)$ に関する $(n + m + l)$ 個の連立方程式とみなして $(\mathbf{x}^\circ, \boldsymbol{\lambda}^\circ, \boldsymbol{\mu}^\circ)$ の近傍で解けば、強意局所最適解 \mathbf{x}° と対応するラグランジュ乗数 $\boldsymbol{\lambda}^\circ, \boldsymbol{\mu}^\circ$ を求めることができる。

この方程式にニュートン法を適用するために、式 (D.9) を $(\mathbf{x}^\circ, \boldsymbol{\lambda}^\circ, \boldsymbol{\mu}^\circ)$ の近傍の点 $(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{\mu}^k)$ において線形近似して、 $\nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{\mu}^k) = \nabla f(\mathbf{x}^k) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \boldsymbol{\lambda}^k + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \boldsymbol{\mu}^k$ であることを考慮して整理すれば

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}\mathbf{x}}^2 L(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\lambda}^k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \boldsymbol{\lambda}^k + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) \boldsymbol{\mu}^k &= -\nabla f(\mathbf{x}^k) \\ \lambda_i^k \nabla g_i(\mathbf{x}^k)^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) + \lambda_i^k g_i(\mathbf{x}^k) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \mu_i^k \nabla h_i(\mathbf{x}^k)^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) + \mu_i^k h_i(\mathbf{x}^k) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, l \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

となるので、この方程式の解を $(\mathbf{x}^{k+1}, \boldsymbol{\lambda}^{k+1}, \boldsymbol{\mu}^{k+1})$ とするニュートン法の修正方程式は、次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{x}\mathbf{x}}^2 L(\mathbf{x}^\circ, \boldsymbol{\lambda}^\circ) & \nabla g_1(\mathbf{x}^\circ) & \cdots & \nabla g_m(\mathbf{x}^\circ) \\ \lambda_1^\circ \nabla g_1(\mathbf{x}^\circ)^\top & g_1(\mathbf{x}^\circ) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_m^\circ \nabla g_m(\mathbf{x}^\circ)^\top & 0 & \cdots & g_m(\mathbf{x}^\circ) \\ \mu_1^\circ \nabla h_1(\mathbf{x}^\circ)^\top & h_1(\mathbf{x}^\circ) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_l^\circ \nabla h_l(\mathbf{x}^\circ)^\top & 0 & \cdots & h_l(\mathbf{x}^\circ) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k \\ \boldsymbol{\lambda}^{k+1} \\ \boldsymbol{\mu}^{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla f(\mathbf{x}^k) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (\text{D.12})$$

ここで、(D.9) の左辺のヤコビ行列 $\mathbf{J}(\mathbf{x}^\circ, \boldsymbol{\lambda}^\circ, \boldsymbol{\mu}^\circ)$ は $(\mathbf{x}^\circ, \boldsymbol{\lambda}^\circ, \boldsymbol{\mu}^\circ)$ の近傍の点 $(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{\mu}^k)$ で正則であるので、式 (D.12) を直接解くことにより次の点 $(\mathbf{x}^{k+1}, \boldsymbol{\lambda}^{k+1}, \boldsymbol{\mu}^{k+1})$ を求めることができる。しかし、このようなニュートン法で定式化される修正方程式はヤコビ行列に含まれるヘッセ行列 $\nabla_{\mathbf{x}\mathbf{x}}^2 L(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{\mu}^k)$ を毎回計算しなければならないという欠点がある。そこで準ニュートン法の考えに基づいて $\nabla_{\mathbf{x}\mathbf{x}}^2 L(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\lambda}^k, \boldsymbol{\mu}^k)$ を近似する行列を逐次生成する方法が考えられる。さらには連立非線形方程式 (D.12) を直接解いて次の点 $(\mathbf{x}^{k+1}, \boldsymbol{\lambda}^{k+1}, \boldsymbol{\mu}^{k+1})$ を求めるかわりに、より解きやすい補助問題を導入して $(\mathbf{x}^{k+1}, \boldsymbol{\lambda}^{k+1}, \boldsymbol{\mu}^{k+1})$ をより容易に求めることも望まれる。

そのために、点 \mathbf{x}^k の近傍におけるもとの非線形計画問題 (D.5) の目的関数の 2 次近似式のヘシアン $\nabla^2 f(\mathbf{x}^k)$ を、行列 \mathbf{Q}^k で近似して定数項を省略して得られる 2 次の目的関数を、制約式の線形近似のもとで最小化するという、次の二次計画問題を導入する。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && \nabla f(\mathbf{x}^k)^\top \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{Q}^k \mathbf{d} \\ & \text{subject to} && \begin{cases} \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^\top \mathbf{d} \leq \mathbf{0} \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}^k) + \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^\top \mathbf{d} = \mathbf{0} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

この問題におけるラグランジュ関数を次のように定義する。

$$L(\mathbf{d}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nabla f(\mathbf{x}^k)^\top \mathbf{d} + \frac{1}{2} \mathbf{d}^\top \mathbf{Q}^k \mathbf{d} + \mathbf{u}^\top \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) + \mathbf{u}^\top \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^\top \mathbf{d} + \mathbf{v}^\top \nabla \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)^\top \mathbf{d} \quad (\text{D.14})$$

最適解を \mathbf{d}^k とし、対応するラグランジュ乗数を \mathbf{u}^k とすれば、Karush-Kuhn-Tucker 条件

$$\left. \begin{aligned} \nabla f(\mathbf{x}^k) + \mathbf{Q}^k \mathbf{d} + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \mathbf{u}^k &= \mathbf{0} \\ u_i^k g_i(\mathbf{x}^k) + u_i^k \nabla g_i(\mathbf{x}^k)^\top \mathbf{d}^k &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) + \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)^\top \mathbf{d}^k &\leq \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}^k \geq \mathbf{0} \\ v_i^k h_i(\mathbf{x}^k) + v_i^k \nabla h_i(\mathbf{x}^k)^\top \mathbf{d}^k &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, l \end{aligned} \right\} \quad (\text{D.15})$$

が成立する。この式の等式部分は以下の様に表すことができる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}^k & \nabla g_1(\mathbf{x}^k) & \cdots & \nabla g_m(\mathbf{x}^k) \\ u_1^k \nabla g_1(\mathbf{x}^k)^\top & g_1(\mathbf{x}^k) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_m^k \nabla g_m(\mathbf{x}^k)^\top & 0 & \cdots & g_m(\mathbf{x}^k) \\ v_1^k \nabla h_1(\mathbf{x}^k)^\top & g_1(\mathbf{x}^k) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_l^k \nabla h_l(\mathbf{x}^k)^\top & 0 & \cdots & h_l(\mathbf{x}^k) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}^k \\ \mathbf{u}^k \\ \mathbf{v}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\nabla f(\mathbf{x}^k) \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (\text{D.16})$$

ここで式 (D.12) と式 (D.16) を比較して

$$\mathbf{d}^k = \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k, \quad \mathbf{u}^k = \lambda^{k+1} \cong \lambda^k, \quad \mathbf{v}^k = \mu^{k+1} \cong \mu^k \quad (\text{D.17})$$

と見なせば、式 (D.16) の \mathbf{Q}^k は式 (D.12) の $\nabla_{\mathbf{x}\mathbf{x}}^2 L(\mathbf{x}^0, \lambda^0)$ の役割を果たしていることが分かる。したがって \mathbf{Q}^k はもとの非線形計画問題 (D.5) の目的関数のヘシアンの近似行列と考えるかわりに、ラグランジュ関数のヘシアンの近似行列とみなすことができるので、 \mathbf{Q}^k の更新は

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^k &= \mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k \\ \mathbf{q}^k &= \nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k) - \nabla_{\mathbf{x}} L(\mathbf{x}^k, \mathbf{u}^k, \mathbf{v}^k) \end{aligned} \quad (\text{D.18})$$

とにおいて、BFGS 公式

$$\mathbf{Q}^{k+1} = \mathbf{Q}^k + \frac{\mathbf{q}^k (\mathbf{q}^k)^\top}{(\mathbf{q}^k)^\top \mathbf{p}^k} + \frac{\mathbf{Q}^k \mathbf{p}^k (\mathbf{p}^k)^\top \mathbf{Q}^k}{(\mathbf{p}^k)^\top \mathbf{Q}^k \mathbf{p}^k} \quad (\text{D.19})$$

を適用すれば良いことが分かる。

一般に、 \mathbf{Q}^k は正定であることが望ましい。更新公式において \mathbf{Q}^k が正定るとき \mathbf{Q}^{k+1} が正定となるためには式 (D.18) の \mathbf{p}^k , \mathbf{q}^k に対して $\mathbf{p}^{k\top} \mathbf{q}^k > 0$ が成立しなければならない。しかしながら一般には成立しない。そこで式 (D.18) の \mathbf{q}^k の代わりに

$$\bar{\mathbf{q}}^k = \theta \mathbf{q}^k + (1 - \theta) \mathbf{Q}^k \mathbf{p}^k \quad (\text{D.20})$$

$$\theta = \begin{cases} 1 & (\mathbf{q}^k)^\top \mathbf{p}^k \geq 0.2 (\mathbf{p}^k)^\top \mathbf{Q}^k \mathbf{p}^k \text{ のとき} \\ \frac{0.8 (\mathbf{p}^k)^\top \mathbf{Q}^k \mathbf{p}^k}{(\mathbf{p}^k)^\top \mathbf{Q}^k \mathbf{p}^k - (\mathbf{p}^k)^\top \mathbf{q}^k} & (\mathbf{q}^k)^\top \mathbf{p}^k < 0.2 (\mathbf{p}^k)^\top \mathbf{Q}^k \mathbf{p}^k \text{ のとき} \end{cases}$$

で定義される \bar{q}^k を導入して、更新公式の q^k をこの \bar{q}^k で置き換えることが、M. J. D. Powell によって提案されている。このとき Q^k が正定であれば、 $(\bar{q}^k)^\top p^k > 0$ であることが確かめられるので、 Q^{k+1} も正定になることが保証される。

アルゴリズムの流れ

逐次二次計画法のアルゴリズムの流れを示す。

Step 1 初期点 x^1 と初期正定対称行列 Q^1 を選び、 $k = 1$ とおく。

Step 2 2次計画問題 (D.13) を解いて探索方向 d^k を求める。

Step 3 現在の点 x^k において停止基準を満たせば終了。そうでなければ1次元探索問題を解き、最適ステップ幅 α^k を求め $x^{k+1} = x^k + \alpha^k d^k$ とおく。

Step 4 BFGS 公式により次ステップの近似行列 Q^{k+1} を求める。とおく。 $k = k + 1$ として Step 2 へ戻る。

ここで、Step 3 における最適ステップ幅 α^k を求めるためには、ペナルティ関数が用いられる。ペナルティの与え方にはいくつか種類があるが、例えば次のような関数が用いられる。

$$F(x) = f(x) + r \left(\sum_{i=1}^l |h_i(x)| + \sum_{i=1}^m \max\{0, g_i(x)\} \right) \quad (\text{D.21})$$

ここで、 r はペナルティパラメータである。 r が十分に大きいとき、 $F(x)$ を最小化することは問題 (D.5) の Karuch-Kuhn-Tucker 条件を満足する点を求めることと等価である。

D.6 多目的最適化問題と単一目的最適化問題

D.6.1 解の概念

実行可能領域を X とする。単一目的最適化問題の式 (D.5) と同様に、多目的最適化問題が次のように定式化される。

$$\begin{aligned} & \text{minimize} && f(\mathbf{x}) \\ & \text{subject to} && \begin{cases} g(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \\ h(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

ここに

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= [x_1, x_2, \dots, x_n]^\top && : n \text{ 次元設計変数ベクトル} \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= [f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})]^\top && : k \text{ 次元ベクトル目的関数} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}) &= [g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x})]^\top && : m \text{ 次元ベクトル制約関数} \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) &= [h_1(\mathbf{x}), h_2(\mathbf{x}), \dots, h_l(\mathbf{x})]^\top && : l \text{ 次元ベクトル制約関数} \end{aligned}$$

すなわち、多目的最適化問題は、 m 個の不等式制約条件および l 個の等式制約条件のもとで k 個の目的関数を同時に最小にする n 次元の設計変数ベクトルを求める問題である。多目的最適化問題には次の 3 つの解の概念がある。一般には完全最適解が存在することはごく稀で、パレート最適解群を求めることが目標となる。

D.6.1.1 完全最適解

多目的最適化問題に対して、単一目的の場合の解の概念を適用すれば、完全最適解の概念が定義できる。

定義 全ての $\mathbf{x} \in X$ に対して、 $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{x})$ となる $\mathbf{x}^* \in X$ が存在するとき、 \mathbf{x}^* を完全最適解という。

D.6.1.2 パレート最適解

複数個の目的関数を同時に最小化するという完全最適解は、目的関数が相競合する場合は、一般に存在しない。このように、目的関数がベクトルであるため、多目的最適化問題は通常のスカラー値の目的関数の最適解と同様に論ずることはできない。その代わりに消極的な解として、ある目的関数の値を改善するためには、少なくとも他の 1 つの目的関数の値を改悪せざるを得ないような解が、1896 年 Pareto⁵⁶⁾ によって初めて定義され、パレート最適解と呼ばれている。

定義 $\mathbf{x}^* \in X$ に対して $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^*)$ となる $\mathbf{x} \in X$ が存在しないとき、 \mathbf{x}^* をパレート最適解という。

パレート最適解は、Zadeh⁵⁷⁾ によれば、他よりも劣っていない解という意味で、非劣解と呼ばれ、Zeleny⁵⁸⁾ によれば、他のどの解にも支配されない解という意味で非支配解と呼ばれている。また Koopmans⁵⁹⁾ によれば、有効解とも呼ばれている。

パレート最適解の定義は、次のように言い換えることもできる。

定義 全ての $\mathbf{x} \in X$ に対して、もし $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}^*)$ であるならば、必ず $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}^*)$ となるとき、 $\mathbf{x}^* \in X$ はパレート最適解であるという。

一般に、パレート最適解は無数に存在し、そのパレート最適解集合が形成する面のことをパレート最適フロントと呼ぶ。

D.6.1.3 弱パレート最適解

パレート最適解より若干弱い解の概念として、次の弱パレート最適解が、定義されている。

定義 $x^* \in X$ に対して $f(x) < f(x^*)$ となる $x \in X$ が存在しないとき、 x^* を弱パレート最適解という。

多目的最適化問題に対する完全最適解，パレート最適解および弱パレート最適解の概念の理解を助けるため，2 目的 ($k = 2$) の場合に対するそれぞれの解を図 D.3 および図 D.4 に示す。ここで， $F(X) = \{f(x) | x \in X\}$ は，目的関数空間における実行可能領域である。

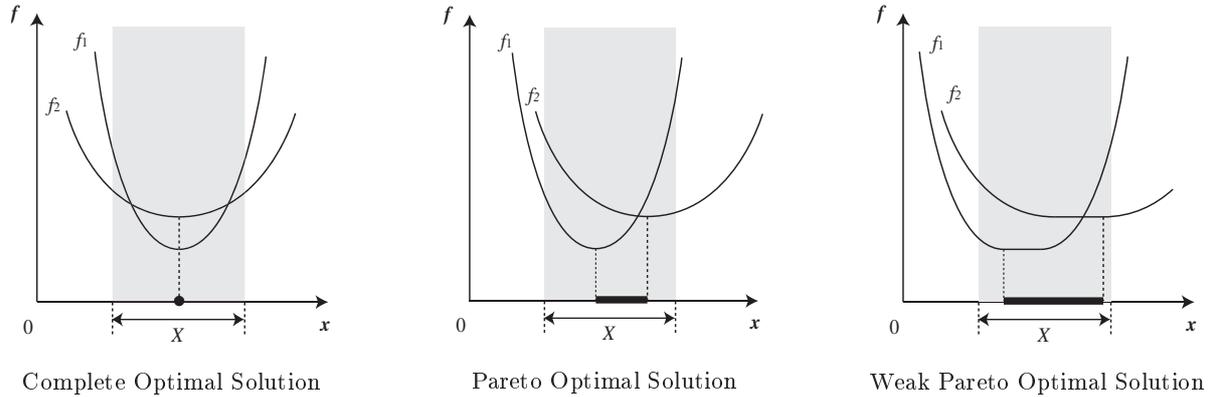


図 D.3 $x - f$ 空間

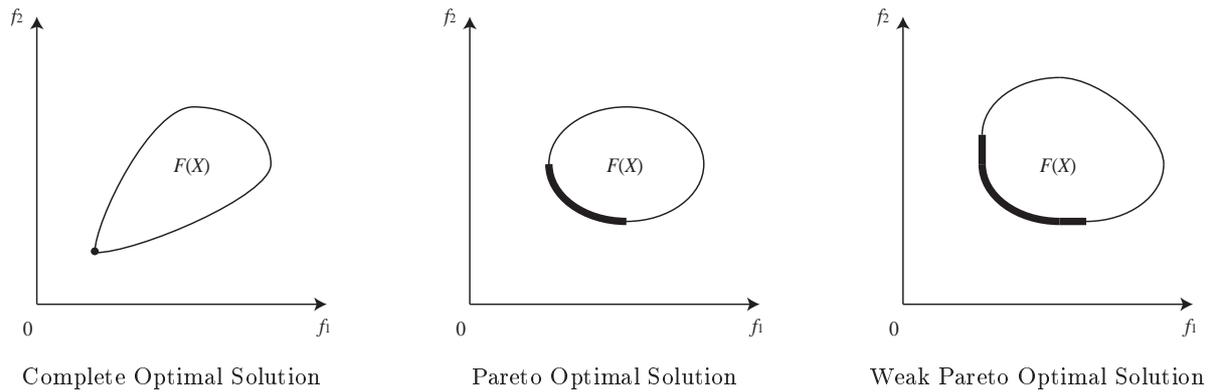


図 D.4 目的関数空間

D.6.2 制約法

多目的最適化問題は，単一目的最適化手法を用いて解くことが可能であり，これまでにいくつかの手法が提案されている。ここでは，パレート曲面が凸性を有せずともすべてのパレート曲面を支持することができる制約法について述べる。

Haimes ら⁶⁰⁾ によって提案された制約法は， r 番目の目的関数以外の目的関数には上限を設定して制約条件に変換するというスカラー化手法である。すなわち，任意の $f_r(x)$ のみを目的関数とし，残りの $k - 1$ 個の目的関数に上限値 $\varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, k, i \neq r$ を設定して， ε 制約と呼ばれる不等式制約に変換した，次の制約問題 $P(\varepsilon_{\bar{r}})$ を解くことによりパレート最適解を求める手法である。

$$\left. \begin{array}{l} \text{minimize}_{x \in X} \quad f_r(x) \\ \text{subject to} \quad f_{\bar{r}}(x) \leq \varepsilon_{\bar{r}} \end{array} \right\} \quad (D.23)$$

ここで,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\bar{r}} &= (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{r-1}, \varepsilon_{r+1}, \dots, \varepsilon_k)^T \\ \mathbf{f}_{\bar{r}}(\mathbf{x}) &= (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_{r-1}(\mathbf{x}), f_{r+1}(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x}))^T \\ X_{\bar{r}}(\varepsilon_{\bar{r}}) &= \{\mathbf{x} \mid \mathbf{f}_{\bar{r}}(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_{\bar{r}}\} \\ \varepsilon_{\bar{r}} \in E_{\bar{r}} &= \{\varepsilon_{\bar{r}} \mid X_{\bar{r}}(\varepsilon_{\bar{r}}) \neq \emptyset\}\end{aligned}$$

制約法の幾何学的解釈は図 D.5 に示す。図からわかるように、制約法は凸性の仮定を必要としない。 $\varepsilon_{\bar{r}} \in E_{\bar{r}}$ を種々に変化させることによって全てのパレート最適解を求めることができ、凸性の仮定のない問題にも有効であることが分かる。

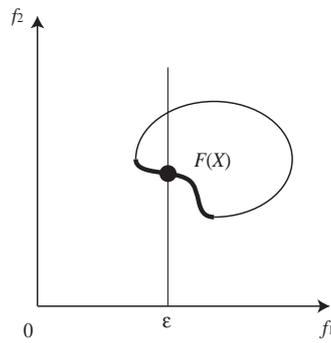


図 D.5 制約法

参考文献

- [1] 金箱温春 (訳). 建築家の講義 サンチャゴ・カラトラバ. 丸善出版株式会社, 2009.
- [2] 大森博司. 変身するコンピュータ. 建築雑誌, No. 1535, pp. 20–21, 2005.
- [3] M.Milankovic. O membranama jednakog otpora, rad.jugoslovenske akademije. *Zagreb*, Vol. 175, pp. 140–152, 1908.
- [4] W.Flugge. *Statik und Dynamik der Schalen*. Berlin Verlag von Julius Springer, 1934(japanese translation).
- [5] C.B.Biezeno. Bijdrage tot de berekening van ketelfronten. *de Ingenieur*, Vol. 37, p. 781, 1922.
- [6] R.A.Struble. Biezeno pressure vessel heads. *J. Appl. Mech*, Vol. 23, pp. 642–645, 1956.
- [7] E.H.Brown. The minimum weight design of closed shells of revolution. *Quart. J. Mech. and Appl. Math*, Vol. 15, pp. 109–128, 1962.
- [8] P.G.Smith, and E.L.Wilson. Automatic design of shell structures. ASCE, J. Struct. Div, Vol. 97, No. 1, pp. 191–201, 1971.
- [9] M.R.Horne. Shells with zero bending stresses. *J. Mech. and Physics of Solids*, Vol. 2, No. 2, pp. 117–126, 1954.
- [10] P.Pedersen. On the minimum mass layout of trusses. *AGARD Conference Proceeding*, No. 36, 1970.
- [11] Ph.Trompette, and J.L.Mercelin. On the choice of the objectives in shape optimization. *Engineering Optimization*, 11, (1/2), pp. 92–109, 1987.
- [12] L.Younsheng. Sensitivity analysis in shape optimization design for a pressure vessel. *Int. J. Pres. Ves. & Piping*, 49, pp. 387–397, 1992.
- [13] J.I.Barbosa, and C.M.Soares. Sensitivity analysis and shape optimal design of axisymmetric shell structures. *Computing Systems in Engineering*, Vol. 2, No. 5-6, pp. 525–533, 1991.
- [14] I.D.Faux and M.J.Pratt. *Computational Geometry for Design and Manufacture*. Ellis Horwood, 1979.
- [15] G.Farin. *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*. Academic Press, 1988.
- [16] D.F.Rogers and J.A.Adams. *Mathematical Elements for Computer Graphics*. McGraw-Hill, 1990.
- [17] R.E.Barnhill. *Geometry Proceeding for Design and Manufacturing*. SIAM, 1992.
- [18] E.Ramm. Shape finding methods of shells. *Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures(IASS)*, Vol. 33, pp. 89–99, 1992.
- [19] H.Isler. Generating shell shapes by physical experiments. *Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures(IASS)*, Vol. 34, pp. 53–63, 1993.
- [20] E.Ramm, and G.Mehlhorn. On shape finding methods and ultimate load analyses of reinforced concrete shells. *Eng. Struct*, Vol. 13, pp. 178–198, 1991.
- [21] E.Hinton, and N.V.R.Rao. Structural shape optimization of shells and folded plates using two-noded finite strips. *Computers & Structures*, Vol. 46, No. 6, pp. 1055–2072, 1993.
- [22] 佐々木睦朗. FLUX STRUCTURE フラックスストラクチャー. T O T O出版, 2005.

- [23] 木村俊明, 大森博司. 形状と厚さの同時最適化法の構造位相決定問題への応用—自由曲面シェル構造の構造形態創生手法の提案(その2)—. 日本建築学会構造系論文集, No. 648, pp. 367–376, 2010.
- [24] R. V. Linn L. F. R. Espath and A. M. Awruch. Shape optimization of shell structures based on nurbs description using automatic differentiation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 88, No. 18, pp. 613–636, 2011.
- [25] M. Ohsaki, T. Nakamura, and M. Kohiyama. Shape optimization of double-layer space truss described by a parametric surface. *International Journal of Space Structures*, Vol. 12, No. 2, pp. 109–119, 1997.
- [26] 山本憲司, 皆川洋一, 大森博司. R_s 座屈荷重係数を目的関数とした単層ラチスドームの形状最適化. 構造工学論文集, Vol. 54B, pp. 345–352, 2008.
- [27] 藤田慎之輔, 大森博司, 木村俊明. 自由曲面シェル構造の形態創生手法への構造安定性評価の導入. コロキウム構造形態の解析と創生 2008, pp. 97–102, 2008.
- [28] 日本建築学会. アルゴリズムックデザイン. 鹿島出版会, 2009.
- [29] M. Ohsaki and M. Hayashi. Fairness metrics for shape optimization of ribbed shells. *J. Int. Assoc. Shells and Spatial Struct.*, Vol. 41, No. 1, pp. 31–39, 2000.
- [30] T. Ogawa M. Ohsaki and R. Tateishi. Shape optimization of curves and surfaces considering fairness metrics and elastic stiffness. *Struct. Multidisc. Optim.*, Vol. 24, pp. 449–456, 2003.
- [31] 浜田英明, 大森博司. 設計者の選好と力学的合理性を勘案した自由曲面シェル構造の構造形態創生法の提案: その2 最適性条件による理論的解法. 日本建築学会構造系論文集, No. 618, pp. 143–150, 2007.
- [32] G. Tang. Deployable gridshells and their application as a physical form finding tool: Constructing an innovative life-size strained timber gridshell. *Proc. IABSE-IASS Symposium 2011*, Paper No. FF-274, 2003.
- [33] 小河利行, 大崎純, 立石理恵. 線形座屈荷重最大化と部材長一様化を目的とした単層ラチスシェルの形状最適化. 日本建築学会構造系論文集, No. 570, pp. 129–136, 2003.
- [34] M. Kuijvenhoven and P. C. J. Hoogenboom. Particle-spring method for form finding grid shell structures consisting of flexible members. *J. Int. Assoc. Shells and Spatial Struct.*, Vol. 53, No. 1, pp. 31–38, 2012.
- [35] 河野俊文. 曲面の幾何構造とモジュライ. 日本評論社, 1997.
- [36] 塩濱勝博, 成慶明. 曲面の微分幾何学—局所理論から大域理論へ—. 日本評論社, 2006.
- [37] 久田俊明. 非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎. 丸善, 1992.
- [38] M. Iri, Y. Shimakawa, and T. Nagai. Extraction of invariants from digital elevation data with application to terrain topography. *Nonlinear Analysis*, Vol. 47, pp. 5585–5598, 2001.
- [39] Joh(物理のかぎプロジェクト). 物理のかぎしっぽ. <http://www12.plala.or.jp/ksp/index.html>.
- [40] 田澤義彦. 曲線論・曲面論. 株式会社ピアソン・エデュケーション, 1999.
- [41] 安達忠次. 微分幾何学概説. 培風館, 1976.
- [42] Gunter Aumann. Interpolation with developable bezier patches. *Computer-Aided Design*, Vol. 8, pp. 409–420, 1991.
- [43] Johann Lang and Otto Roschel. Developable $(1, n)$ -bezier surfaces. *Computer-Aided Design*, Vol. 9, pp. 291–298, 1992.
- [44] Martin Peternell, Helmut Pottmann, Bahram Ravani. On the computational geometry of ruled surfaces. *Computer-Aided Design*, Vol. 31, pp. 17–32, 1999.
- [45] 栗山好夫, 笹川宏之. 機械強度設計のための CAE 入門: 有限要素法活用のノウハウ. 東京電機大学出版局, 2009.
- [46] 藤田慎之輔, 大崎純. ひずみエネルギーとパラメトリック曲面の代数不変量を考慮したシェルの形状最適化. 日本建築学会構造系論文集, No. 639, pp. 857–863, 2009.
- [47] S. Fujita and M. Ohsaki. Shape optimization of free-form shells using invariants of parametric surface.

-
- International Journal of Space Structures*, Vol. 25, No. 3, pp. 147–153, 2010.
- [48] 藤田慎之輔, 大崎純. パラメトリック曲面で定義されたラチスシェルの部材長一様化と剛性最大化を目的とした形状最適化. 日本建築学会構造系論文集, No. 685, pp. 495–502, 2013.
- [49] 藤田慎之輔, 大崎純. 部材グループを考慮した三角形グリッドラチスシェルの部材長一様化のための形状最適化. 日本建築学会大会学術講演梗概集(東海)構造, 2012.
- [50] 木村俊明, 大森博司. 形状と厚さの同時最適化法の定式化とその応用—自由曲面シェル構造の構造形態創生手法の提案(その1). 日本建築学会構造系論文集, No. 640, pp. 1091–1098, 2009.
- [51] A. Kawamoto K. Sato K. Izui S. Yamasaki, T. Nomura and S. Nishiwaki. A level set based topology optimization method using the discretized signed distance function as the design variables. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 2009.
- [52] Forrest.A.R. Interactive interpolation and approximation by bézier polynominals. *Comp.J*, Vol. 15, pp. 71–79, 1972.
- [53] Gordon.W.J and Riesenfeld.R.F. Bernstein-bézier methods for the computer aided design of free-form curves and surfaces. *J.ACM*, Vol. 21, pp. 293–310, 1974.
- [54] 川合慧. コンピュータグラフィックス—第2版—. 日刊工業新聞社, 1993.
- [55] G.Farin, J.Hoschek, and M-S.Kim. *HANDBOOK OF COMPUTER AIDED GEOMETRIC DESIGN*. ELSEVIER, 2002.
- [56] V.Pareto. *Cours D'Economie Politique*, Vol. I and II. F. Rouge, 1896.
- [57] L.A.Zadeh. Optimality and nonscalar-valued performance criteria. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 8, pp. 59–60, 1963.
- [58] M.Zeleny. *Linear Multiobjective Programming*. Springer-Verlag, 1974.
- [59] T.C.Koopmans. Analysis of production as an efficient combination of activities. *Activity Analysis of Production and Allocation, Cowles Commission Monograph*, No. 13, pp. 33–97, 1951.
- [60] Y.Y.Haimes, W.Hall, and H.Freedman. *Multi-Objective Optimization in Water Resources Systems The Surrogate Trade-Off Method*. Elsevier, 1975.

謝辞

研究室関係者をはじめとした多くのみなさまの支えなくしては、薄学凡才な私に本論文をこのような形にまとめ上げることは到底出来ませんでした。本論文を締めくくるにあたり、私を支えてくれた多くのみなさまに深く感謝の意を表し、謝辞と致します。

はじめに、広島大学大学院教授 大崎純先生には、本論文の指導教員として、大学院修士課程時代の2年間を含め、社会に出てからも継続して5年半に渡り、非常に親身な指導と的確なご助言を戴きました。京都大学を卒業する時に、先生が広島大学に行かれるという話を聞いた時は、不思議な縁のようなものを感じました。将来故郷の広島に戻り構造デザインに携わって行きたいという思いを学生時代から抱き続けていた私にとって、広島にいる先生の元で学位を取得するという事は、自分の中で非常に大きな意味を持っていました。しかしながら、社会に出てからは、実務と研究活動との両立がなかなか思うようにはいかず、大変なご迷惑をおかけしたことが多々ありました。それでもことあるごとに私のために時間を割いて下さり、何とか2年間でこの論文を纏め上げることができました。もし私の指導教官が先生でなかったならば、私は十中八九、学位の取得を断念せざるを得なかったと思います。生涯の中で恩師はと問われた際には、私は迷いなく先生の名前を挙げると思います。本当にありがとうございました。

また、同教授 大久保孝昭先生、田川浩先生、北村充先生には、本論文の副査として、論文審査及び公聴会において、研究内容や論文の構成などについて多くの貴重なご意見、ご指導を賜り、本論文をより質の高いものとすることができました。深く感謝いたします。

東京工業大学連携教授/工学院大学特別専任教授 金箱温春先生には、有限会社 金箱構造設計事務所の所員としてご指導を賜りました。学生時代にはパソコンの前に座って数学に没頭していた自分には、実務としての構造設計に必要な想像力、スケール感というものが非常に未熟であり、入社当初はご迷惑をおかけする一方でした。そんな半人前であるにもかかわらず、社会人博士として大学に籍を置くことを了承していただくとともに、若年の私に数々の物件を任せていただけたことは大変幸せでした。特に、生まれ故郷である広島の物件として、三次市民ホールを担当させていただけたことには感謝の言葉も見つかりません。丁度この論文をまとめるタイミングで現場が始まっています。より良い建築となるよう、最善を尽くしたいと思います。また、社内で月一度のオフィスセミナーでは、各所員が担当物件を中心にプレゼン・議論をする機会が与えられ、実務で得た経験を整理、吸収するだけでなく、自身の未熟なプレゼンテーション能力・コミュニケーション能力を磨く上でも非常に貴重な経験となり、研究活動を行う上でも大変有益でした。ここに深く感謝いたします。

名古屋大学大学院教授 大森博司先生には、学部4年時の1年間に指導教官としてご指導を賜りました。私が研究室を卒業してから5年半の歳月が過ぎましたが、あの頃と同じ、構造最適化に関する研究を現在まで続けています。この道に進むきっかけとなる1年間を与えてくださったことは私にとってとても幸運でした。また、今年、先生が、実務設計における権威ある賞である松井源吾特別賞を受賞されたことは、私を含めて、構造形態創生に関わる研究に携

わる者に非常に大きな希望を与えてくださり、今後もこの研究を続けていこうという励みになりました。ここに深く感謝いたします。

本研究の遂行にあたり、多くの方々にご助言、ご協力を戴きました。(株) 佐々木睦朗構造計画研究所 木村俊明さんには、私が学部4年生の頃、同じ研究テーマの直属の先輩として、研究遂行に必要な様々なスキルを吸収させていただきました。また、社会に出てからも、何度か食事に誘っていただき、研究のみならず、実務の先輩としても多くの議論を交わすことができました。大崎研究室 OB の、張景耀さん、萩下敬雄さん、木下拓也さん、内田篤志さん、和多田遼さん、童ガさん、中嶋拓さんには、大学院修士課程時代の2年間机をともにし、研究者として切磋琢磨し成長することが出来ました。広島大学大崎研究室の学生の方々には、締切の直前期に助力、協力を頂きました。本当にありがとうございました。

ならびに、本研究を遂行する機会を与えて下さったすべての方々に感謝いたします。

最後に、私の勝手気ままな人生に対し、多大な理解と協力をしてくれた父と母に心より感謝の意を表します。

2013年9月

藤田 慎之輔