

学位論文要旨

算数教育における数学的概念の
構成と再構成に関する研究

申請者

香川大学教育学部

長谷川 順一

学位論文要旨

申請者 長谷川 順一

論文題目

算数教育における数学的概念の構成と再構成に関する研究

論文目次

- 第1章 本研究の目的と方法
 - 1 本研究の目的
 - 2 本研究の意義
 - 3 本研究の方法
 - 3. 1 ミクロな観点からの検討
 - 3. 2 意図的漸進的な数学的概念の構成と再構成
 - 3. 3 算数的活動の内包する問題
 - 3. 4 研究の具体的方法
 - 4 本論文の構成
 - 文 献

- 第2章 数学教育における教具と思考実験
 - 1 はじめに
 - 2 授業事例：2枚の硬貨を投げる問題
 - 2. 1 授業の概要
 - 2. 2 授業について
 - 3 教具と思考実験
 - 3. 1 教具について
 - 3. 1. 1 平林の教具論
 - 3. 1. 2 課題教具と説明教具
 - 3. 1. 3 機能的側面からの教具の意味
 - 3. 2 思考実験について
 - 3. 2. 1 思考実験を巡って
 - 3. 2. 2 教育研究における思考実験の事例
 - 3. 3 数学的概念の構成と再構成
 - 3. 3. 1 認知的葛藤による概念の再構成
 - 3. 3. 2 数学教育における教具と思考実験
 - 4 教具の使用と思考実験：事例
 - 4. 1 教具の使用
 - 4. 2 思考実験の事例
 - 5 第2章のまとめ
 - 文 献

- 第3章 三角形・四角形概念
 - 1 問 題
 - 2 三角形・四角形概念の構成に関する対応=操作

- 3 授業事例とその検討
 3. 1 授業事例 1
 3. 2 授業事例 2
 3. 3 授業事例 3
 3. 4 考察
- 4 「三角形・四角形」についての授業実験
 4. 1 授業の構想
 4. 2 授業の概要
 4. 3 事後調査とその結果
- 5 三角形・四角形の弁別に関する調査
 5. 1 調査の目的と方法
 5. 1. 1 調査の目的
 5. 1. 2 調査の方法
 5. 2 調査の結果
 5. 2. 1 全体的な傾向
 5. 2. 2 各図形に対する反応
 5. 3 追加調査：第 5 学年の児童を対象とした調査
 5. 4 考察
- 6 n 角形の扱い
- 7 第 3 章のまとめ
文献

第 4 章 図形の面積と周長の分離

- 1 問題
 1. 1 面積の学習に関わる困難な点
 1. 2 図形の周長と面積に関する先行研究
- 2 「面積」の言語的説明について
 2. 1 面積の数学的定義
 2. 2 ピアジェによる面積概念の発達論的検討
 2. 3 算数教科書における「面積」の説明
- 3 等周長の正方形と長方形の面積比較
 3. 1 授業の目的
 3. 2 授業事例 1：第 4 学年「面積」単元終了後の授業実験
 3. 2. 1 授業の概要
 3. 2. 2 調査とその結果
 3. 3 授業事例 2：第 4 学年「面積」への導入時での扱い
 3. 4 授業事例 3：第 5 学年の児童を対象とした授業
 3. 5 考察
- 4 等周長の正方形とひし形の面積比較
 4. 1 小学校第 5、6 学年の児童を対象とした調査
 4. 1. 1 調査の目的と方法
 4. 1. 2 調査の結果
 4. 1. 3 調査問題の検討
 4. 2 小学校第 1～5 学年の児童を対象とした調査
 4. 2. 1 調査の目的と方法

- 4. 2. 2 調査の結果
- 4. 3 考察
- 5 第4章のまとめ
- 文献

第5章 分数の基礎的概念：授業実験と調査研究

- 1 問題
 - 1. 1 分数の扱い
 - 1. 2 量分数と分割分数の混同の問題
- 2 量分数概念の確立を目標とした授業実験
 - 2. 1 量分数と分割分数の分離を目的とした授業
 - 2. 2 授業の概要
 - 2. 2. 1 P小学校4年生を対象とした授業
 - 2. 2. 2 Q小学校4年生を対象とした授業
 - 2. 2. 3 Q小学校5年生を対象とした授業
 - 2. 3 調査とその結果
 - 2. 3. 1 $1/2$ mのテープ作り問題の結果
 - 2. 3. 2 事後調査とその結果
 - 2. 4 考察
- 3 量分数概念の確立に関連する知識の検討
 - 3. 1 調査の目的と方法
 - 3. 2 調査とその結果
 - 3. 2. 1 調査1：帯分数・仮分数問題との関連
 - 3. 2. 2 調査2：換算問題との関連
 - 3. 2. 3 調査3：足し算問題との関連
 - 3. 3 考察
- 4 量分数概念の理解に関する継時的調査
 - 4. 1 調査の目的
 - 4. 1. 1 分数の導入事例
 - 4. 1. 2 継次的調査の目的
 - 4. 2 調査1：第3学年から第4学年にかけての継時的調査
 - 4. 2. 1 調査の実施時期と問題
 - 4. 2. 2 調査の結果
 - 4. 2. 3 調査結果の考察
 - 4. 3 調査2：問題提示の順序の影響
 - 4. 3. 1 調査の目的と方法
 - 4. 3. 2 調査の結果
 - 4. 3. 3 考察
 - 4. 4 調査3：図の異なりの影響
 - 4. 4. 1 調査の目的と方法
 - 4. 4. 2 調査の結果
 - 4. 4. 3 考察
- 5 第5章のまとめ

- 第6章 量分数の理解に向けた実証的研究
 - 1 問題
 - 2 量分数概念の理解における数直線モデルの効果
 - 2.1 数直線を用いたアプローチ
 - 2.2 授業事例1
 - 2.2.1 長さモデル学級
 - 2.2.2 数直線モデル学級
 - 2.3 事前・事後調査とその結果
 - 2.3.1 調査問題
 - 2.3.2 調査結果と考察
 - 2.4 授業事例2
 - 2.4.1 授業の概要
 - 2.4.2 事前・事後調査の結果と考察
 - 2.5 考察
 - 3 分数の導入：授業事例とその検討
 - 3.1 授業の概要
 - 3.1.1 第1時の授業（分数の導入）
 - 3.1.2 第2時以降の授業
 - 3.2 調査とその結果
 - 3.2.1 事前調査
 - 3.2.2 内容理解調査（事後調査）
 - 3.2.3 量分数問題調査の問題
 - 3.2.4 量分数問題調査の結果
 - 3.2.5 分数大小比較問題の結果
 - 3.3 考察
 - 4 提示される図が量分数判断に及ぼす影響
 - 4.1 調査の目的
 - 4.2 調査の問題と方法
 - 4.3 調査結果
 - 4.4 考察
 - 5 第6章のまとめ
 - 6 第5章・第6章のまとめ
 - 文献
- 第7章 全体的考察と今後の課題
 - 1 結果の特徴
 - 1.1 共通する事項
 - 1.2 概念定義の後退現象
 - 2 数学的概念の構成と再構成
 - 2.1 教具と思考実験：再考
 - 2.1.1 教具について
 - 2.1.2 思考実験について
 - 2.2 算数的活動への示唆
 - 3 今後の課題
 - 文献

論文要旨

第1章 本研究の目的と方法

児童・生徒は個別性の高い数学的な概念の構成と再構成を繰り返すことによって、個別性の低い、従って共有性の高い概念に構造化し拡大し精緻化させていく。本研究では、数学的概念の構成と再構成の様相を3つの素材にそくしながら、ミクロな視点から検討する。さらに構成と再構成の過程でみられる誤判断への対応について、教材・教具の観点から考察を加える。検討するのは、以下の3つの素材である。

①三角形・四角形概念、②図形の面積と周長の関係、③量分数の概念

本研究では、上記の素材にそくしながら授業観察、調査研究、授業実験によって実証的に検討・考察を進める。具体的には授業観察及び問題冊子を用い学級単位で一斉に実施する調査研究によって児童の反応を明らかにするとともに、誤判断の様相やその修正のための方法について授業実験を行い検討する。授業実験とは、教材・教具の有効性を検討することを目的とし学級単位で実施する授業であって、事前・事後調査を行い概念理解の様相を明らかにしようとするものをいう。そのような方法を採用することによって、同様の素材を用いて実施される授業実践や教育研究に対して実証的な資料を提供することも可能となる。図1は、本論文の構成を表したものである。

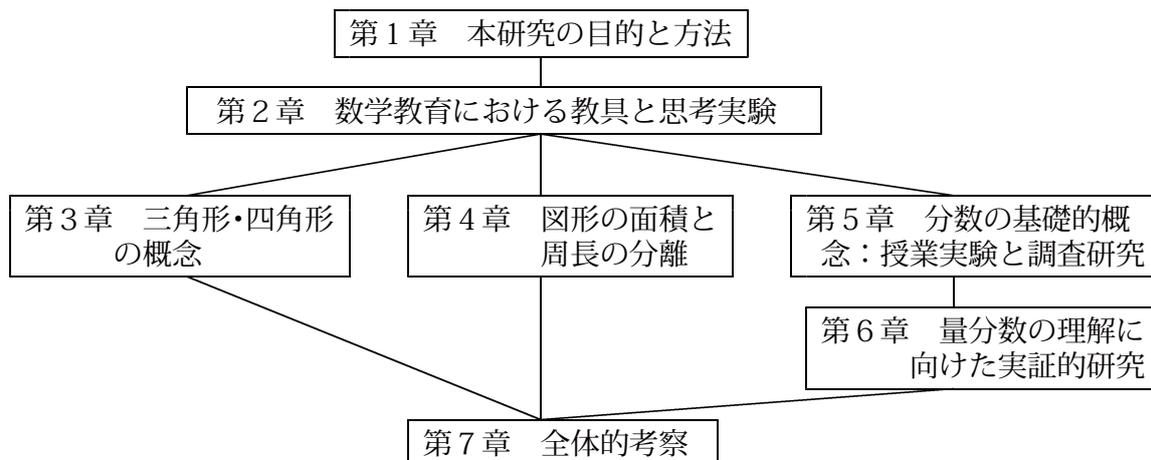


図 1 本論文の構成

第2章 数学教育における教具と思考実験

平林(1987)は、数学的教具は数学教育の出発点であるとし、その使用法に着目した分類を示しつつ、それらが依拠する数学教育思想を理解することの重要性を指摘した。長谷川(1990)は、数学的教具を操作可能性を基本とした機能の面から特徴づけるとともに、平林(1985)に従い問題場面を設定する教具を課題教具、解法を示唆する教具を説明教具と呼んだ。とりわけ算数教育では、問題とその解決過程にそくした適切な教具の使用が重要である(長谷川、1997a; Hasegawa, 2002)。なお、以下では「教具」を基本的には児童によって操作可能な物的対象として規定する。また、算数・数学教育を包括的に述べる場合は「数学教育」とし、小学校算数に限定する場合は「算数教育」とする。

「思考実験」は科学哲学の分野で用いられる用語であるため(金子、1986)、科学教育においてその機能に着目した検討がなされているが(Carey & Spelke, 1994)、算数・数学教育

においてはむしろ常套的なやり方といえる。思考実験は対象に対する物理的操作が理想的になされる場合をさし、児童・生徒が個別的に行う場合と集団で展開する場合とに区別を設けることは教授学的には妥当であろう。後者に該当する授業事例(長谷川、1988)から、数学教育における誤判断の修正に対する思考実験の重要性が指摘される。そのような思考実験の過程を物的対象として具体化すれば、それは説明教具の機能を担うことになる。

第3章 三角形・四角形の場合

「三角形・四角形」は小学校第2学年で扱われ、その後の図形学習の基礎となる。その導入を扱う授業では、直線図形の辺や頂点(かど)の数を数えるだけでなく、図形を変形し既知の図形に帰着させることで何角形かを判断する様子が観察される。それらの判断方法は、図2の図式によって表される(長谷川、1985; Hasegawa、1997; F, F' は図形、 N は自然数の集合、 ϕ は辺や頂点の数を数える操作、 ψ は合同変換を含む図形の変形操作を表す)。

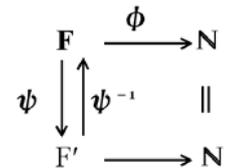


図2 n角形の判断

そこで、第2学年の児童を対象とし、図形の変形(図2の ψ の操作)にみられる不変性に着目させる(図3左)、図形のへりの直線性は思考実験による(図3右)、図形の構成にはジオボードを教具として用いることを方針として「三角形・四角形」の授業実験を行った(長谷川・香川、1994)。事後調査の結果、三角形・四角形の弁別の正答率は高く、上記の方針による授業の有効性が示された。

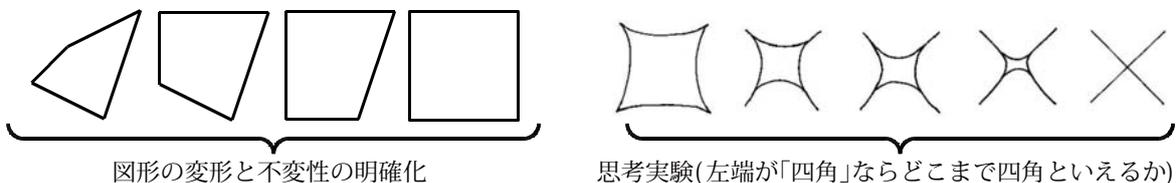


図3 四角形の扱い

現行指導要領のもとで学習した児童の三角形・四角形の弁別の様相を明らかにすることを目的とし、第2～5学年の児童を対象として調査を実施した。その結果、最初に判断を求める図形によって正答率に差異がみられる、図形弁別の正答率は第2学年と第5学年が同程度であり第3学年で低下している、第5学年での正答率の回復は同学年で扱われる図形学習によるなどが明らかになった。三角形・四角形概念理解を促すには、それらが導入される際の算数的活動を充実させること、図形の言語的説明(定義)に基づく判断とその意義の理解を促すこと、導入後も概念を強化する場を設けることが重要である。

第4章 図形の面積と周長の分離

小学校中・高学年の児童に、図形が等周長であれば等積であるとするものが多くみられる(細谷、1968; Russell、1976; 梶、1983; 工藤・白井、1991; 土井、1993)。西林(1988)によれば、それは保存概念の獲得によるものであるという。そこで、第4学年の児童を対象とし図形の面積と周長の分離を目的とする授業実験を行った(長谷川、2008)。第1時には等周長図形の面積を、第2時には等積図形の周長を調べる活動、第3時には様々な等積図形を構成する活動が行われた。このとき、ジオボードを用いる学級と方眼紙を用いる学

級(第1、2時)を設けた。調査の結果、両学級の児童はともに興味関心をもって活動に取り組んだが、その傾向はジオボードを用いた学級で顕著であった。授業では「周りの長さと同じでも面積は違うこともある」といった発表がなされたが、等周長の正方形と長方形の面積比較の問題について、事前調査と事後調査の結果に有意な変化はみられなかった。

平行四辺形の求積公式が既習である第5学年の児童を対象とし、平行四辺形の求積公式を想起させる問題に回答した後に等周長の正方形とひし形(平行四辺形)の面積比較問題に回答する問題冊子と、その逆の順に回答する問題冊子を用いて調査を行った。その結果、面積比較問題の正答率に有意な差はみられなかった(長谷川・岩田、1996)。

図形が等周長であれば等積であるとする判断は強固である。このことから、この問題の教材としての活用を考えたい。上述したジオボードによる等周長や等積の図形の構成活動は、その例である。また、図形の面積を扱う際には周長との分離を図る機会を設けることが望まれる。例えば輪にしたひもで図形を作りその面積を考えるなど、輪にしたひもを課題教具、さらには説明教具として用いる活動を行い、その操作の思考実験としての実行を促すなどの授業展開も構想される。

第5章 分数の基礎的概念：授業実験と調査研究

本章では、量分数と分割分数の混同の問題について検討する。量分数とは、 $2/3$ mや $2/3$ Lのような量の普遍単位を用いた分数表現をいう。量分数と分割分数の混同の問題とは、例えば対象の長さがm単位で表されていれば、どのような長さであっても、全体の $2/3$ の長さは $2/3$ mであるとするなどをいう。そのような誤判断はよく知られており(例えば、銀林、1975；石田、1985；駒林・狩原、1990；岩崎・橋本・高澤、1993)、同様の誤判断は数直線への分数の図示でもみられる(Novillis-Larspn、1980；Kerslake、1986)。

児童の量分数判断の様相をみるために実施した「 $1/2$ mのテープ作り」の授業では、多くの児童が配布された紙テープ(1 mとは異なる)を2等分割した1つ分を「 $1/2$ m」であるとした。しかし、第5学年の学級では、児童が討論を通して「 $1/2$ mは50cm」であることに気付いていった。一方、第4学年のある学級では、「3 mの半分も $1/2$ m」などの発言がなされ、「 $1/2$ mは50cm」とするものは数名に留まった(長谷川、1997b)。

このような誤判断がどの時点で生じるかを明らかにするため、第3学年での「分数」学習後から第4学年での「分数」学習前までの約1年の間に、量分数に関する問題による4回の調査を実施した(長谷川、2000)。その結果、量分数についての誤判断は分数学習終了後からみられ、その後、漸増する傾向がみられた。また、量分数についての問題や図示のあり方によって児童の判断に異なりの生じることが明らかになった。

第6章 量分数の理解に向けた実証的研究

本章では、量分数の誤判断への対応について検討する。そのため、帯分数・仮分数は未習である第4学年の児童を対象として授業実験を行った(長谷川、1999)。1学級では第1時に3 mのテープ図に $1-1/4$ (1と $1/4$) mを図示する問題を扱ったが、それに対して3通り($1-1/4$ m、 $1-2/4$ m、 $1-3/4$ m)の図示が発表された(図4；児童による発表用シートへの図示)。第2時には数直線に分数を図示する問題を扱ったが、第1時と同様の発表が続いた(図5)。一方、第1時に数直線への分数図示を扱った学級では、正答のみが

発表され混乱はみられなかった。量分数の適切な判断を促すには、帯分数的に表現された分数を数直線に図示する問題が有効であることが示唆される。

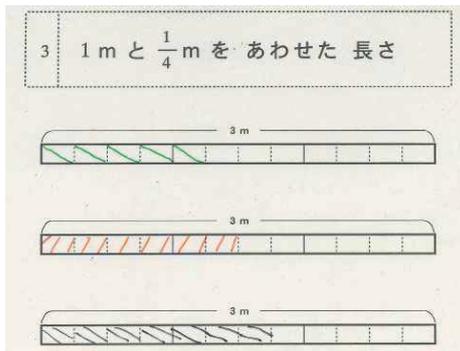


図 4 「1mと1/4mをあわせた長さ」

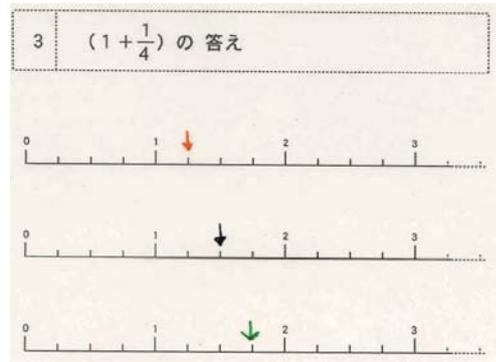


図 5 「 $(1 + \frac{1}{4})$ の答え」

第3学年での「分数」の導入について、単位量を越える図(図6)を用いることの効果をみる授業実験を行った。その結果、一定の効果がみられたが、同時に、授業のさらなる改善に向けた課題も明らかになった(長谷川、2001)。

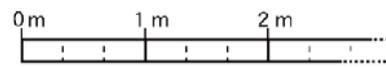


図 6 単位量を越える図の例

1998年の学習指導要領では、第4学年で「分数」への導入が行われ、真分数、帯分数、仮分数が扱われていた。そのように「分数」を学習した第5学年の児童(同学年の「分数」は未習)を対象とし、数直線に帯分数を図示したり図6に示したテープ図に帯分数表示された長さを図示するなどの問題の量分数判断への影響を検討した。その結果、そのような問題に先に回答すると、適切な量分数判断が促進されることが明らかになった。

量分数の適切な判断を促すには、早期から帯分数・仮分数や数直線表示を扱うことが重要である。分数の四則計算などは量分数を用いた問題場面をもとに扱われ説明がなされる。それには量分数の適切な理解が不可欠であり、それに資する教材・教具の開発が求められる。図6のテープ図は実物の紙テープと抽象的な数直線の間位置づけられるが、そのような図の使用について、さらに検討を進める必要がある。

第7章 全体的考察

本論で検討・考察した3つの素材には、学習後の、あるいは学年進行による誤反応の増加、問題場面の差異による反応の相違という共通する現象が観察された。言語的説明の一部が強化され他の部分が周辺化し、その結果、言語的説明が数学的概念の定義として機能しなくなる現象(概念定義の後退)がみられることは、注目すべきであろう。数学的概念の構成と再構成を目的とする際には、次の4点に注意して活動を展開しなければならない。

- ① 教具や図、思考実験による思考の外化、対象化、言語化の促進
- ② 当該の概念に関連する知識の重視
- ③ 数学的知識の構造化
- ④ 学習終了後の再学習機会の設定

量分数に関して、それを表す図について検討・考察した。図は操作の可能性は低いと思いを外化し対象化するなど、教具と同様の機能を備えている。操作の可能性を基本とし、

図やパソコンの活用をも包含した数学的教具の拡がりが展望される。このとき本研究から、図形については条件を満たす多様な図形が構成できる教具が、数についてはその構造を表現する教具が、それぞれ有効であることが示唆された。

今後の課題として、①図形、面積、分数の体系的検討、②有理数概念の検討、③教具論の構築など、さらなる研究が求められる。

文献

- Carey, S. and Spelke, E. (1994) "Domain-specific knowledge and conceptual change." in Hirschfeld, L. A. and Gelman, S. A. eds., *Mapping the mind: Domain specificity in cognition and culture.* Cambridge University Press, 169-200.
- 土井捷三(1993)「人格形成的機能を高める教科構成論の研究」 風間書房、223-276
- 銀林 浩(1975)「量の世界」 麦書房、79
- 長谷川順一 (1985)「初等段階における図形の概念形成に関する一考察」 西日本数学教育学会「数学教育学研究紀要」 11、98-103
- 長谷川順一 (1988)「数学の授業における概念の構成に関する一考察—確率についての事例をもとに」 西日本数学教育学会「数学教育学研究紀要」 14、61-66
- 長谷川順一 (1990)「概念の構成に関する操作と教具について」 平林一榮先生頌寿記念出版会編 「数学教育学のパースペクティヴ」 聖文社、222-244
- Hasegawa, J. (1997) "Concept formation of triangles and quadrilaterals in the second grade." *Educational Studies in Mathematics*, 32, 157-179.
- 長谷川順一 (1997a)「問題解決過程における数学的モデルの構成と再構成」 日本教育方法学会紀要「教育方法学研究」 23、119-126
- 長谷川順一 (1997b)「量分数概念の確立を目標とした授業事例とその評価」 全国数学教育学会「数学教育学研究」、3、107-115
- 長谷川順一 (1999)「量分数概念の理解における数直線モデルの効果」 日本教育方法学会紀要「教育方法学研究」、25、39-46
- 長谷川順一 (2000)「量分数概念の理解に関する継時的研究—小学校3～4年生を対象として—」 日本数学教育学会誌、82(12)、2-14
- 長谷川順一 (2001)「分数の導入(3年生)：全体量が単位量を越える図の提示が児童の量分数判断に与える影響」 日本教育方法学会紀要「教育方法学研究」、27、81-90
- Hasegawa, J. (2002) "Case studies on the symbolism of difference-finding problems in first grade." *For the Learning of Mathematics*, 22, 21-28.
- 長谷川順一(2008)「事例研究：『面積』と『周長』との分離を目標とした算数の授業—ジオボードを用いた図形の構成をもとに—」 日本教育方法学会紀要「教育方法学研究」、33、25-36
- 長谷川順一・香川朋子 (1994)「ジオボードをもとにした『三角形・四角形』の展開」 日本数学教育学会誌、76(12)、302-306
- 長谷川順一・岩田貴宏(1996)「等周長の正方形と平行四辺形に対する小学生の面積判断」 日本数学教育学会誌 78(4)、4-9
- 平林一榮 (1985)「授業を通してみた算数・数学教育の問題—小学校5年の『割合』を例に—」 西日本数学教育学会昭和59年度第2回例会発表資料
- 平林一榮 (1987)「数学教育の活動主義的展開」 東洋館出版、343-401
- 細谷 純(1968)「空間・量・数の認識とその発達」 黒田孝郎他編「教育学全集6 論理と数学」 小学館、81-112

- 石田忠男 (1985) 「分数・小数の意味理解はなぜむずかしいか」 教育科学算数教育、327、21-27
- 岩崎秀樹・橋本正継・高澤茂樹 (1993) 「分数の意味と指示について (Ⅲ) —分数概念の初期的形態とその変容、量分数の場合—」 西日本数学教育学会 「数学教育学研究紀要」、19、77-84
- 金子 務 (1986) 『『思考実験』—そのレトリカルな構造：ガリレオの論法に即して』 大阪府立大学紀要(人文・社会科学) 34、1-14
- Kerslake, D. (1986) "Fractions: Children's strategies and errors. A report of the strategies and errors in secondary mathematics project." NFER-NELSON, 87-89.
- 梶 外志子 (1983) 「子どもの面積と周りの長さの認識について」 日本数学教育学会 「数学教育学論究」、39・40、49-66
- 駒林邦男・狩原尚義 (1990) 「カリキュラム開発・研究『分数の生い立ち』」 岩手大学教育学部附属教育工学センター 「教育工学研究」、12、1-16
- 工藤与志文・白井秀明 (1991) 「小学生の面積学習に及ぼす誤ルールの影響」 教育心理学研究、39、21-30
- 西林克彦 (1988) 「面積判断における周長の影響」 教育心理学研究、36(2)、120-128
- Novillis-Larson, C. N. (1980) "Locating proper fractions on number lines: Effects of length and equivalence." *School Science and Mathematics*, 53(5), 423-428.
- Russell, J. (1976) "Nonconservation of area: Do children succeed where adults fail?" *Developmental Psychology*, 12(4), 367-368.